

הגבול של פונקציה בנקודה - 2
משפטים כלליים על פונקציות - 8
פונקציות אלמנטריות - 12

תכונות בסיסיות של הנגזרת - 82

משפטים כלליים על הנגזרות - 115
משפט 115 - M. Rolle
משפט 117 - J-L Lagrange
משפט 119 - A-L Cauchy
כלל 120 - J. Bernoulli --- G. de l'Hôpital

חקירת פונקציות - 131
קמירות - 142

האינטגרל הלא מסוים - 166

דוגמא אחרת:

סדרות מספרים

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \dots$$

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

$$1 - \varepsilon < a_n < \varepsilon$$

$$a_1 = 1.0000$$

$$a_2 = -0.5000$$

$$a_3 = 0.3333 \dots$$

$$a_y = -0.2500$$

- 0.1000

$$a_{100} = -0.\bar{0}1\bar{0}0$$

$$f(n) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$f_n$$

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$0 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z} dz = a_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -\varepsilon < a_n < \varepsilon$$

$$\iff |a_n| < \varepsilon$$

$$a_{10} = 0.1$$

$$a_{100} = 0.01$$

$$a_{1000} = 0.001$$

$$a_h < \mathcal{O}(\log L)$$

טענה: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ נ"מ $\sqrt[n]{n}$ $\leq \epsilon$ $\forall \epsilon > 0$

$$|a_n| < \varepsilon$$

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

אנפ'ניל סימלר

$$0 < a_n = \frac{1}{n} < 0.013 \quad N=? \quad \varepsilon = 0.013 \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\frac{1}{n} < 0.013$$

3 כ'יק למצול בגרין לא' - ע'יון

$$n > \frac{1}{0.013} = 76.923...$$

$$0 < a_n < 0.013 \Leftrightarrow n > 91$$

מס'טב'?

אבל גם זה נכון !!!!

חשוב: זה אמור להיות נכון עבור כל ε !

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < a_n < \varepsilon \quad \text{נקח } \varepsilon > 0, \text{ א'זי}$$

$$N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \quad \text{ניתן לבחור}$$

נאמן כי a_k מתכנסת בטור p עבור כל k , ולכן קיים N :
 $k > N \Rightarrow a_k$ מתכנסת ל-0

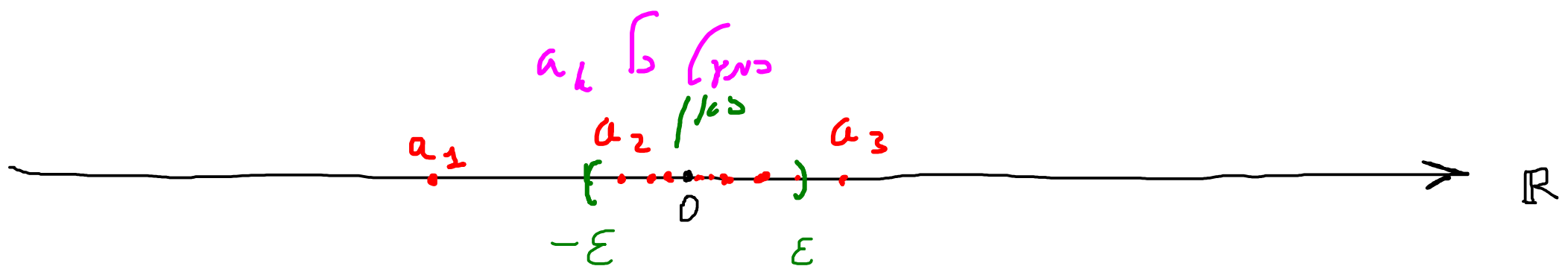
הסדרה $a_k = k - 1000$ חיובית כמעט לכל k . 1

הסדרה $a_k = (-1)^k$ אינה חיובית כמעט לכל k .
 $k > 5781 \Rightarrow a_k > 0$ 2

אינטגרל סימטרי a_k אינו מתכנס ל-0 עבור $\varepsilon > 0$ כל k .
 $|a_k| < \varepsilon$ כמעט לכל k .

כל $\varepsilon > 0$ קיים N : $k > N \Rightarrow |a_k| < \varepsilon$

דוגמא



בחוץ מקטע $(-\varepsilon, \varepsilon)$

נמצא כמות סופית של המספרים (נקודות) a_k

הערה: צבור a_k איננו סילי:

a_k שואב ε -ס כאשר k שואב ∞ - ε

$$a_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

הזכור! כל a_k (ביש k שואב ∞ - ε) שונה ε -ס

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \quad \text{times}$$

חשבון של סדרות אינפיניטסימליות

$$a_k + b_k \rightarrow 0 \iff \begin{cases} a_k \rightarrow 0 \\ b_k \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{משל}$$

$$|a_k| < \frac{\varepsilon}{2} \iff k > N_1 : N_1 \text{ ק"מ}$$

$$k \text{ כל } |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} \iff a_k \rightarrow 0$$

$$|b_k| < \frac{\varepsilon}{2} \iff k > N_2 : N_2 \text{ ק"מ}$$

$$k \text{ כל } |b_k| < \frac{\varepsilon}{2} \iff b_k \rightarrow 0$$

$$k \text{ כל } |a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ש/ע

$$N := \max(N_1, N_2) \quad |a_k + b_k| < \varepsilon \iff k > N$$

$$k \text{ כל } |a_k + b_k| < \varepsilon \iff \varepsilon > 0$$

① a_k חסמה נלעל אם קיים מספר $M : M > 0$ כזה ש $a_k < M$ לכל k נלעל

② a_k חסומה נלעל אם קיים מספר $M : M > 0$ כזה ש $a_k > -M$ לכל k נלעל

③ סדרה חסומה $\Leftrightarrow$ ① + ② קיים $M > 0$: $|a_k| < M$ כזה ש לכל k

1.3 $a_k = k$ אינה חסומה, ה"ל חסמה נלעל בלבד (ע"י $M=0$)

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k}$$

חסומה ע"פ מונטוני

$$a_k = \frac{k}{k+1} \quad \text{חסומה : נלעל} \quad |a_k| < 1$$

מספיק להוכיח: $a_k < 1$ כולל $a_k \geq 0 - \epsilon$

$$\frac{k}{k+1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad k < k+1$$

מסקנה: $a_k < 1$ ע"פ כיוון k

$k > 0$

$$k \in \mathbb{N} \text{ כזו } a_{k+1} > a_k \text{ נ"ע } \underline{\exists n \in \mathbb{N}} a_k \quad (1)$$

$$k \in \mathbb{N} \text{ כזו } a_{k+1} < a_k \text{ נ"ע } \underline{\exists n \in \mathbb{N}} a_k \quad (2)$$

$$\text{אז } a_k \text{ נ"ע } \underline{\exists n \in \mathbb{N}} a_k = \underline{\sup \{a_k\}} \quad (3)$$

ככל סדרות

$$a_k \cdot b_k \rightarrow 0 \iff \begin{cases} a_k \rightarrow 0 \\ \text{אז } b_k \end{cases} \quad \underline{\text{Leibniz}} (*)$$

הנחה: b_k חסומה: $\exists M > 0$: $|b_k| < M$

$$a_k \rightarrow 0 \text{ כזו } \varepsilon > 0 \text{ נ"ע } \exists N \text{ כזו } |a_k| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ כזו } k > N$$

$$|a_k b_k| = |a_k| \cdot |b_k| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon \quad \text{'s/c}$$

$$\text{f.e.N} \quad k \geq r_N \Rightarrow |a_k b_k| < \varepsilon : \varepsilon > 0 \quad \text{sof} \quad \Rightarrow \exists N$$

$$\text{converges } a_k \Leftarrow a_k \rightarrow 0 \quad \underline{\text{converges}} \quad (**)$$

$$|a_k| < \varepsilon \Leftarrow k \geq N : N \text{ depends on } \varepsilon \quad k \geq r_N \Rightarrow |a_k| < \varepsilon \Leftarrow a_k \rightarrow 0 \quad \varepsilon > 0 \quad \text{sof} : \underline{\text{converges}}$$

$$M := \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, \varepsilon) \quad \text{sof}$$

$$\text{converges } a_k \text{ converges } \text{'s/c} \quad |a_k| \leq M$$

f.e.N

-1 1 -1 1 -1 ...

... $a_k = (-1)^k$ 1

$$\begin{array}{c} a_k \rightarrow 0 \\ \Downarrow \\ \lambda a_k \rightarrow 0 \end{array} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$b_k = \lambda$ לכל λ קבוע

צד נ

$$a_k \cdot b_k \rightarrow 0 \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} a_k \rightarrow 0 \\ b_k \rightarrow 0 \end{cases}$$

... $a_k \stackrel{(**)}{\Leftarrow} a_k \rightarrow 0$ הוכחה:

$$a_k \cdot b_k \rightarrow 0 \quad \stackrel{(*)}{\Leftarrow} \quad \begin{cases} \text{... } a_k \\ b_k \rightarrow 0 \end{cases}$$

ג.ע.נ

$$k \in \mathbb{N} \quad |a_k| < 0.05 \quad M_0 = 0.05 \quad a_k = \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{k} < \frac{5}{100} \quad \frac{1}{k} < 0.05$$

$$k > \frac{100}{5} = 20$$

$$|a_k| < 0.05 \iff k > 20$$

$$|a_k| \geq 0.05 \iff k = 1, \dots, 20$$

$$|a_k| := M_k$$

$$M_1 = 1, \quad M_2 = \frac{1}{2}, \quad \dots, \quad M_{15} = \frac{1}{15}, \quad M_{20} = \frac{1}{20}$$

$$M := \max \left(0.05, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{20} \right) + 1 = 2$$

$$\underbrace{\left\{ \frac{1}{k} \right\}}_{\text{סדרה}} \text{ , } k \in \mathbb{N} \quad \left| \frac{1}{k} \right| < 2 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$a_k, b_k, c_k \rightarrow 0 \quad (k \in \mathbb{N}) \quad \underline{\underline{\text{Cesàro}}}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0 \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} k \in \mathbb{N} \quad a_k \leq b_k \leq c_k & (1) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0 & (2) \end{cases}$$

הוכחה:

$$\epsilon > 0 \quad \gamma > 0$$

$$-\varepsilon < a_k < \varepsilon \iff k > N_1 : N_2 \text{ s.t. } a_k \rightarrow 0 \quad (1)$$

$$-\varepsilon < C_k < \varepsilon \iff k > N_2 : N_2 \text{ " } \iff C_k \rightarrow 0 \quad (2)$$

$$a_k \leq b_k \leq c_k \iff \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} a_k \leq b_k \iff \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} b_k \leq c_k \iff a_k \leq c_k \quad (3)$$

$$c_k < \varepsilon, a_k > -\varepsilon \iff k > N \quad \text{w/ } N := \max(N_1, N_2, N_3) \quad \text{now (4)}$$

$$-\varepsilon < b_k < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_k \leq b_k \leq c_k < \varepsilon \iff k > N_{\rho\delta}$$

LeN $b_k \rightarrow 0 \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k \geq N \implies |b_k| < \epsilon$

הסדרה q^k

נתון $q \in \mathbb{R}$ ונגזיר סדרה $a_k := q^k$

משפט 1 $q^k \rightarrow 0$ כאשר $|q| < 1$

2 כאשר $q > 1$, $q^k \rightarrow \infty$ יותר מהלחץ

3 כאשר $q \leq -1$, הסדרה מתנדנדת יותר מהלחץ

1 הוכחה

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{q} \right| =: L > 1 \Leftrightarrow |q| < 1$$

$$(0 < \varepsilon) \quad L = 1 + \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{q^k} \right| = \left| \frac{1}{q} \right|^k = L^k = (1 + \varepsilon)^k$$

a^2
 ab
 b^2

$$(a+b)(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \sum_{n=0}^2 \binom{2}{n} a^{2-n} b^n$$

: 1112 21011



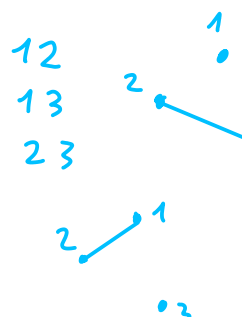
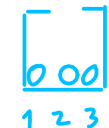
$$(a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

a^3
1

a^2b
3

ab^2
3

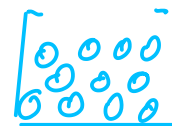
b^3
1



$$(a+b)^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} a^{k-n} b^n \quad n=0,1,\dots,k$$

k פאקטאריאל פארמולע פאר $\binom{k}{n}$

$(a+b)(a+b)\dots(a+b)$
k פאקטאריאל



k פאקטאריאל

$\binom{k}{n}$ פארמולע פאר n -פאקטאריאל k (פאקטאריאל)

C_k^n : 1112 21011

$$(a+b)^k = \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} a^{k-n} b^n$$

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!} \quad \underline{\underline{\text{Coen}}}$$

הוכחה: אינדוקציה ב-k.

$$0! = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

(1) נניח נכון: $k=1$

(2) נניח הנכונה נכונה עבור k ונראה.

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{n=0}^{k+1} \frac{(k+1)!}{n!(k+1-n)!} a^{k+1-n} b^n \quad \text{נ"ל}$$

$$(a+b)^k (a+b) = (a+b)^{k+1}$$

$$(a+b)^k (a+b) = a(a+b)^k + b(a+b)^k = a \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} a^{k-n} b^n + b \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} a^{k-n} b^n =$$

$$= \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} a^{k+1-n} b^n + \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} a^{k-n} b^{n+1} =$$

b^n $\rightarrow$ b^{n+1} $\rightarrow$ b^n

$$\sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} a^{k-n} b^{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} n+1 =: m \\ n = m-1 \\ m = 1, 2, \dots, k+1 \end{array} \right\} = \sum_{m=1}^{k+1} \frac{k!}{(m-1)!(k-m+1)!} a^{k-m+1} b^m = \sum_{n=1}^{k+1} \frac{k!}{(n-1)!(k+1-n)!} a^{k+1-n} b^n$$

$$: \sum - 2 e^{1/n} e$$

$$C_2 + C_3 + C_4 + C_5 = \sum_{n=2}^5 C_n = \sum_{p=2}^5 C_p = \sum_{\text{smiley}=2}^5 C_{\text{smiley}} \neq \sum_{h=2}^5 C_p = C_p + C_p + C_p + C_p$$

$$\frac{k!}{0!k!} a^k b^{0+1} + \frac{k!}{1!(k-1)!} a^{k-1} b^{1+1} + \frac{k!}{2!(k-2)!} a^{k-2} b^{2+1} + \dots$$

$n=0 \quad n=1 \quad n=2$

$$\frac{k!}{(1-1)!(k+1-1)!} a^{k+1-1} b^1 + \frac{k!}{(2-1)!(k+1-2)!} a^{k+1-2} b^2 + \frac{k!}{(3-1)!(k+1-3)!} a^{k+1-3} b^3 + \dots$$

$n=1 \quad n=2 \quad n=3$

$$= \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} a^{k+1-n} b^n + \sum_{n=1}^k \frac{k!}{(n-1)!(k+1-n)!} a^{k+1-n} b^n =$$

$$= \frac{k!}{0!k!} a^{k+1} + \sum_{n=1}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} a^{k+1-n} b^n + \sum_{n=1}^k \frac{k!}{(n-1)!(k+1-n)!} a^{k+1-n} b^n + \frac{k!}{(k+1-1)!(k+1-k-1)!} a^{k+1-k-2} b^{k+1} =$$

$$= a^{k+1} + \sum_{n=1}^k \left[\frac{k!}{n! (k-n)!} + \frac{k!}{(n-1)! (k+1-n)!} \right] a^{k+1-n} b^n + b^{k+1} \quad (=)$$

$$a^{k+1-k-2} b^{k+1} =$$

$$\frac{1}{n! (k-n)!} + \frac{1}{(n-1)! (k+1-n)!} = \frac{(k+1-n) + n}{n! (k+1-n)!} = \frac{k+1}{n! (k+1-n)!}$$

$$\frac{1}{n \cdot (n-1)! (k-n)!} + \frac{1}{(n-1)! (k-n)! (k+2-n)} = \frac{(k+1-n) + n}{n(n-1)! (k-n)! (k-n+1)}$$

$$\stackrel{h=0}{=} a^{k+1} + \sum_{n=1}^k \frac{\overbrace{k! (k+1)}^{(k+1)!}}{n! (k+1-n)!} a^{k+1-n} b^n + \underset{n=k+1}{b^{k+1}} = \sum_{n=0}^{k+1} \frac{(k+1)!}{n! (k+1-n)!} a^{k+1-n} b^n$$

.f.e.v

$$\left| \frac{1}{q} \right| = 1 + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

$$|q| < 1 \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} q^k = 0$$

$$\left| \frac{1}{q^k} \right| = (1 + \varepsilon)^k = \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} \varepsilon^n = 1 + \frac{k!}{1!(k-1)!} \varepsilon + \underbrace{\dots}_{n \geq 2} = 1 + k\varepsilon + \dots > k\varepsilon$$

$$\frac{k!}{(k-1)!} = k$$

$$|q^k| < \frac{1}{k\varepsilon}$$

$$: \text{for } \varepsilon \in \mathbb{N} \text{ there exists } N \text{ such that } 0 < |q|^k < \frac{1}{k\varepsilon}$$

Def. $|q|^k \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{1}{k\varepsilon} \rightarrow 0$

אינדוקציה

$$|a_k - a| < \varepsilon \text{ לכל } \varepsilon > 0 \iff a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$$

$$a_k \rightarrow a$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k - a) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a \text{ "Cauchy"}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ כזה ש- } |a_k - a| < \varepsilon \text{ לכל } k > N$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ כזה ש- } |a_k - a| < \varepsilon \text{ לכל } k > N$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 1 \quad \text{f"ur} \quad a_k = \frac{k-1}{k} \quad \textcircled{1}$$

$$k = ? \quad |a_k - 1| < \varepsilon \quad \varepsilon > 0 \quad \text{f"ur}$$

$$\left| \frac{k-1}{k} - 1 \right| = \left| \frac{\cancel{k} - 1 - \cancel{k}}{k} \right| = \left| -\frac{1}{k} \right| = \frac{1}{k} < \varepsilon$$

$$\text{f. f. n.} \quad k > \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \quad \text{f"ur} \quad \frac{1}{k} < \varepsilon$$

$$\alpha_k \rightarrow 0 \quad \text{iff} \quad \boxed{a_k = \alpha_k + a} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a \quad \underline{\underline{\text{Cauchy}}}$$

$$a_k = \alpha_k + a \quad \text{iff} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a \quad \text{iff} \quad \alpha_k \rightarrow 0$$

$$\alpha_k := a_k - a$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k + a) = a \quad \text{iff} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$$

$$k \text{ sufficiently large} \quad \left| (\alpha_k + a) - a \right| < \varepsilon \quad \text{for all } \varepsilon > 0$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \ni \forall n \geq N \quad |\alpha_n + a - a| = |\alpha_n| < \epsilon$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

S.C.N

$\epsilon > 0 \quad \exists N \ni \forall n \geq N \quad |\alpha_n| < \epsilon$

$$\frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k}$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k-1}{k} = 1$

②

$$\alpha_k = -\frac{1}{k} \rightarrow 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = b, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a \quad \text{או} \quad \left(\begin{array}{l} 1 > 2, \text{ מילולי} \end{array} \right) \underline{\text{Coen}}$$

$$a = b \quad \text{'s/c}$$

$$0 < \varepsilon < \frac{|a-b|}{2} \quad \gamma > \mu \quad \left(\underline{1 : \text{מילולי}} \right)$$

$$\left(|a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow k > N_1 \right) : N_1 \text{ מ"ק} \Leftrightarrow a_k \rightarrow a$$

$$\left(|a_k - b| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow k > N_2 \right) : N_2 \text{ מ"ק} \Leftrightarrow a_k \rightarrow b$$

$$\Leftrightarrow k > N \quad \text{'s/c} \quad N := \max(N_1, N_2) \quad \text{או}$$

$$|b-a| = |(a_k - a) - (a_k - b)| = |(a_k - a) + (b - a_k)| \leq \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$\leq |a_k - a| + |b - a_k| = |a_k - a| + |a_k - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

! $\varepsilon > 0$ כל עברו

(2) סיכום: $|b - a| < \varepsilon$
 סגירה עם הקטירה ε !
 ($\varepsilon < \frac{|b-a|}{2}$)

פ.ע.נ

$\lambda \in \mathbb{R}$, $b_k \rightarrow B$, $a_k \rightarrow A$ א'') Coen

$$a_k + b_k \rightarrow A + B \quad \textcircled{1} \text{ 's } \neq$$

$$a_k \cdot b_k \rightarrow AB \quad \textcircled{2}$$

$$\lambda a_k \rightarrow \lambda a \quad \textcircled{3}$$

הוכחה: נניח

$$a_k = \alpha_k + a \quad \text{שם}$$

$$b_k = \beta_k + b$$

וזהו הסעיף הראשון של הוכחה

$$\alpha_k \rightarrow 0$$

$$\beta_k \rightarrow 0$$

הוכחה: נניח

$$a_{k_n} \rightarrow a \quad \text{דיון } \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a \quad \text{דיון } \underline{\underline{\text{Cauchy}}}$$

$$\left(|a_k - a| < \varepsilon \iff k > N \right) : N \text{ סופי } \varepsilon > 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a \quad \underline{\text{הפוך נכון}}$$

סופי k דיון k_n
 N

$$N_1 := \min \{ n : k_n > N \}$$

$$b_n := a_{k_n} \quad \text{דיון } b_n$$

דיון $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$, k_n

דיון $a_2, a_4, a_6, \dots$

$$k_1 = 2 \quad k_2 = 4, \dots, k_n = 2n, \dots$$

$$2, 4, 6, 8, \dots$$

$$|b_n - a| < \varepsilon \iff n > N_1 : N_1 \text{ סופי}$$

$$N = 843$$

$$|a_k - a| < \varepsilon \iff k > 843 \quad \varepsilon > 0 \quad \text{דיון}$$

$$|a_{k_n} - a| < \varepsilon \iff n > N_1 : N_1 \text{ סופי}$$

$$|a_{k_n} - a| < \varepsilon \iff n > 422 : \text{נכון} \quad \left| \begin{array}{l} N_1 := 422 = \min \{n : k_n > 843\} \\ n > 422 \qquad 2n > 843 \end{array} \right.$$

$$\left(|a_{k_n} - a| < \varepsilon \iff n > N_1 \right) : N_1 \text{ סוף} \quad \underline{\text{3}}$$

הנה b_n זה

$$b_n := a_{k_n}$$

הנה : נכון

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \quad \sqrt{3}$$

כל מה שזכרנו $\varepsilon > 0$

$$|b_n - a| < \varepsilon \quad \text{כמה כל } n \text{ מתקיים}$$

$$\left(|b_n - a| < \varepsilon \iff n > N_1 \right) : N_1 \text{ סוף}$$

הנה N_1 ?

$$|a_k - a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow k > N : N \text{ זקוק}$$

$$n \text{ ב } n \geq N : N_1 \text{ עדיין}$$

$$k_n \text{ זקוק } 2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 10 \dots$$

$$a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \dots$$

$$\text{זקוק } b_1 \quad b_2 \quad b_3$$

$$\text{זקוק-זקוק } a_2 \quad a_4 \quad a_6$$

$$N_1 := \min \{n : k_n > N\} \quad / \text{זקוק}$$

$$\text{זקוק } |a_{k_n} - a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow n > N_1 \quad \text{זקוק}$$

$$\text{זקוק } a_k \quad \Leftrightarrow \text{זקוק } a_k \quad ||$$

$$a_k = (-1)^k \quad \boxed{1}$$

$$a_{2n} = 1 \rightarrow 1$$

$$a_{2n+1} = -1 \rightarrow -1$$

$$\dots \rightarrow a_k \Leftarrow 1 \neq -1$$

$$a_1, a_3, a_5, a_7, \dots \rightarrow -1$$

$$a_2, a_4, a_6, \dots \rightarrow 1$$

$$b_k \rightarrow B \neq 0, \quad a_k \rightarrow A \quad \underline{\underline{\subset \mathbb{R} \cup \mathbb{N}}}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \frac{A}{B} \quad \text{'s/c'}$$

$$(\text{'2nd' '3rd' } \beta_k, \alpha_k) \quad b_k = b + \beta_k, \quad a_k = a + \alpha_k \quad \left(\underline{1 : \dots \dots \dots} \right)$$

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{a + \alpha_k}{b + \beta_k} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a + \alpha_k}{b + \beta_k} - \frac{a}{b} \right) = \frac{a}{b} + \frac{\alpha_k B - A \beta_k}{b(b + \beta_k)}$$

$$\frac{\alpha_k b - a \beta_k}{b(b + \beta_k)} \rightarrow 0 : \underline{\sqrt{3}} \quad (2)$$

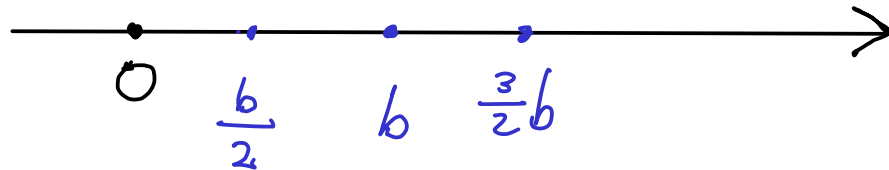
$$M := \max \left(\left| \frac{1}{b - \frac{|b|}{2}} \right|, \left| \frac{1}{b + \frac{|b|}{2}} \right| \right) \text{ and } \left| \frac{1}{b + \beta_k} \right| < M$$

: $\forall k \in \mathbb{N}$

: $\forall k \in \mathbb{N}$

$$b > 0 \text{ (a.o.)}$$

$$\varepsilon = \frac{b}{2}$$



$$k \in \mathbb{N} \text{ and } |b_k - b| < \frac{b}{2} \iff b_k \rightarrow b$$

$$k \in \mathbb{N} \text{ and } |\beta_k| < \frac{b}{2}$$

$$b - \frac{b}{2} < b + \beta_k < b + \frac{b}{2}$$

$$\iff -\frac{b}{2} < \beta_k < \frac{b}{2}$$

$$k \in \mathbb{N} \quad b + \beta_k > b - \frac{b}{2}, \quad \text{and}$$

$$\frac{1}{b + \beta_k} < \frac{1}{b - \frac{b}{2}} = \left| \frac{1}{b - \frac{|b|}{2}} \right| \quad \text{כאשר } b > 0, \text{ ו} \quad \beta_k < \frac{b}{2}$$

[illegible]

$$\frac{\alpha_k b + a \beta_k}{b + \beta_k} < \left| \frac{1}{b - \frac{|b|}{2}} \right| \cdot (\alpha_k b + a \beta_k) \longrightarrow 0$$

$$b < 0 \quad \left(b^0 \right)$$

$$b + \beta_k < b + \frac{|b|}{2} \Leftrightarrow b < 0 \quad \underline{\text{für } 275}$$

S.E.N

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3k^2 + 8k - 11}{2k^2 + 11} = \frac{3}{2}$$

: k^2
: k^2

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{8}{k} - \frac{11}{k^2}}{2 + \frac{11}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

?''02

$$\frac{p'(x)}{p(x)}$$

1

$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad a_k, b_k, c_k \quad \text{נני} (sandwich) \quad \underline{\underline{לענ}}$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad a_k \leq b_k \leq c_k \quad (1)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = b \quad (2)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$$

כל b_k נמצא, -!

הוכחה: תרגיל.

תזכורת:

$$a_k = a + \varepsilon_k \quad \Leftrightarrow \quad a_k \rightarrow a$$

$$\varepsilon_k \rightarrow 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2 + 1} = 0$$

$$a_k = 0$$

$$0 \leq \frac{1}{k^2 + 1} \leq \frac{1}{k}$$

$$c_k = \frac{1}{k}$$

? $\rightarrow$ $\frac{k^3+1}{k^3+4}$ $a_k = \frac{k^3+1}{k^3+4}$ $n/k \Rightarrow \boxed{3}$

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

$$a_{k+1} \diamond a_k$$

$$\frac{(k+1)^3 + 1}{(k+1)^3 + 4} \overset{>}{\diamond} \frac{k^3 + 1}{k^3 + 4}$$

$$(k^3 + 4)[(k+1)^3 + 1] \overset{>}{\diamond} (k^3 + 1)[(k+1)^3 + 4]$$

$$k^3 + 4 > 0$$

$$(k+1)^3 + 4 > 0$$

$$(k^3 + 4)(k+1)^3 + k^3 + 4 \overset{>}{\diamond} (k^3 + 1)(k+1)^3 + 4(k^3 + 1)$$

$$\cancel{(k^3 + 1)(k+1)^3} + 3(k+1)^3 + \cancel{k^3 + 4} > \cancel{(k^3 + 1)(k+1)^3} + 4k^3 + \cancel{4}$$

$$3(\cancel{k^3} + 3k^2 + 3k + 1) + \cancel{k^3} > \cancel{4k^3}$$

$$3(3k^2 + 3k + 1) > 0$$

∴ a_k is increasing $\therefore a_{k+1} > a_k \quad \forall n$

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2}, \quad a_1 = \sqrt{2} \quad ; \Rightarrow 2'0J \quad \sim 30 \quad \boxed{4}$$

$$\overset{a_{k+1}}{\left(\sqrt{a_k + 2}\right)^2} \overset{>}{\square} \overset{a_k}{\left(a_k\right)^2}$$

$$a_k > 0$$

$$a_k + 2 \overset{>}{\square} a_k^2$$

$$0 \overset{>}{\square} a_k^2 - a_k - 2$$

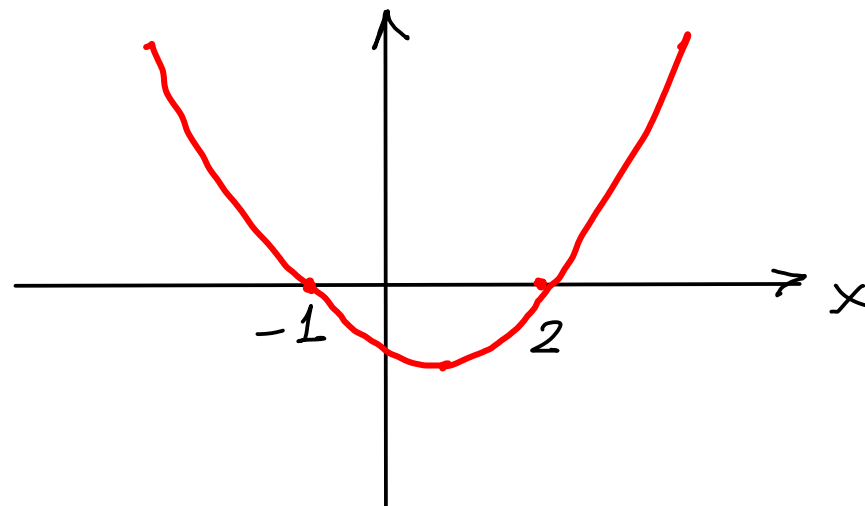
$$a^2 - a - 2 \quad \text{הפונקציה}$$

$$\Delta = 1 + 2 \cdot 4 > 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x > 2$$



$$\sqrt{a_k + 2} \diamond 2$$

$$a_{k+2} \diamond 4$$

$$a_k \diamond 2$$

?

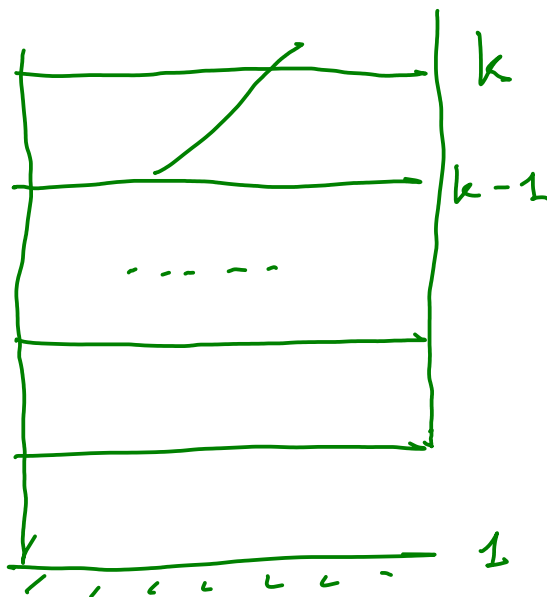
$$a_1 = \sqrt{2}$$

$$a_2 = \sqrt{\sqrt{2} + 2} < 2$$

$$a_3 = \sqrt{a_2 + 2}$$

$$\varepsilon = 10^{-10}$$

$$a_k = 1.99999 \dots 9$$



$$\Leftrightarrow a_k < 2$$

$$a_k \rightarrow 2 \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$\exists N$$

$$k > N \Rightarrow |a_k - 2| < \varepsilon$$

$$k \text{ } \vdash \text{ } a_k < 2 ; \text{ } \vdash \text{ } 3$$

$$k \text{ } \vdash \text{ } 3$$

$a_1 = \sqrt{2} < 2$ בס'ם העליון 3 י"ה:

$a_k < 2$ k מס' k $\int_3^\infty$ גבול צריך להיות:
 $a_{k+1} < 2$ $\int_3^\infty$

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2} < \sqrt{2 + 2} = 2$$

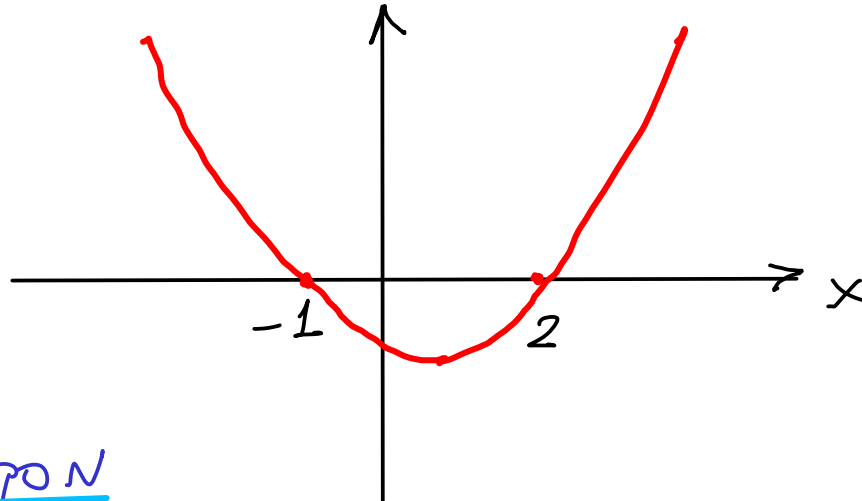
$$0 < a_k < 2, \text{ and } a_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$0 \triangleq a_k^2 - a_k - 2$$

$$a_k^2 - a_k - 2 < 0, \quad 0 < a_k < 2 \quad \text{if } \int \int_{\mathbb{R}^2} \dots$$

$$0 > a_k^2 - a_{k-2} \quad \int^S$$

$$a_{k+1} > a_k : \underline{\text{un } \forall n}$$



סיכום:
 a_k צורה וסוגה.

לשם כך נניח $a_1 = 1$ ונניח $a_n = n$.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{k+1} > a_k \\ a_k < M \end{array} \right.$$

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{k+1} > a_k \\ a_k < M \end{array} \right.$$

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{k+1} < a_k \\ a_k > M \end{array} \right.$$

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2}, \quad a_k = \sqrt{2} \quad [5]$$

2.718281828459045...

הערות

הערות 2,3. $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ הערות

$$(a+b)^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} a^{k-n} b^n = \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} a^{k-n} b^n =$$

$$= \sum_{n=0}^k \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} a^{k-n} b^n$$

$$\frac{k!}{(k-n)!} = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$$

$$a=1 \quad b=\frac{1}{k}$$

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \sum_{n=0}^k \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} \left(\frac{1}{k}\right)^n = \sum_{n=0}^k \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n! k^n} =$$

$$= \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{k}\right)$$

: 1, 2, 3, ...

$$a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \underbrace{1}_{n=0} + \underbrace{1}_{n=1} + \underbrace{\frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{k}\right)}_{n=2} + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{2}{k}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{2}{k}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{k}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{2}{k}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{k}\right)$$

$$2 < a_k < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k!} < \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$\Leftrightarrow k! > 2^{k-1}$$

$$\sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} < 2 \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 4 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) < 4$$

a_k is monoton

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot k}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2} \checkmark$$

$\Leftrightarrow$

a_k is strictly increasing

$$a_k = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{2}{k}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{k}\right)$$

||
^
^
^

$$a_{k+1} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \left(1 - \frac{2}{k+1}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(k+1)!} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k}{k+1}\right)$$

$$\therefore \text{Since } \frac{1}{(k+1)!} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k}{k+1}\right) > 0, a_{k+1} > a_k \quad \text{Q.E.D.}$$

$$\therefore \text{Since } a_k \text{ is increasing and bounded above by } 3, \text{ it converges to a limit } L.$$

L.E.N

$$2 < e < 3 \quad \text{לפי}$$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k =: e$$

הגדרות לסיכום

$$a_k > M \quad \text{כאשר } M \text{ נתון} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty \quad (1)$$

$$a_k < -M \quad \text{כאשר } M \text{ נתון} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = -\infty \quad (2)$$

מעקב כל סדרה עולה ובלתי חסומה מאחדת $-\infty$

. k for row $b_k \geq a_k$, $a_k \rightarrow \infty$ $b_k \rightarrow \infty$ S/L 1/c Coen

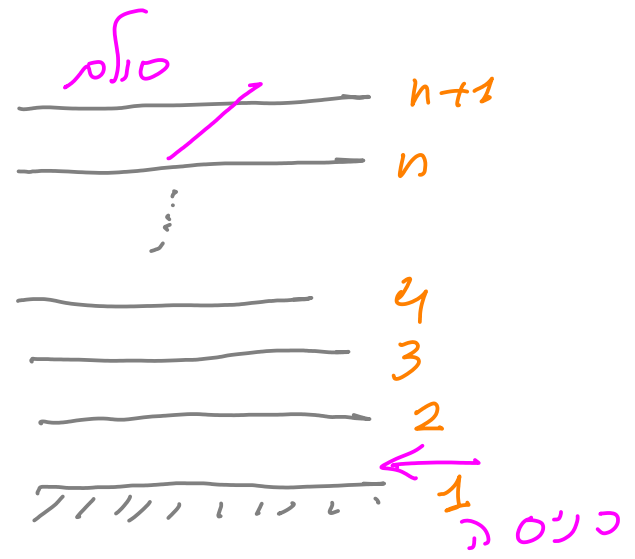
$\cdot k \in \mathbb{N} \quad b_k \leq a_k, a_k \rightarrow -\infty \quad \text{and} \quad \textcircled{2}$
 $b_k \rightarrow -\infty \quad \text{is/}$

הזכרה: תרגיל

ה"שן ת"שן ("

$|a_n| < M$ ה"שן $a_{n+1} = \sqrt{4a_n + 5}$ ה"שן $a_1 = 3$ 1

$a_n < M - \epsilon$ ה"שן $a_n \geq 0 \forall n$
 $a_n < 5$ ה"שן



$a_1 = 3 < 5$ $n = 1$ ה"שן

$a_n < 5$ ה"שן ה"שן $a_{n+1} < 5$

$$a_{n+1} = \sqrt{4a_n + 5} < \sqrt{4 \cdot 5 + 5} = \sqrt{25} = 5$$

.l.e.N

$$a_{n+1}^2 = 4a_n + 5$$

$$a_{n+1} = \sqrt{4a_n + 5}, \quad a_1 = 3 \quad \text{נניח} \quad \boxed{2}$$

חסומה וממוקנת $\Leftrightarrow$ מתכנסת

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{יפרש}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n + 5)$$

$$a^2 = 4a + 5$$

$$a^2 - 4a - 5 = 0$$

$$a_1 = -1 \quad a_2 = 5$$

לכן, צריך לבדוק קיומה של

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5 \quad \Leftarrow a_n > 0$$

$$\frac{1}{n} \sqrt{3n^2 + 4n + 9} = \sqrt{\frac{3n^2 + 4n + 9}{n^2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5 \quad \Rightarrow \underline{\text{result}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 + 4n + 9} - n}{n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3 + \frac{4}{n} + \frac{9}{n^2}} - 1}{1 + \frac{3}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3} - 1}{1} = \sqrt{3} - 1 \quad \boxed{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[^a]{3n^2 + 2n + 5} - \sqrt[^b]{n^2 - 6n - 4} \right) = \boxed{4}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2 + 2n + 5) - (n^2 - 6n - 4)}{\sqrt{3n^2 + 2n + 5} + \sqrt{n^2 - 6n - 4}} =$$

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 5 - n^2 + 6n + 4}{\sqrt{3n^2 + 2n + 5} + \sqrt{n^2 - 6n - 4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 8n + 9}{\sqrt{3n^2 + 2n + 5} + \sqrt{n^2 - 6n - 4}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 8 + \frac{9}{n}}{\sqrt{3 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{6}{n} - \frac{4}{n^2}}} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow \infty} \left[\frac{2h}{\sqrt{3 + \frac{2}{h} + \frac{5}{h^2}} + \sqrt{1 - \frac{6}{h} - \frac{4}{h^2}}} + \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{9}{h}}{\sqrt{3 + \frac{2}{h} + \frac{5}{h^2}} + \sqrt{1 - \frac{6}{h} - \frac{4}{h^2}}} \right]$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3} + 1}$$

$a \cdot \infty = \infty$
 $a = \frac{1}{\sqrt{3} + 1} > 0$

$\infty + b = \infty$

של המענה, נראה שהתשובה היא $-\infty$ (אם נכנס $h \rightarrow \infty$)

$$s/c, b_k \rightarrow \infty, a_k \rightarrow \infty$$

משפט נ"ת

$$\infty + \infty = \infty$$

$$a_k + b_k \rightarrow \infty \quad (1)$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$a_k \cdot b_k \rightarrow \infty \quad (2)$$

$$(\lambda > 0)$$

$$\lambda \cdot \infty = \infty$$

$$\lambda a_k \rightarrow \infty \quad \Leftarrow \lambda > 0 \quad (2)$$

$$(\lambda < 0)$$

$$\lambda \cdot \infty = -\infty$$

$$\lambda a_k \rightarrow -\infty \quad \Leftarrow \lambda < 0 \quad (3)$$

הוכחה: תרגיל

$$s/c, b_k \rightarrow -\infty, a_k \rightarrow \infty$$

משפט נ"ת

$$a_k \cdot b_k \rightarrow -\infty$$

הוכחה: תרגיל

$$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

's/c, $b_k \rightarrow b$, $a_k \rightarrow \infty$ נ"נ לענ

$$\infty + b = \infty$$

$$a_k + b_k \rightarrow \infty \quad (1)$$

($b > 0$)

$$\infty \cdot b = \infty$$

$$a_k \cdot b_k \rightarrow \infty \quad \Leftarrow b > 0 \quad (2)$$

($b < 0$)

$$\infty \cdot b = -\infty$$

$$a_k \cdot b_k \rightarrow -\infty \quad \Leftarrow b < 0 \quad (3)$$

$$\text{נ"נ} \quad \left\{ \begin{array}{l} \infty - \infty \\ \frac{\infty}{\infty} \\ 0 \cdot \infty \\ \frac{0}{0} \end{array} \right.$$

נ"נ

$$\infty - \infty = \infty \quad \text{נ"נ} \quad [4] \quad \text{לענ} \quad \text{נ"נ}$$

$$\infty - \infty = -\infty \quad \Leftarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 6n - 4} - \sqrt{3n^2 + 2n + 5}) = -\infty \quad \text{לענ}$$

$$a_n = 4n \rightarrow \infty$$

$$: \frac{\infty}{\infty} \cdot \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$b_n = 5n \rightarrow \infty$$

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{4}{5} \rightarrow \frac{4}{5}$$

$$\frac{b_n}{a_n} \rightarrow \frac{5}{4}$$

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{5}{4}$$

$$a_k = k^2, b_k = \frac{1}{k}$$

$$: \infty \cdot 0 \cdot \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$a_k \cdot b_k = k \rightarrow \infty$$

$$\infty \cdot 0 = \infty$$

$$a_k = k, b_k = \frac{1}{k}$$

$$a_k \cdot b_k = 1 \rightarrow 1$$

$$\infty \cdot 0 = 1$$

$$a_k = k, \quad b_k = \frac{1}{k^2} \quad a_k \cdot b_k = \frac{1}{k} \rightarrow 0 \quad \infty \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2 + 100n + 3}{2n^2 - n - 1} \stackrel{/:n^2}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3 + \frac{100}{n} + \frac{3}{n^2}}{2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

1

$\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3^k + 2^k}{3^k - 2^k} \stackrel{/:3^k}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^k}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k} = 1$$

$q > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q^k = \begin{cases} \infty, & q > 1 \\ 0, & q < 1 \end{cases}$$

2

$\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\overset{A}{\sqrt{k^3 + 1}} - \overset{B}{k^{3/2}} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cancel{k^3} + 1 - \cancel{k^3}}{\sqrt{k^3 + 1} + k^{3/2}} = 0$$

$\infty - \infty$

3

$$A - B = \frac{(A - B)(A + B)}{A + B} = \frac{A^2 - B^2}{A + B}$$

$$\left(k^{3/2} \right)^2 = k^{\frac{3}{2} \cdot 2} = k^3$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{k^2 + 4k + 9} - k}{\sqrt{k} + 3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cancel{k^2} + 4k + 9 - \cancel{k^2}}{(\sqrt{k} + 3)(\sqrt{k^2 + 4k + 9} + k)} =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4k + 9}{(\sqrt{k} + 3)(\sqrt{k^2 + 4k + 9} + k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k} + 3} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4k + 9 \quad | : k}{\sqrt{k^2 + 4k + 9} + k \quad | : k} =$$

הגורם הראשון שואף לאפס
והגורם השני שואף לאינסוף

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k \cdot b_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$$

$$= 0 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{9}{k}}{\sqrt{1 + \frac{4}{k}} + \frac{9}{k^2}} + 1 = 0 \cdot 2 = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1+2+4+\dots+2^{k-1}}{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k - 1}{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{2^k} - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^k} = 1 - 0 = 1 \quad \boxed{5}$$

$$\sum_{n=0}^k q^n = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{k-1} 2^n = \frac{1-2^k}{1-2} = 2^k - 1$$

$$a_k \rightarrow \infty$$

$$b_k \rightarrow \infty?$$

$$\frac{a_k}{b_k}$$

$$\forall k$$

$$b_k \neq 0$$

$$\frac{2^k - 1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k} \quad \forall k$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = ?$$

הוכחה

$$\begin{cases} a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2} \\ a_1 = \sqrt{2} \end{cases}$$

הוכחה נמשכת עד נוסחה הסופית:

נניח a_k קובץ (מ' 33) a_k קובץ

$$a_k \leq \begin{cases} a_{k+1} > a_k & \text{עולה} \\ a_k < 2 & \text{חסום מלמעלה} \end{cases}$$

$$(\forall k) \quad a_k > 0 \quad \text{נכון לכל } k$$

$$a_{k+1}^2 = a_k + 2$$

נניח a_k קובץ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1}^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} (a_k + 2)$$

לכן

$$\begin{aligned} a_k + b_k \\ a_k \cdot b_k \end{aligned}$$

הוכחה נמשכת עד נוסחה הסופית:

$$a^2 = a + 2$$

$$\frac{a^2 - a - 2}{a^2 - a - 2}$$

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1}^2, \quad \exists \lim_{k \rightarrow \infty} (a_k + 2)$$

לכן a

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a-2)(a+1) = 0$$

$$a=2$$

$$\text{p.e.}, (\forall k) \ a_k > 0 - \text{e.} \ \text{f.e.} \ \text{p.e.} \ \text{f.e.} \ \text{f.e.} - 1$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 2 \quad \underline{\text{f.e.} \ \text{f.e.} \ \text{f.e.}}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{k}$$

7

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k =: e$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{k}\right)^k =$$

8

הזכור את פונקציה

הזכור את זה

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$$
$$|f(x) - A| < \varepsilon \iff b < x < c$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1}{x-3} = -\frac{1}{3} \quad \boxed{3}$$

$$\left| \frac{3x+1}{x-3} + \frac{1}{3} \right| < \varepsilon \quad \varepsilon > 0$$

$$\frac{3(3x+1) + (x-3)}{3(x-3)} = \frac{9x + \cancel{3} + x - \cancel{3}}{3(x-3)} = \frac{10x}{3(x-3)}$$

$$\frac{10}{3} \left| \frac{x}{x-3} \right| < \varepsilon$$

$$0 < \frac{x}{x-3} = \left| \frac{x}{x-3} \right| \iff x < 0$$

$$10x > 3\varepsilon(x-3)$$

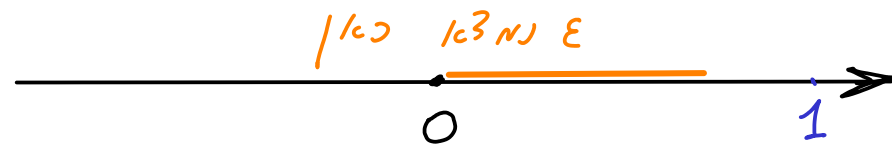
$\Uparrow$
 $x-3 < 0$

$$\begin{cases} \frac{10x}{x-3} < 3\varepsilon \\ x < 0 \end{cases} \quad \text{für } 0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$$

$$x > -\frac{9\varepsilon}{10-3\varepsilon}$$

$$(10-3\varepsilon)x > -9\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 10-3\varepsilon > 0 \Leftrightarrow 0 < \varepsilon < 1 \quad \text{נ"נ}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x+1}{x-3} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{9\varepsilon}{10-3\varepsilon} < x < 0 \quad \text{זוהי הנקודה}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x+1}{x-3} = -\frac{1}{3} \quad \text{זוהי הנקודה}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1}{x-3} = -\frac{1}{3} \quad \text{זוהי הנקודה}$$

$$-\frac{1}{3} - \varepsilon \leq x \leq -\frac{1}{3} + \varepsilon \quad \text{זוהי הנקודה}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ה'ק'ל'ה' ה'ק'ל'ה'

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A \iff x=a \rightarrow \text{ה'ק'ל'ה' } f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$$

$$f(a) = A$$

ה'ק'ל'ה' ה'ק'ל'ה'

$$\iff a=x \rightarrow \text{ה'ק'ל'ה' } f(x)$$

$\exists (b,c) \forall \epsilon > 0 \exists \delta$

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon \iff x \in (b,c)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x)$$

$$\iff x=a \rightarrow \text{ה'ק'ל'ה' } f(x)$$

ה'ק'ל'ה'

$$\lim f \iff f \lim$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = B, \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A \quad \text{נ"נ} \quad \underline{\underline{\text{למען}}}$$

$$\lim [f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x)$$

$$A+B \quad - \int \quad \text{נ"נ} \quad \text{למען} \quad \lim_{x \rightarrow a+} (f(x) + g(x)) \quad \text{1/2} \quad \text{'5/6}$$

$$AB \quad - \int \quad \text{נ"נ} \quad \text{למען} \quad \lim_{x \rightarrow a+} (f(x) \cdot g(x)) \quad \text{2}$$

$$\frac{A}{B} \quad - \int \quad \text{נ"נ} \quad B \neq 0 \quad \text{למען} \quad \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{2}$$

בכמה: תוצאות

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a+} [f(x) - g(x)] \quad \underline{\underline{\text{למען}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} [-g(x)] = - \lim_{x \rightarrow a+} g(x) \quad \text{1/2}$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} [\lambda f(x)] = \lambda \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \quad \text{2} \quad \text{1/2}$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) + \lim_{x \rightarrow a+} [-g(x)] = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a+} g(x) \quad \text{1/2} \quad \text{2}$$

$$\left(|f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow x > M \right) : M \quad \text{such that } \varepsilon > 0 \quad \forall \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

$$\left(|f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow x < M \right) : M \quad \text{such that } \varepsilon > 0 \quad \forall \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

1

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon > 0 \quad \text{such that}$$

we have that $\sin(x)$ is bounded

and $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

2

$$|f(x)| < M \iff b < x < c : M > 0 \text{ ס"ק סל } (b, c) \quad \forall (j) \text{ מיון } f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

$$(b, c) \ni a$$

$\cdot a - \supset \text{מיון } g(x) \quad , \quad X = a - \supset f(x) \text{ מיון } \underline{\underline{\mathcal{C}eN}}$
 $\cdot X = a - \supset \text{מיון } g(x) f(x) \quad \text{סל}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$(b, \infty)$$

$\cdot \infty - \supset \text{מיון } g(x) \quad , \quad X = \infty - \supset f(x) \text{ מיון } \underline{\underline{\mathcal{C}eN}}$
 $\cdot X = \infty - \supset \text{מיון } g(x) f(x) \quad \text{סל}$

: $\forall N$ קיים $f(x), g(x), h(x)$ נ"ח (פונקציות) לכל N

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$$\Leftrightarrow a < x < b : (a, b) \quad \forall \epsilon > 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} h(x) = B \quad (2)$$

$$B = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) \quad \text{כאשר } \int \text{גורם}$$

הוכחה: תרגיל

$$A - B = \frac{A^2 - B^2}{A + B}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 + 1 - 1}{x(\sqrt{x^2+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + 1} = 0$$

1

$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} \bigg|_{x=0} = 0 \quad \text{L'Hôpital, } x=0 \quad , \quad x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = \left\| \begin{array}{l} t := -x \\ t \rightarrow \infty \end{array} \right\| = \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 + 1} - t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\cancel{t^2 + 1} - \cancel{t^2}}{\sqrt{t^2 + 1} + t} =$$

2

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+1} + t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}+t} = 0$$

प्रमाण करने है

$\Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \frac{1}{\sqrt{t^2+1}+t} < \frac{1}{t} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} = 0 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) = 0$$

प्रमाण

פונקציות מאלמנטריות

פונקציה קבועה

$$(\lambda \in \mathbb{R})$$

$$D_f = \{x > 0\}$$

פונקציות מאלמנטריות בסיסיות:

$$f(x) \equiv \lambda \quad (1)$$

$$f(x) = x^\lambda \quad (2)$$

$$f(x) = e^x \quad (3)$$

$$f(x) = \cos x \quad (4)$$

$$f(x) = \sin x \quad (5)$$

$$f(x) = \ln x \quad (6)$$

$$f(x) = \arccos(x) \quad (7)$$

$$f(x) = \arcsin(x) \quad (8)$$

$$f(x) = \text{def}_g(x) \quad (9)$$

היררכיה
+, -, ×, ÷, ° פונקציות בסיסיות + 5 בעלות משקל פונקציות:

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

בן זלמן

$$x^2 + e^x$$

$tg \times$

1

$$\sin(e^x)$$

$$e^{\sin x}$$

x^x

a^x

$p(x), q(x)$ $\frac{p(x)}{q(x)}$ $\frac{p(x)}{q(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\therefore x=a \quad \text{is a root of } f(x)$$

Def $\mathcal{D}_f$: כל פונקציה $f(x)$ נקראת פונקציה $\mathcal{D}_f$ כ- $\mathcal{D}_f$

יפנים $\int$ תחום ההזדה $\mathcal{D}_f$ ביוז $f(x)$

גורמים $\cos(x)$, $\sin(x)$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

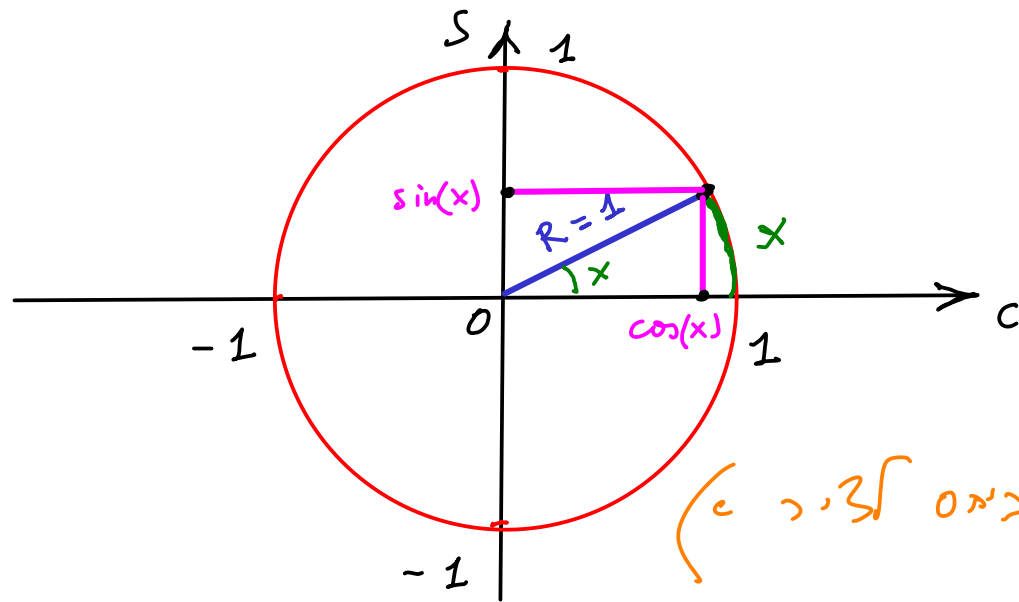
$|f(x)| \leq 1$: נוסחה

$k \in \mathbb{Z}$ לכל $f(x + 2\pi k) = f(x) \iff f(x + 2\pi) = f(x)$: נוסחה

נניח $f(x)$ בתחום $\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$ $\begin{matrix} \nearrow 2/5 & \cos(x) \\ \nearrow 2/5 - 1/2 & \sin(x) \end{matrix}$

כל $[0, \infty)$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$



$x = \text{השאלה של הקשר}$

$360^\circ = \text{המחזור השלם}$
 $2\pi =$

$360^\circ \leftrightarrow 2\pi$ לכן

$180^\circ \leftrightarrow \pi$

בריאנים

x בבנון שזי כיוון השעון (ביחס לציר c)
 $x > 0 \Leftarrow$

e^x הפונקציה

$$e^x := \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k =: e$$

תכונות בסיסיות

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2} \quad (1) \quad \underline{\text{Cohen}}$$

$$e^0 = 1 \quad (2)$$

$$e^{-1} = \frac{1}{e} \quad (3)$$

$$e^{-1}e = 1 \Leftrightarrow e^{-1}e = e^{-1+1} = e^0 = 1$$

(1) (2)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 1^k = 1$$

תחום

$$D_f = \mathbb{R} \quad \underline{\text{Cohen}}$$

$$e^x \geq 1 \Leftrightarrow \forall k \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k > 1$$

$$(h > 0)$$

$$e^{x+h} = e^x \cdot e^h \geq e^x$$

$e^{x+h} > e^x \Leftrightarrow e^h > 1$ נדרש

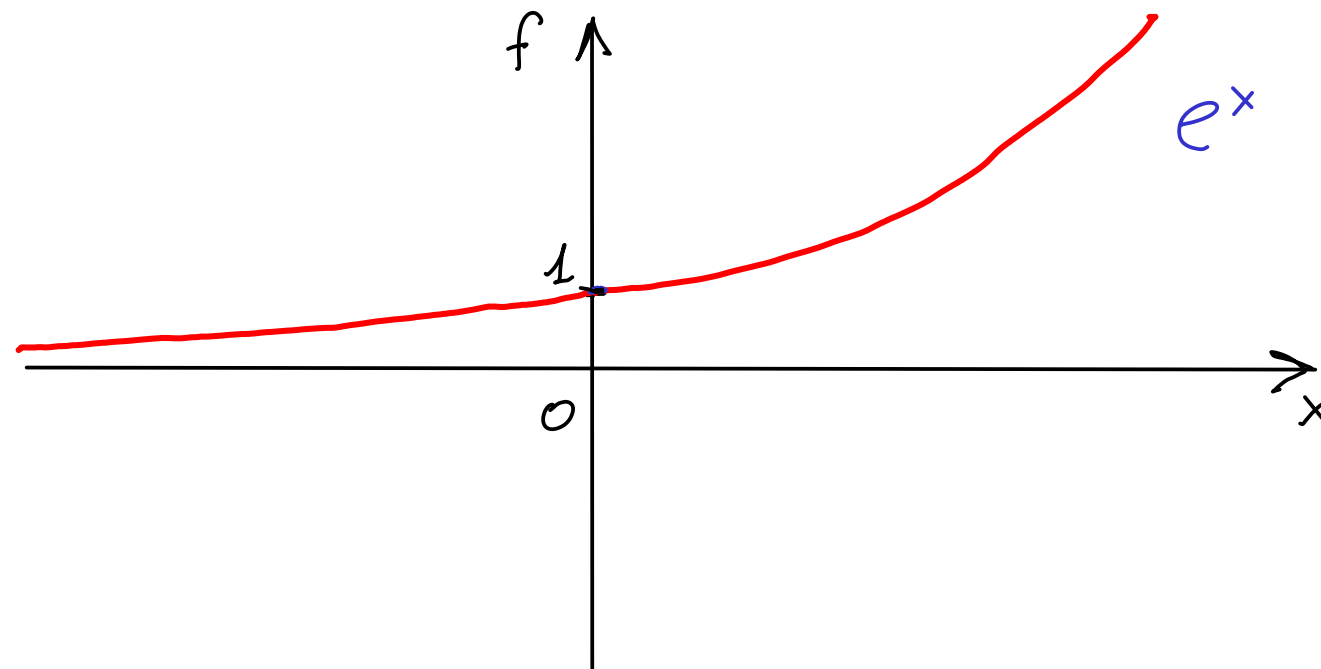
$$e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

לכן

$$x > 0 \quad e^x > 0$$

לכן $f(x)$ עולה מונוטונית

עובדות: e^x תמיד חיובית



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

הפונקציות $ch(x)$, $sh(x)$

חז' 10

סינוס הרבואי
קוסנוס הרבואי

$\sinh(x)$ $sh(x)$
 $\cosh(x)$ $ch(x)$

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ח' 215

פונקציות אנטכיות

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ח' 215

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -sh(x)$$

$$ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = ch(x)$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Coen

1.1.17

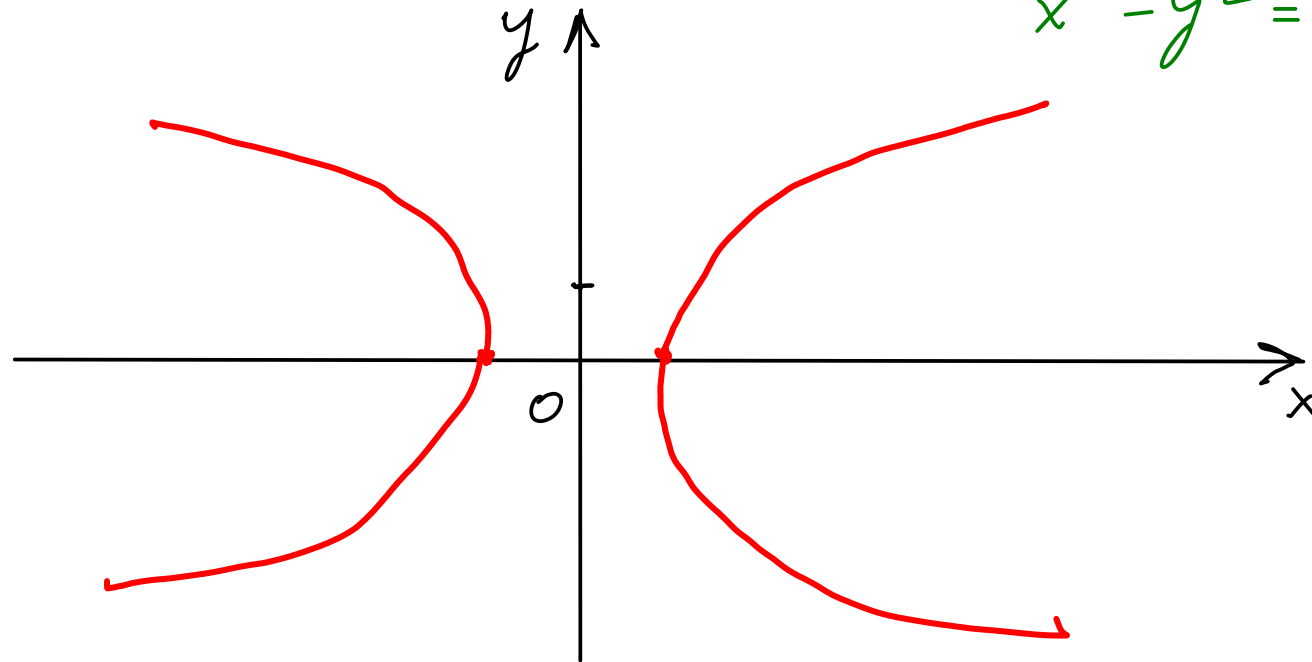
$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \left[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 \right] = \frac{1}{4} \left[(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2 - \cancel{e^{-2x}} \right) = \frac{4}{4} = 1$$

.f.e.v

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$$



$$x^2 - y^2 = 1$$

ה'יפربول'

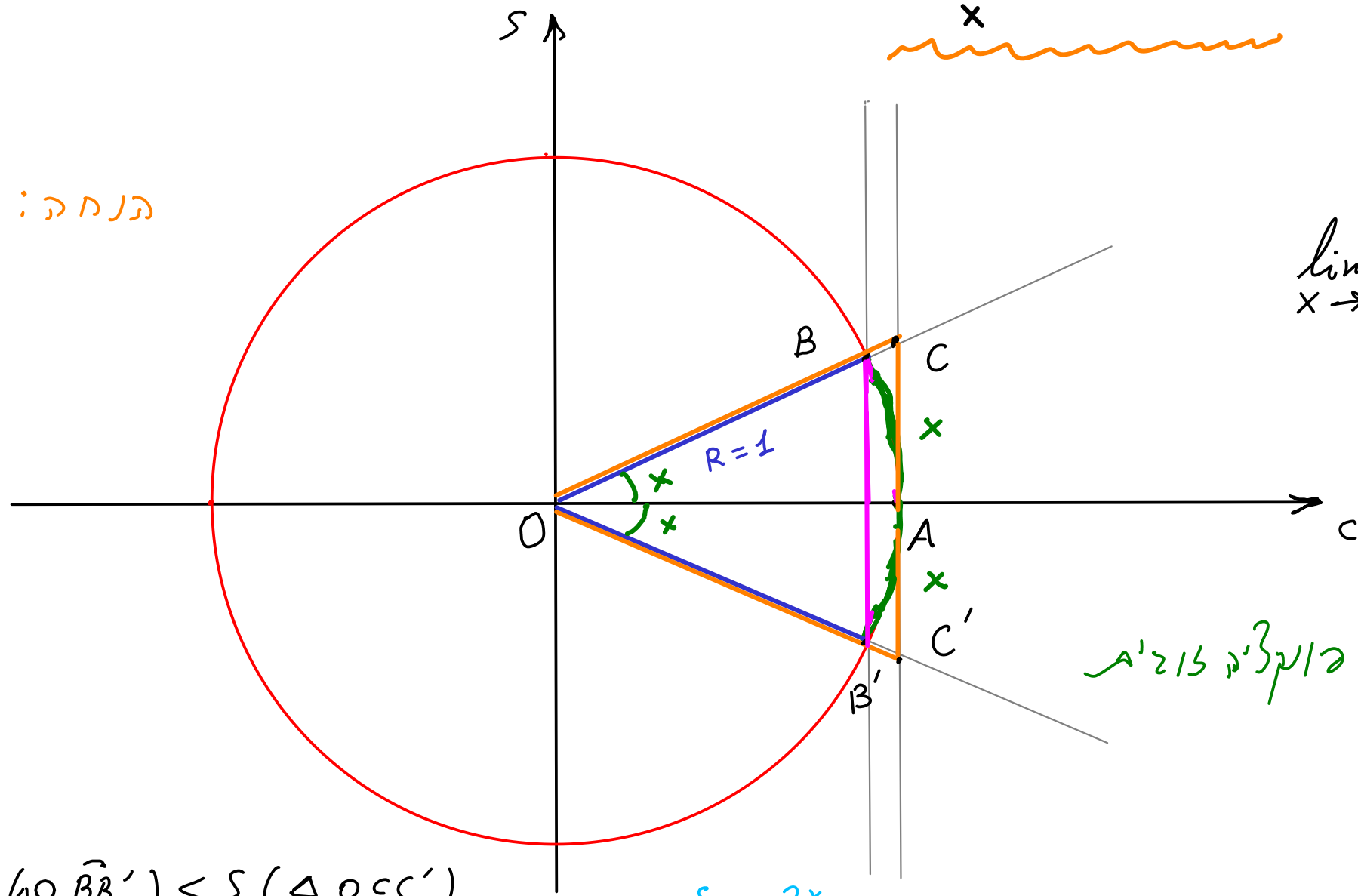
$$\frac{\sin(x)}{x} \text{ ל } 1 > 2\pi$$

$$\frac{0}{0} \text{ אינדיסטינציה}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = ?$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$: הנחה

$x = \widehat{AOB}$



$$S(\triangle OBB') < S(\text{sector } AOB) < S(\triangle OCC')$$

$$\frac{s}{x} = \frac{2x}{2x}$$

$$S(\triangle OBB') = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$S(\text{sector } AOB) = x$$

$$\pi R^2$$

$$\frac{\sin x}{x}$$

אינדיסטינציה

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x}$$

$$S(\Delta OCC') = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot CC' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot AC = AC = \tan(x)$$

$$\frac{AC}{OA} = \tan(x)$$

$$\sin x \cdot \cos x < x < \tan(x) \quad | : \sin x$$

$\sin(x) > 0$
 x איז פארשידן פון 0

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos(0) = 1$$

$\Leftarrow x$ איז נעגאטיוו $\Leftarrow$ נאכדעם $\cos(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(0)} = 1$$

$\Leftarrow x=0$ איז נאך $\frac{1}{\cos(x)}$ $\Leftarrow \neq 0$ $\therefore \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ איז א טעגל $\cos(x)$

, פאר אלע x

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ק.ד.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

הקצ'ה 2

$\mathbb{R}$ על $\mathbb{R}$ ~~ה~~ $f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

הקצ'ה $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$$

$$\frac{0}{0} \text{ "0/0"-k}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{1 - \cos(5x)} \quad \textcircled{=}$$

3

$$1 - \cos(\alpha) =$$

$$\cos(\alpha) = \cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\cos(\alpha) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\textcircled{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)} \quad \textcircled{=}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\frac{3x}{2}} = \left| \left\{ \begin{array}{l} t := \frac{3x}{2} \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right\} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

(1)

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\frac{3}{2}x} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\frac{3}{2}x} \right)^2 = 1^2 = 1$

(2)

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g\left(\lim_{x \rightarrow 0} x\right)$

$g(x) = x^2$

$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)}{\frac{3}{2}x} \right)^2 \cdot \left(\frac{\frac{5}{2}x}{\sin\left(\frac{5}{2}x\right)} \right)^2 \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}x\right)^2}{\left(\frac{5}{2}x\right)^2} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)}{\frac{3}{2}x} \right)^2 \cdot \left(\frac{\frac{5}{2}x}{\sin\left(\frac{5}{2}x\right)} \right)^2 \cdot \left(\frac{\frac{3}{2}x}{\frac{5}{2}x} \right)^2 \right] =$$

$$= \left(\frac{3}{5} \right)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)}{\frac{3}{2}x} \right)^2 \cdot \left(\frac{\frac{5}{2}x}{\sin\left(\frac{5}{2}x\right)} \right)^2 \right] \overset{\frac{3}{5}}{=} \left(\frac{3}{5} \right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(3x)} =$$

4

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(5x)}{5x} \cdot \frac{3x}{\sin(3x)} \cdot \frac{5x}{3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(5x)}{5x} \cdot \frac{3x}{\sin(3x)} \cdot \frac{5}{3} \right) =$$

$$= \frac{5}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin(3x)} = \frac{5}{3} \cdot 1 \cdot 1^{-1} = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{!0317 153rd}$$

5

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\lambda}{x}\right)^x = e^\lambda$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$$

$$t = \frac{1}{x}$$

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow 0+$$

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0+} (1+t)^{\frac{1}{t}}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0-} (1+t)^{\frac{1}{t}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\lambda}{x}\right)^x = e^\lambda$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} (1+t)^{\frac{1}{t}} = \left\{ \begin{array}{l} x := -\frac{1}{t} \\ x \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x} =$$

$$-\frac{1}{t} > 0 \Leftrightarrow t < 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \right]^{-1} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \right]^{-1} = (e^{-1})^{-1} = e$$

$$x \neq 0 \Rightarrow \text{def } g(x) = x^{-1} \quad \text{def } f(x) = x$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e \quad \underline{\text{def } e}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1+4}{2x-1} \right)^{3x+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^{3x+4} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{2x-1} \right)^{3x+4} =
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{2x-1} \right)^{\frac{2x-1}{4} \cdot \frac{4}{2x-1} \cdot 3x+4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{2x-1} \right)^{\frac{2x-1}{4}} \right]^{\frac{12x+16}{2x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} [f(x)]^{g(x)} = ?$$

המקום למטה a זה z וזה s ,
אפשר למצוא a

$$\lim_{x \rightarrow a+} \ln([f(x)]^{g(x)}) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow a+} [f(x)]^{g(x)}\right)$$

לא סתם מה !!!?

$(0, \infty)$ ביטל שהבואצ'ג $\ln x$ רצ'ג $\rightarrow$

$$a > 0$$

הפונקציה $\ln x$

$$e^x = \int_{-\infty}^x \ln(x) dx$$

אם $f(x) = y$ אז $y \in V$ ז'ר' $\exists$ $x \in D$ $f(x) = y$

$f(x)$: $x \in D$
 $\exists$ $y \in V$

$$g[f(x)] = x$$

$$f[g(y)] = y$$

f $\text{Im } f = V$: f התחלה $y \in V$ $\exists x \in D$ $f(x) = y$

$$\{y \mid \exists x \in D : f(x) = y\}$$

$$D \xrightarrow{f} V \quad V \xrightarrow{g} D$$

$$y = f(x)$$

$x \in D$ $y \in V$

e^x : למד ביהמ"ד
 חורג (חלוקה)
 (וויז'יה), לכן
 $e^x = y$ למשל

ע' פתרון י"ט
 $\ln y \Leftarrow$

$$y = e^x$$

$$x = \ln y$$

$$f(x) = e^x$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

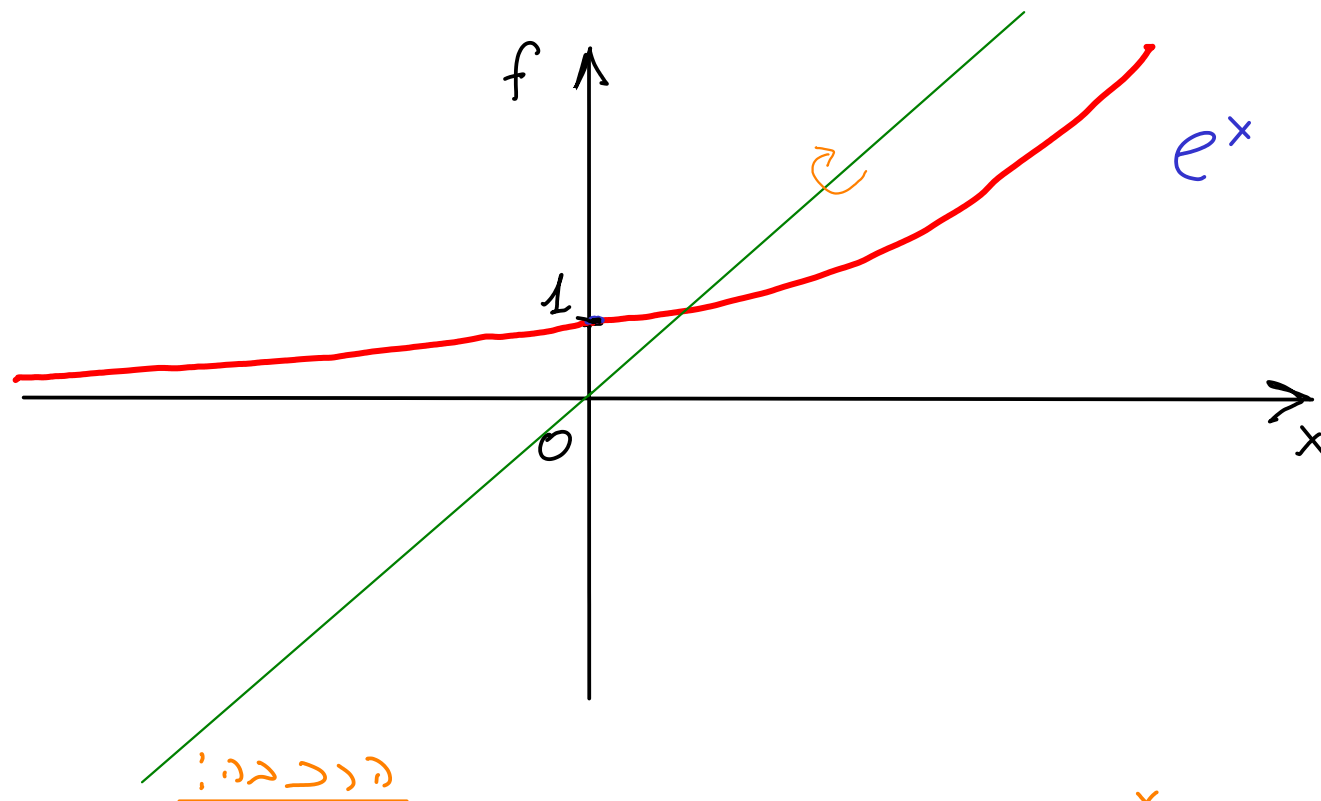
$$I_m f = \mathbb{R}_{>0} = \{y > 0\}$$

$\Downarrow$

$$g: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) := \ln(x)$$

$$D_g = \mathbb{R}_{>0}$$



הנגזרת

$$e^{\ln x} = x \quad \forall x > 0$$

$$\ln(e^x) = x \quad \forall x$$

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$$

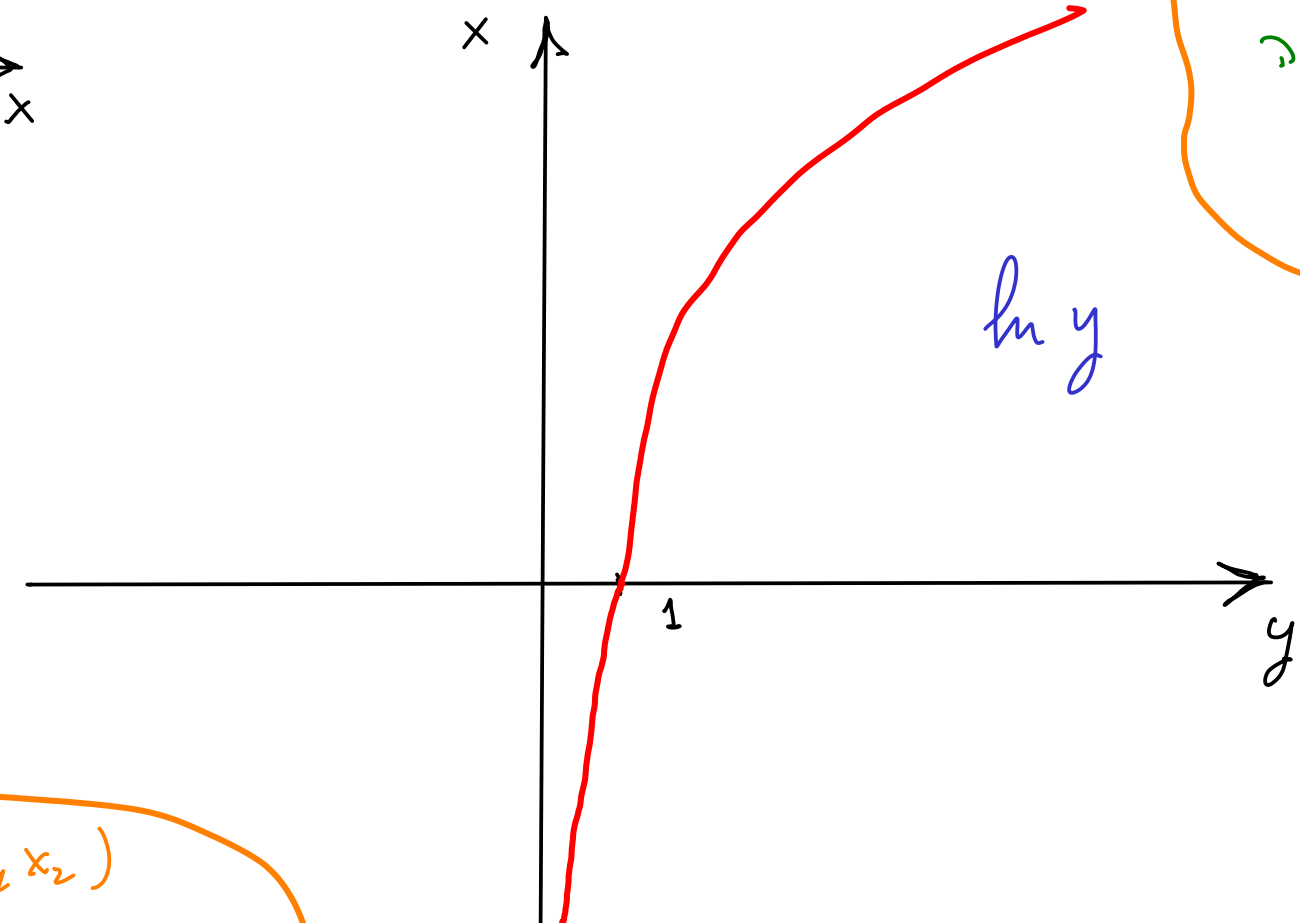


$$\ln x_1 + \ln x_2 = \ln(x_1 x_2)$$

$$\ln 1 = 0$$

$$D_{\ln} = \mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$$

הפונקציה $\ln y$
היא הפונקציה ההפוכה



$\ln y$

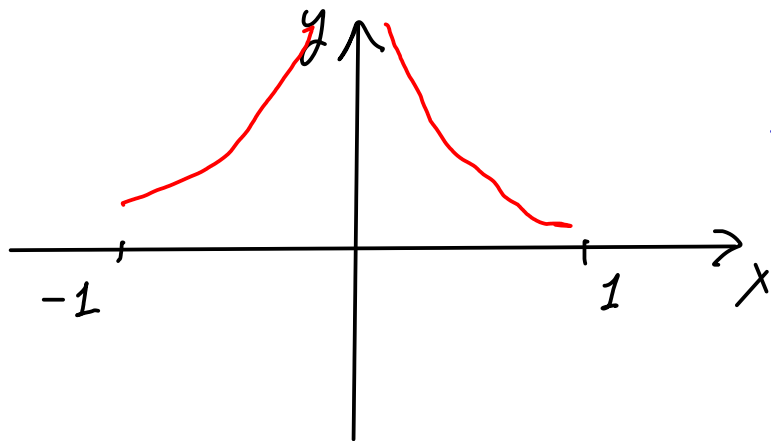
$$[a, b]$$
$$M' \otimes N \quad \text{ק' } x_2$$

$$a \leq x \leq b \quad \text{ist} \quad f(x_2) \leq f(x) \quad (1c)$$

$$a \leq x \leq b \quad \text{و} \quad f(x_2) \geq f(x) \quad (2)$$

היחס $\frac{1}{2}$ של $\frac{1}{2}$ בקלר 120 י' קצוץ קצוץ.
של תנאים האלו תשובה:

$\gamma_{\mathcal{P}^2} \circ \mathcal{N}' \mathcal{N} \mid_{\mathcal{K}} f \cdot \mathcal{S}$



7120 11%

$(0, 1]$

$\gamma \subset \mathbb{R}^2 \quad f(x) = x$

1

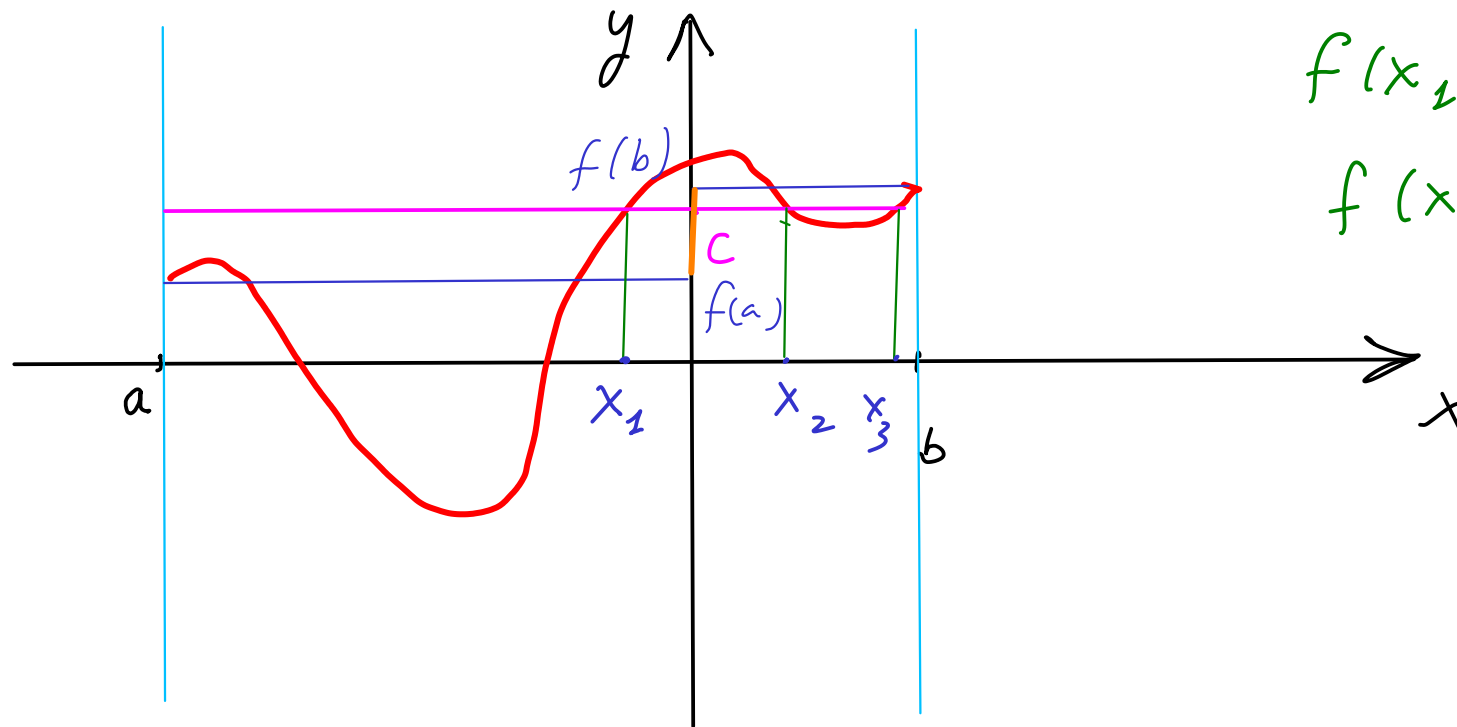
$f'(x) \neq 0$ ב $x=0$.

$$[-1, 1]$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

2

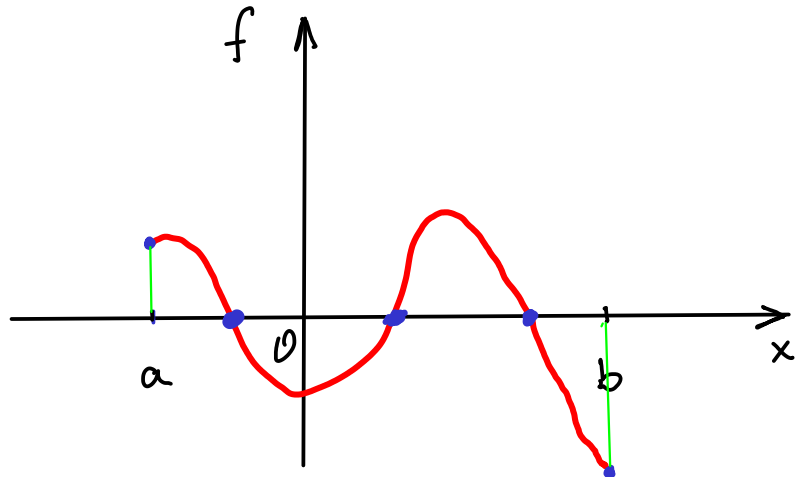
5-f k'j N'010



$$f(x_1) = C$$

$$f(x_2) = C$$

$$f(x_3) = C$$



"על א ס' צמח ונחל
 . Cauchy צען

. f.e.v

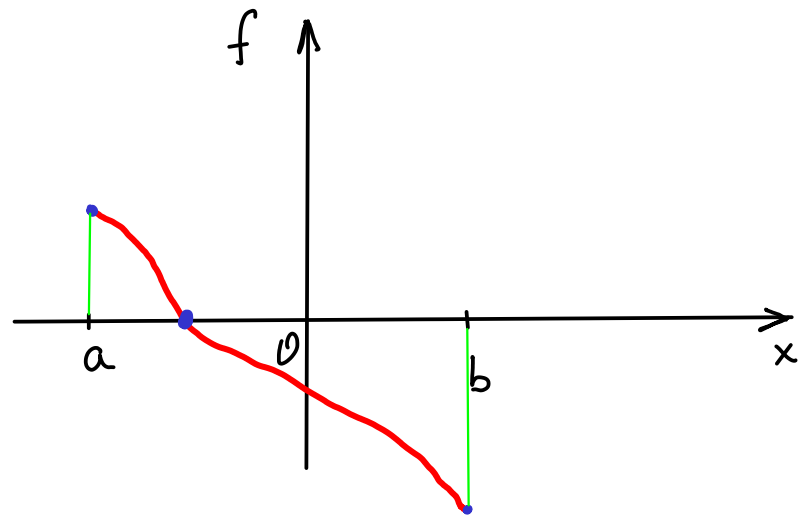
צען נ"ח ① $[a, b]$ - $\exists f(x)$

② $f(a) \cdot f(b) < 0$

ש"ל $f(x) = 0$ יש ב' יו"ן.

הוכח ה: נ"ח $f(a) > 0 \Leftrightarrow f(b) < 0 \Leftrightarrow f(b) < 0 < f(a)$

חשוב לזכור: מהי הפתרון למשוואה $f(x) = y$ יח' 3?



משפט 1 נניח $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$

2 $f(x)$ מונוטונית $\wedge$ (עממ) $[a, b]$

3 $f(a) \cdot f(b) < 0$

אז' למשל/ה $f(x) = 0$ יש פתרון יחיד.

נניח אמת בוגרים משוואה $f(x) = c$.

במקום זה, ניתן לפתור את המשוואה $g(x) = 0$ על ידי $g(x) := f(x) - c$

הסבר: 1 $g(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$

2 $g(x)$ מונוטונית.

3 נניח $f(a) < c < f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(b)$ $g(a) = f(a) - c < 0 < f(b) - c = g(b) \Leftarrow$

לכן, לפי משפט הביניים, $g(x)$ מקיימת גשט"ה משפט.

הוכחה: (1) $f'(x) = 0$ - נגזרת שווה לאפס - $f(x)$ קבוע (1, 3).

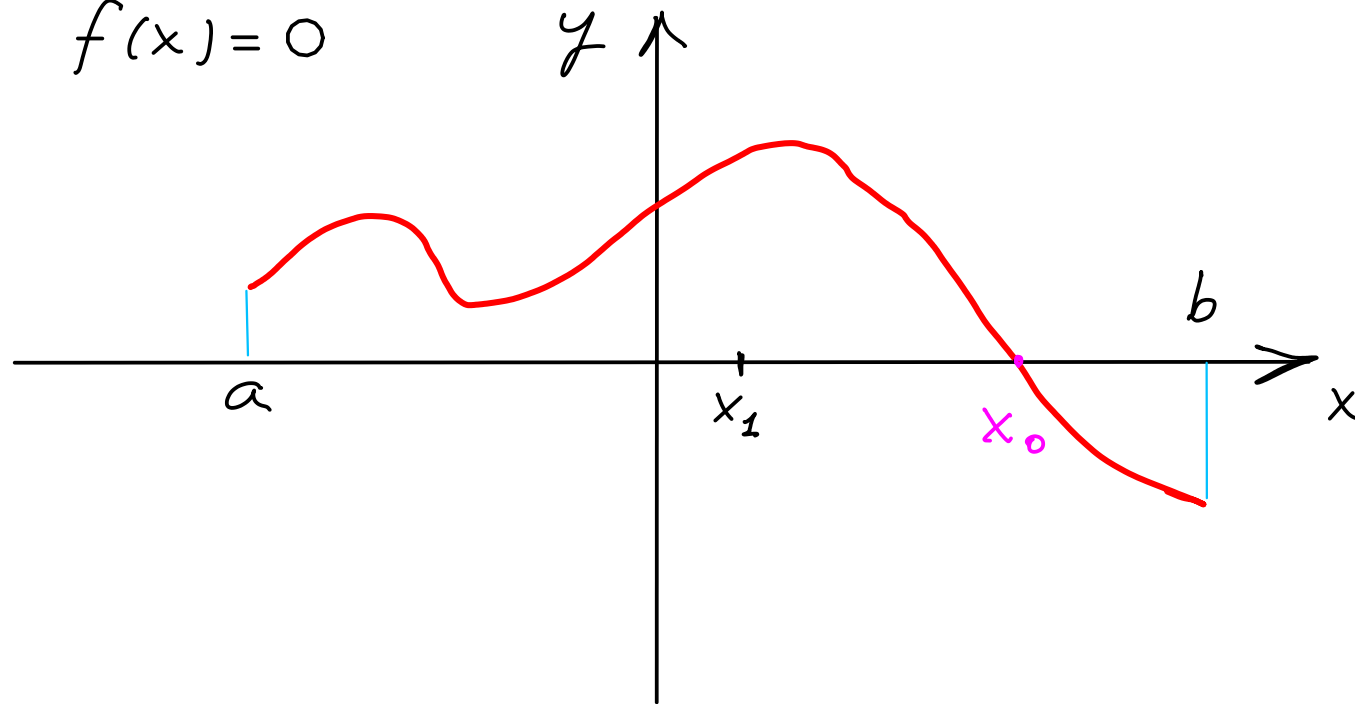
(2) נ'א' 1/3: $\exists x_1, x_2$ כ'ן $x_1 < x_2$ כ'ן $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$.
 $f(x)$ קבוע 0, $f(x_1) = f(x_2)$ - נ'א' 1/3.

ד.פ.נ

יפח'ס כסכיון נפולאוס לא א'נ'א/ר'וא

K. Weierstrass $\int$ $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ $\mathbb{C}$

$[a, b]$ $\forall \epsilon > 0$ $f(x) = 0$



$f(x)$ $\int$ $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ $\mathbb{C}$

$[a, b]$ $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ $f(x)$

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

$$f(a) > 0$$

ז'ז'

$$f(b) < 0$$

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

$[a, x_1], [x_1, b]$

ס'פ'ס ס'פ'ס $[a, b]$ $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ $\int$

$[x_1, b]$ $\mathbb{R}$ $\leq$ $f(x_1) > 0$ 2 $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ $\mathbb{C}$

$[a, x_1]$ $\mathbb{R}$ $\leq$ $f(x_2) < 0$

תרגיל 1. לממש את הסוגרים בשפה ++C, Python, C, Matlab, C# ... (עבור $f(x)$ מונוטונית
→ $[a, b]$)

תרגיל 2 כמה צרכים צניק אגדד כדי להגיע לכמה הצינור? ε ?

מיון קוצות ו-רציבות

$$(0) \quad x=a \text{ מ' } \text{רציבות} \quad \underline{\text{סדרה}}: \quad \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$(1) \quad x=a \text{ מ' } \text{רציבות} \quad \underline{\text{זמן}}: \quad \exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \quad \text{ול' } f \text{ ש' } f(a) \text{ (נכונות)}$$

$$(2) \quad x=a \text{ מ' } \text{רציבות} \quad \underline{\text{זמן}}: \quad \text{כל } \epsilon > 0 \text{ קיים } \delta > 0 \text{ כ' } |f(x) - f(a)| < \epsilon \text{ ל' } |x - a| < \delta$$

$$\text{ל' } \exists \lim_{x \rightarrow a+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty$$

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad a=0 \quad \quad f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad a=0$$

? $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x)$: A $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$ י/מ 1

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{|x|} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = -1$$

$$|x| = -x \quad \Leftrightarrow x < 0$$

$$1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$|x| = x \quad \Leftrightarrow x > 0$$

אכן $\nexists A$ כך ש- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$ $a=0$ י/מ

" $x=0 \rightarrow f(x)$ אינו קבוע"

$$A=? \quad f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases} \quad \text{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0 \text{ כ-} x \rightarrow 0$$

$x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
 פונקציה
 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R}$ פונקציה, $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$A=0$ נכונה, לכל $\epsilon > 0$

$x=0$
 $\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}} = 0$

נכונה, e^x פונקציה
 $\mathbb{R}$

$f(x) = g \circ h(x) = g[h(x)]$
 $g(x) = e^x$
 $h(x) = -\frac{1}{x^2}$

$\lim_{x \rightarrow a} g[h(x)] = g[\lim_{x \rightarrow a} h(x)]$

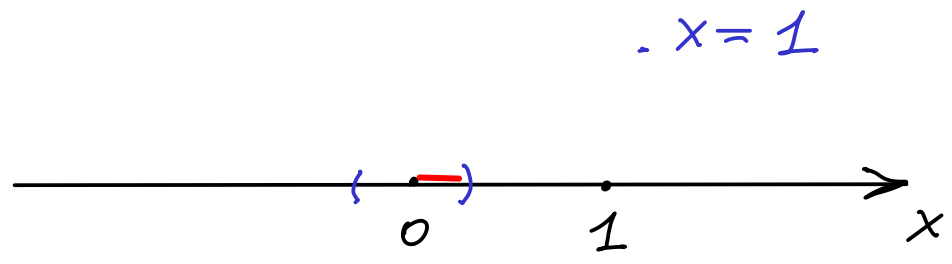
$\Leftarrow$ נכונה, g

? - 10'37-1/2 'p

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$$

$$\mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow 10'37 \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} \quad (\equiv)$$



10'37 10'37

$$\underline{x = 0} \quad (1)$$

$$\frac{x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 0+$$

$$1-x > 0, \quad (0, \frac{1}{2}) \quad \text{10'37} \quad \text{10'37}$$

$$e^{\frac{x}{1-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 1^+$$

(-0, 0.5) 10'37

$$e^{\frac{1}{1-x}} > 1$$

11

$$1 - e^{\frac{x}{1-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 0-$$

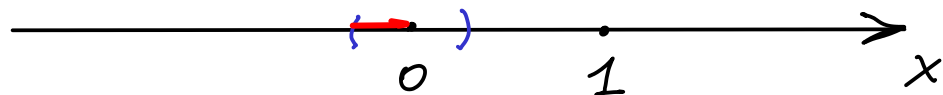
$$(\equiv) -\infty$$

$\rightarrow 10'37 - 10'37 \quad \text{10'37} \quad x = 0$

$10'37 \quad 10'37$

$$\underline{x \rightarrow 0^- \quad \neg e/o}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} \quad (\equiv)$$



$$\frac{x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0^-$$

$$1-x > 0, \quad (-\frac{1}{2}, 0) \quad \neg \zeta \eta \quad \text{für } \exists \exists_N$$

$$(\equiv) \infty$$

$$e^{\frac{x}{1-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 1^-$$

$$(-0.5, 0) \quad \neg \zeta \eta \quad \text{für } \exists \exists_N$$

$$e^{\frac{1}{1-x}} < 1$$



$$1 - e^{\frac{x}{1-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 0$$

(0.5, 1.0)

$x=1$ (2)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x} = \infty$$

$$1-x > 0$$

$$x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 1$$

(1, 2)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1-x} = -\infty$$

$$1-x < 0$$

$$x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{x}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x}} = \infty$$

però ora e

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{x}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1-x}} = 0$$

è 210N → 10'3 7-16 → 317 x=1 in 70N

תנאי: $f(x) \in C^1$ ו- $f(0) = f(1) = 0$

$$x=0 \quad \text{ז"ל}$$

$$x=1 \quad \text{ז"ל}$$

$$a, b = ?$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x < 2 \\ ax + b & x \in [2, 3) \\ x^2 + 2 & x \geq 3 \end{cases} \quad \boxed{4}$$

$$x=3, x=2 \quad - \rightarrow 17/27 \rightarrow 13/27$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = x^3 \Big|_{x=2} = 2^3 = 8$$

$$\Rightarrow 2a + b = 8$$

$$\underline{x=2} \quad (1)$$

17/27, 13/27
x=2 →

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (ax + b) = ax + b \Big|_{x=2} = 2a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (ax + b) = ax + b \Big|_{x=3} = 3a + b$$

$$\underline{x=3} \quad (2)$$

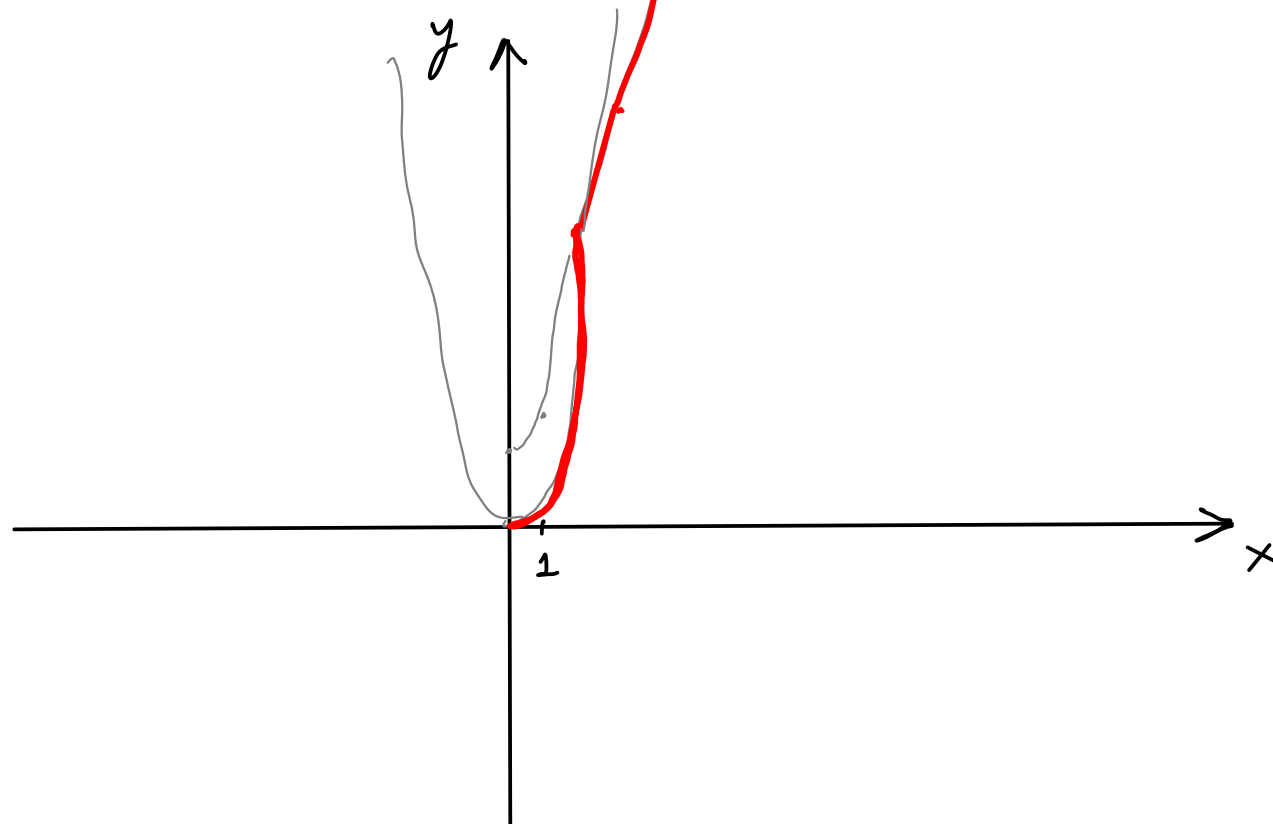
17/27, 13/27
x=3 →

$$\Rightarrow 3a + b = 11$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2) = x^2 + 2 \Big|_{x=3} = 9 + 2 = 11$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \\ 3x + 2 \\ x^2 + 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &< 2 \\ x &\in [2, 3) \\ x &\geq 3 \end{aligned}$$



$$b=2, a=3 \quad | \circ \int$$

$$a=3, b=2 \quad | \circ \int$$

לפי תוצאות

לפי תוצאות של Cauchy:

① $f(x)$ רציפה

ב- $[a, b]$

② c בין $f(a), f(b)$

$f(x_0) = c$: $\exists x_0$

① $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ וזו לפי

② $f(x)$ מונוטונית ורציפה בקטע $[a, b]$

③ c בין $f(a), f(b)$

עבור $f(x) = c$ יש פתרון יחיד.

נסתכל על הפונקציה $f(x)$ בקטע $[a, b]$.

$y = f(x)$
 $x = f^{-1}(y)$
 פונקציה הפוכה.

הפונקציה $\arcsin(x)$

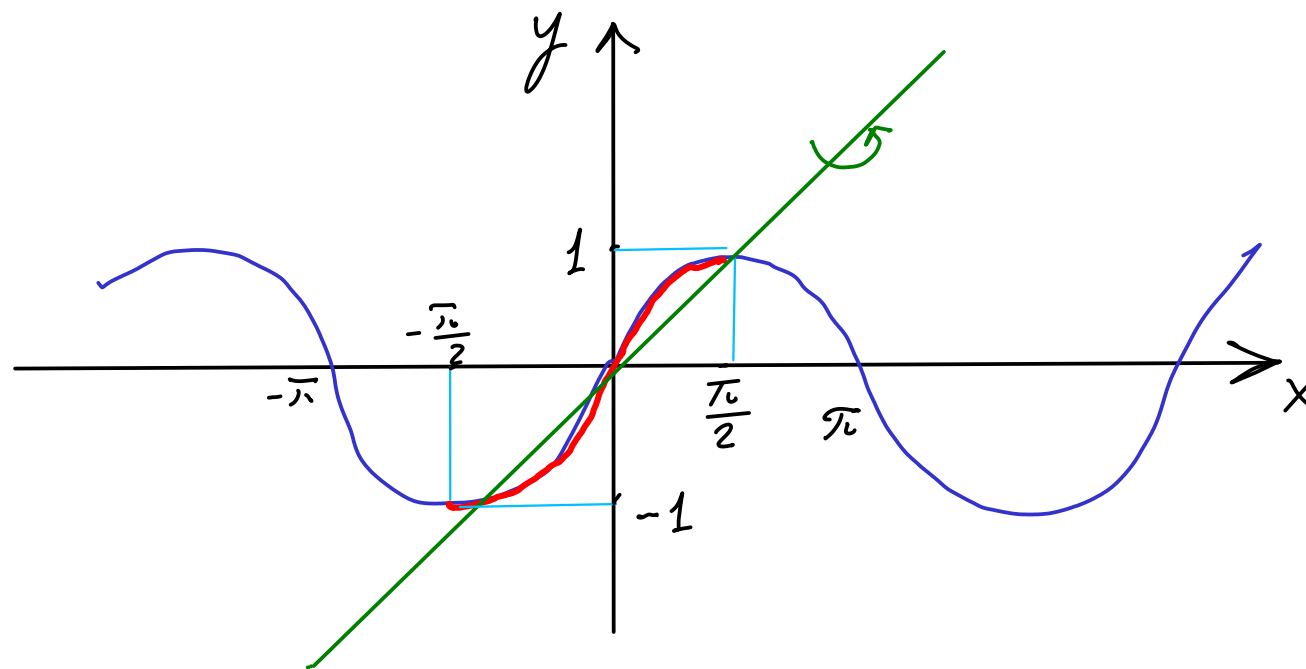
הפונקציה $\arcsin(x)$

מהו $\arcsin(x)$?

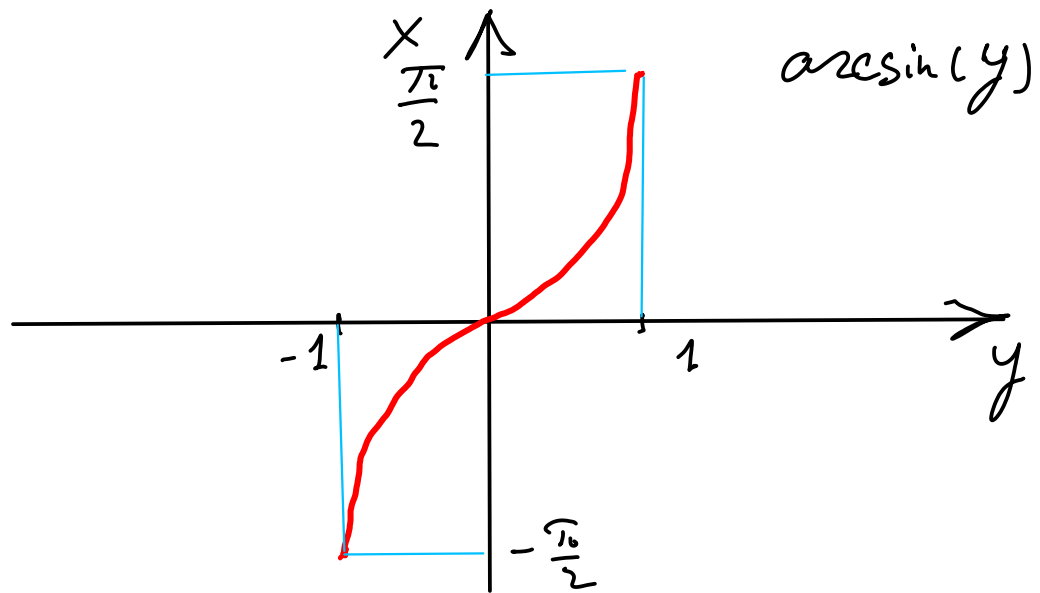
$$y = \sin(x)$$

$$x = \arcsin(y)$$

הפונקציה $\arcsin(x)$ היא הפונקציה ההפוכה של $\sin(x)$



התחום $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ נקבע כדי להפוך הפונקציה $\sin(x)$ לפונקציה חד-חד-ערכית.



הפונקציה
היחידה

$$\mathcal{D} = [-1, 1]$$

(הפונקציה היחידה)

$$\sin[\arcsin(y)] = y$$

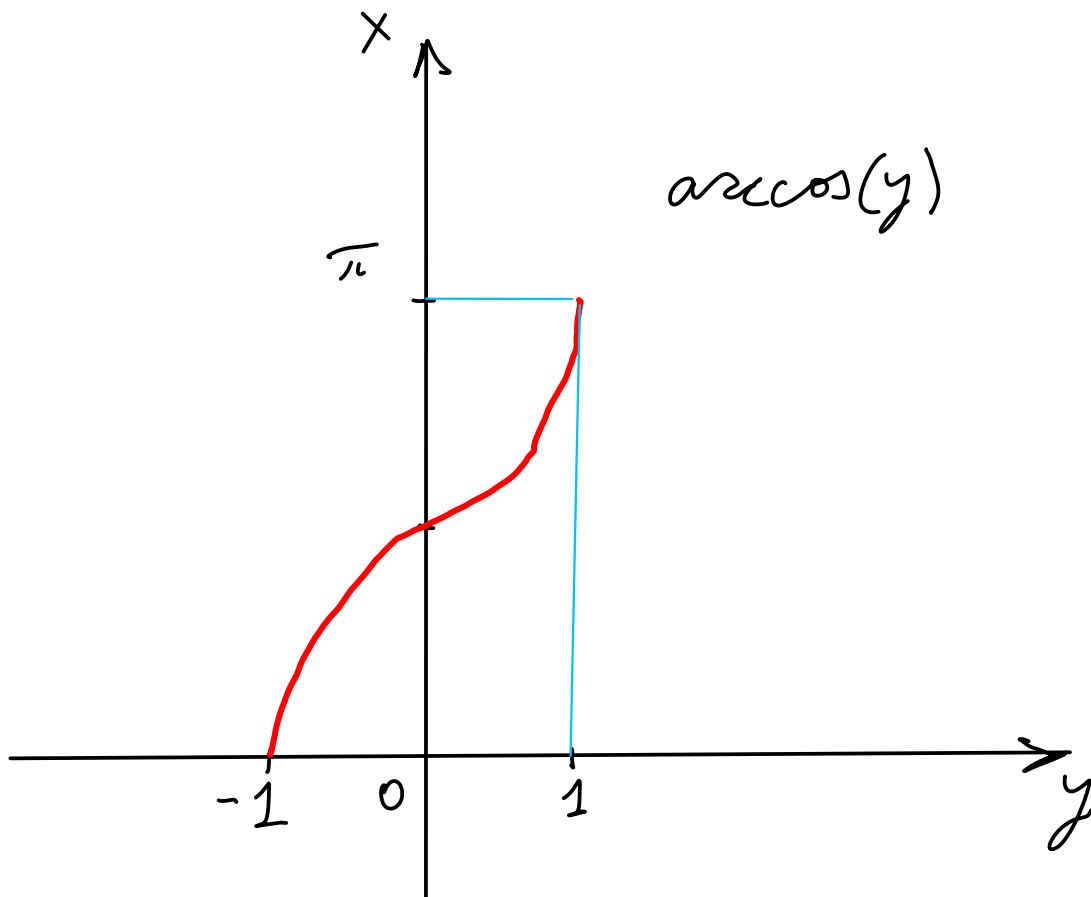
$$\forall y \in [-1, 1]$$

$$\arcsin[\sin(x)] = x$$

$$\forall x$$

הפונקציה $\arccos(x)$

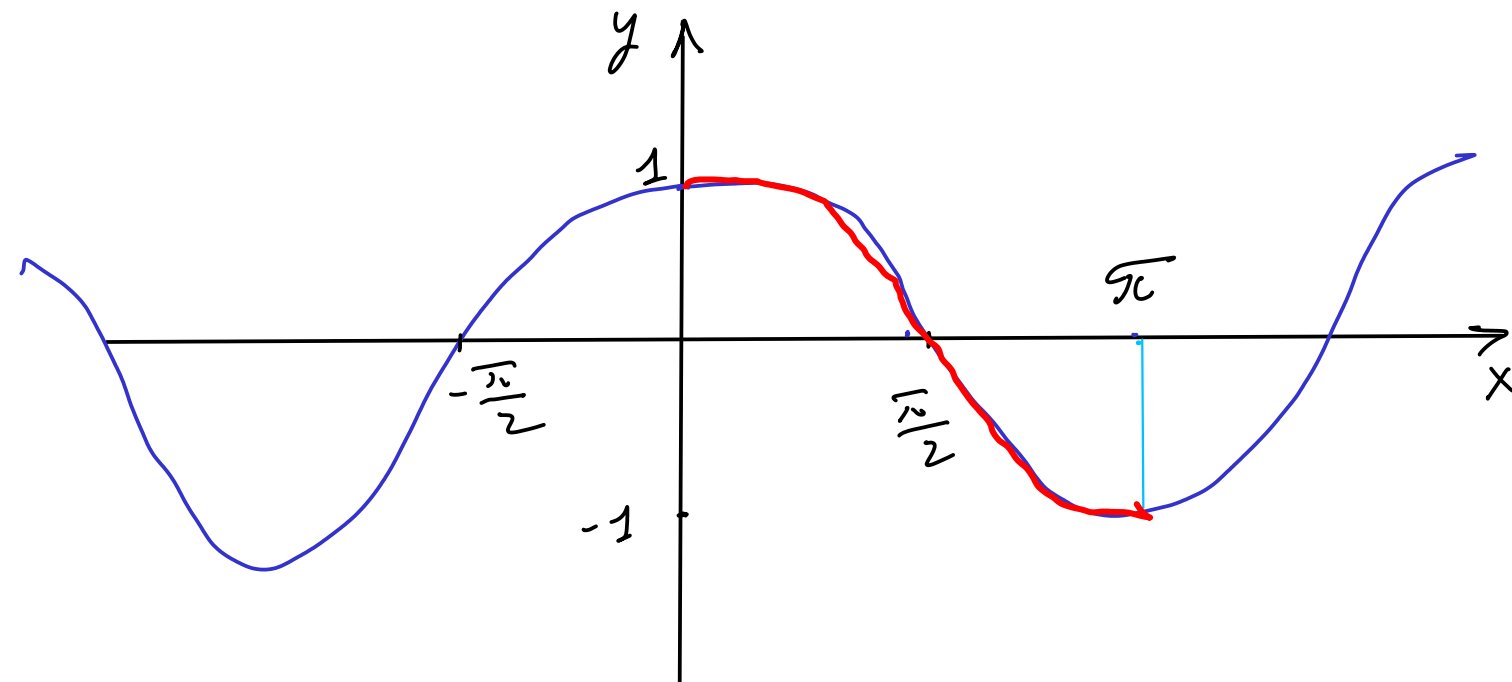
$\cos(x)$



הפונקציה $\cos(x)$

$$D = [-1, 1]$$

(הפונקציה $\cos(x)$ היא הפונקציה הפרימטיבה של $-\sin(x)$)



$$\cos[\arccos(y)] = y$$

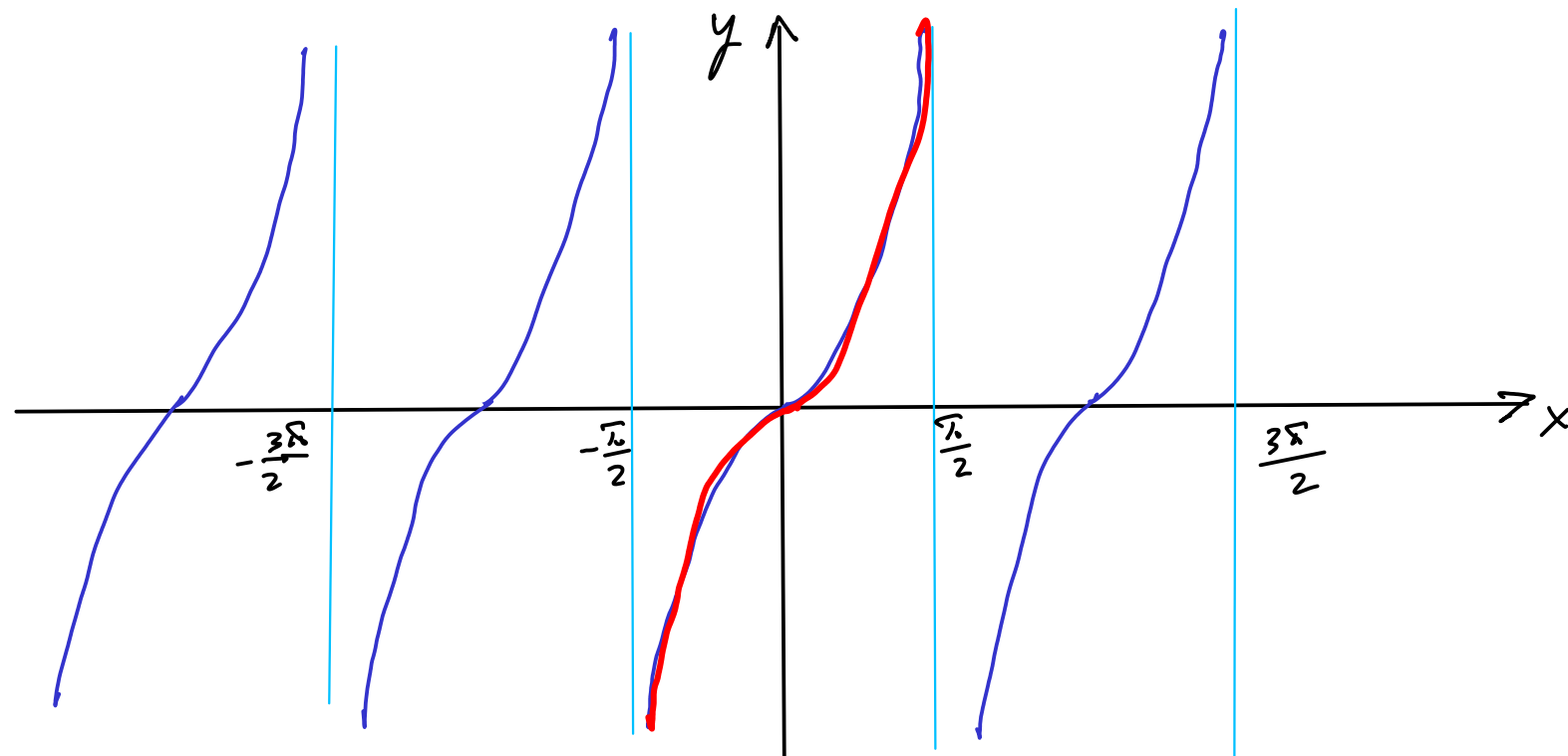
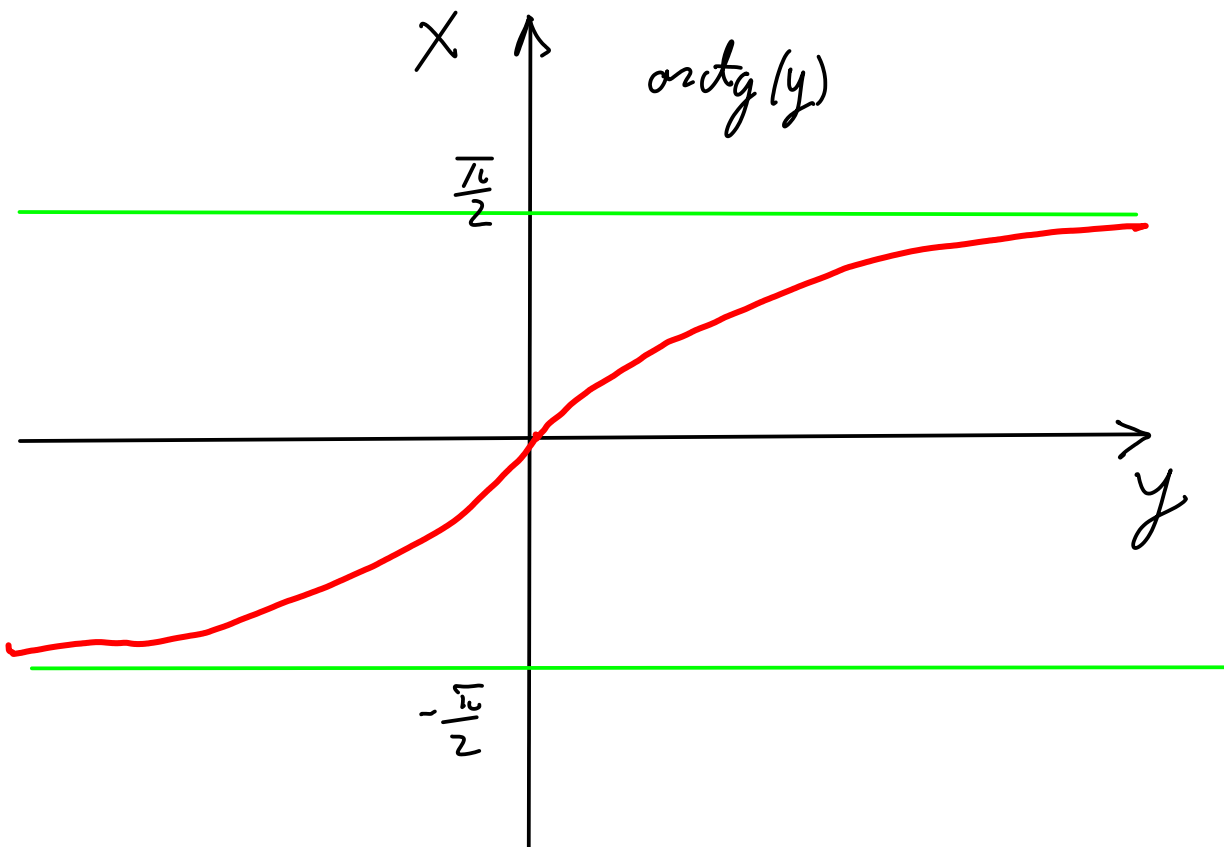
$$\forall y \in [-1, 1]$$

$$\arccos[\cos(x)] = x$$

$$\forall x$$

arctg(x) הערכה

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$



הערכה $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\tan(x)$

הערכה

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

הערכה

$$|\arctan(y)| < \frac{\pi}{2}$$

הזכרון היצירתי:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = \left\{ \begin{array}{l} t := \arcsin(x) \\ x = \sin(t) \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right\} =$$

2237 arcsin(x)

 $x = 0 \quad \sim 20$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin(t)} = 1$$

३" ०२

1

אסמטלוג

2 סוגי אסמטלוג:

- א) אורכי (שם קו-צירוף מסוג ב', שארף אף ביצוק)
- ב) מרובע (שם קצוות $\lim_{x \rightarrow \pm \infty}$ בפי, ארופי)

$$f(x) = \frac{3x^2 + x - 30}{x^2 - 9} \quad \boxed{2}$$

מחלק א...

$$f(3) = 0 \Rightarrow x - 3 \mid 3x^2 + x - 30$$

$$\frac{3x^2 + x - 30}{(x+3)(x-3)} = \frac{\cancel{(x-3)}(3x+10)}{(x+3)\cancel{(x-3)}} = \frac{3x+10}{x+3}$$

2 מרובע א-צירוף $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

הבינוי הינה

מרובע ב- $x = -3$

אם x_2 מ' א-צירוף סלקה

$$3x + 10 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-3.1, -2.9)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{3x + 10}{x + 3} = -\infty$$

$$3x + 10 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-3.1, -2.9)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{3x + 10}{x + 3} = \infty$$

$x = -3$ → נקודה של הפרדה $f(x)$ ו- $f(x)$ אינו מוגדר

$$y = ax + b$$

הוא נקרא קו ישר

$$f(x) - ax - b \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$$x \rightarrow \infty \quad \text{קריטריון (1)}$$

$$x \rightarrow -\infty \quad \text{קריטריון (2)}$$

$y = ax + b$
 $y = f(x)$

$$f(x) - ax - b \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

"גודל $|x|$ גדול מאוד" $\Rightarrow$ $f(x)$ מתנהג כמו $ax + b$

אם a קיים

$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - ax - b}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - a - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - a$$

במקרה של $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ קיים

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

אם $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ קיים, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$ קיים

אם $x \rightarrow -\infty$

אם $a = 0$, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$

אם $a \neq 0$, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) - b = 0 \Rightarrow b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

אם $x \rightarrow -\infty$

במקרה של $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ קיים

$$b := \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax), \quad a := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

עזרה נניח שהפונקציה

יש לה שיער $y = ax + b$ כגון $f(x) - f$ כאשר $x \rightarrow \infty$.

אם $x \rightarrow -\infty$

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$$

$$f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + 7}$$

3

. $\mathbb{R}$ $\sqrt{}$ $\mathbb{R}_{\geq 0}$ $f(x)$ $\rightarrow$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ $\frac{1}{x}$ (1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 7}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{x} + \sqrt{\frac{4x^2 + 7}{x^2}} \right) = \quad : x \rightarrow \infty \quad \text{1.2.8} \quad (2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \sqrt{4 + \frac{7}{x^2}} \right) = 2 + \sqrt{4 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x^2}} = 2 + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4$$

$\sqrt{x}$ $\rightarrow$ $\mathbb{R}_{\geq 0}$ $\sqrt{}$ $\mathbb{R}_{\geq 0}$ $\rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 4x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + \sqrt{4x^2 + 7} - 4x) =$$

$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ $\rightarrow$ $x = a$ $\rightarrow$ 0

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = g\left(\lim_{x \rightarrow \infty} x\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4 + \frac{7}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{7}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 7} - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 7 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 7} + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{\sqrt{4x^2 + 7} + 2x} = 0$$

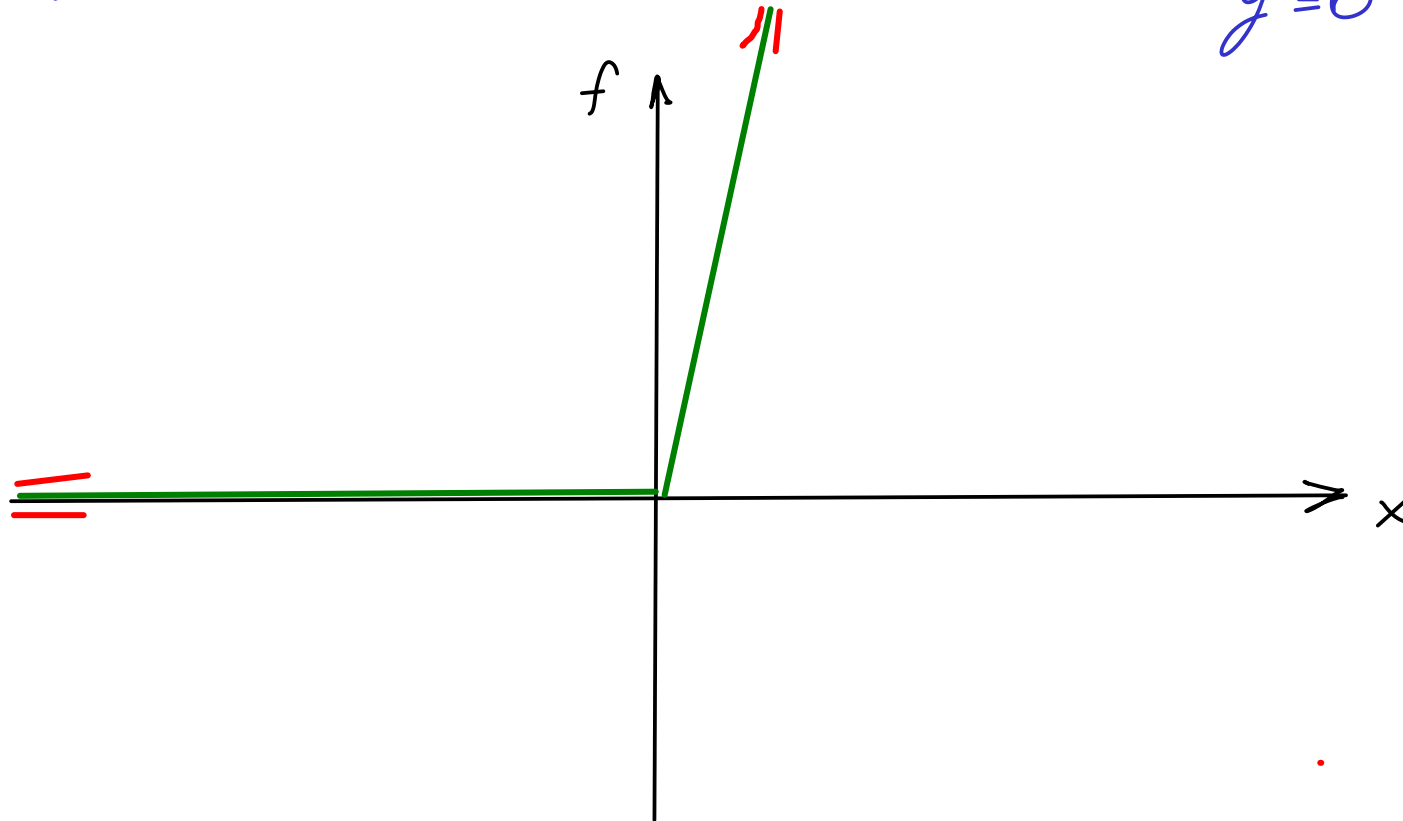
$x \rightarrow \infty$ $\Rightarrow$ also $y = 4x$ $\Rightarrow$ (can't do it) $f(x) - \int$: not on

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 7}}{x} = \left\{ \begin{array}{l} t := -x \\ t \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2t + \sqrt{4t^2 + 7}}{-t} = \quad : x \rightarrow -\infty \quad \text{also } (3)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(2 - \sqrt{4 + \frac{7}{t^2}} \right) = 2 - \sqrt{4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + 7}) = \left\{ \begin{array}{l} t := -x \\ t \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} (-2t + \sqrt{4t^2 + 7}) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t^2 + 7 - 4t^2}{\sqrt{4t^2 + 7} + 2t} = 0$$



$y=0$ → Can't do it $f(x) = \int : \infty, 0, \infty$
 $x \rightarrow -\infty$ $7t/10$

פונקציות גזירות

הזיכרון

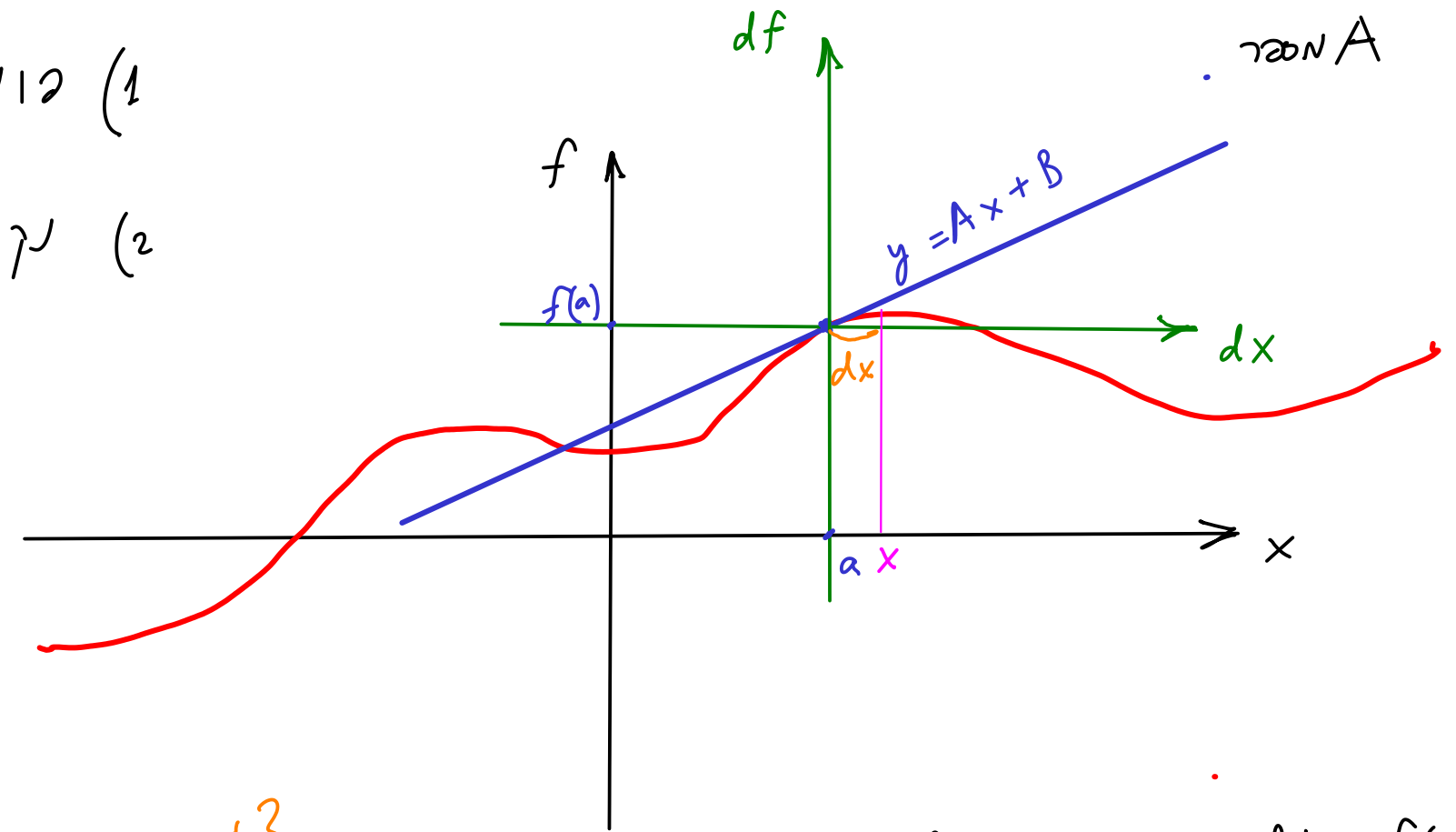
נהוגים:

(1) פונקציה $f(x)$

(2) נקודה $\dot{D}_f \ni a$

הפנים של
תחום ההזכרה
 $\dot{D}_f$

$d_a f(dx) = A dx$
 $\cdot \text{מסלול } A$



$dx = x - a$
 הזיכרון של $\int_a^x$
 בנקודה $-a$

כוננים - זכר א פונקציה
 אינטיגרל $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ במובן של
 אפזכרה אינטיגרל: $\varphi(x) = Ax$

נניח שזכר א $f(x)$ ל קו ישר מסלול
 בנקודה $(a, f(a))$

נחליץ את הפונקציה האינארית עם פונקציה Adx על משתנה חדש dx
 כשגיל שיה, נשתמש במרחב לירות תצעה: (dx, df) , ה לירות של המרחב התצעה הם מקבילים
 ל לירות (x, f) , והם עובדים זכך הקוזה $(a, f(a))$.

$$\boxed{dx = x - a}$$

לכן df פונקציה אינארית על המשתנה התצעה dx :

$$df(dx) = Adx$$

$d_a f$ - הדיפרנציאל על $f(x)$

(א) $f(x)$ גזירה ב $x=a$ אם f רציפה ב a : df קיים.

(ב) $f(x) = Adx \leq$ הסבר A נקיט

הנצעה על $f(a)$ בנקי $x=a$.

בנקי $x=a$.
 הדיפרנציאל הוא פונקציה אינארית על
 המשתנה dx .

הסמנים לנגזרת:

$$f'(a)$$

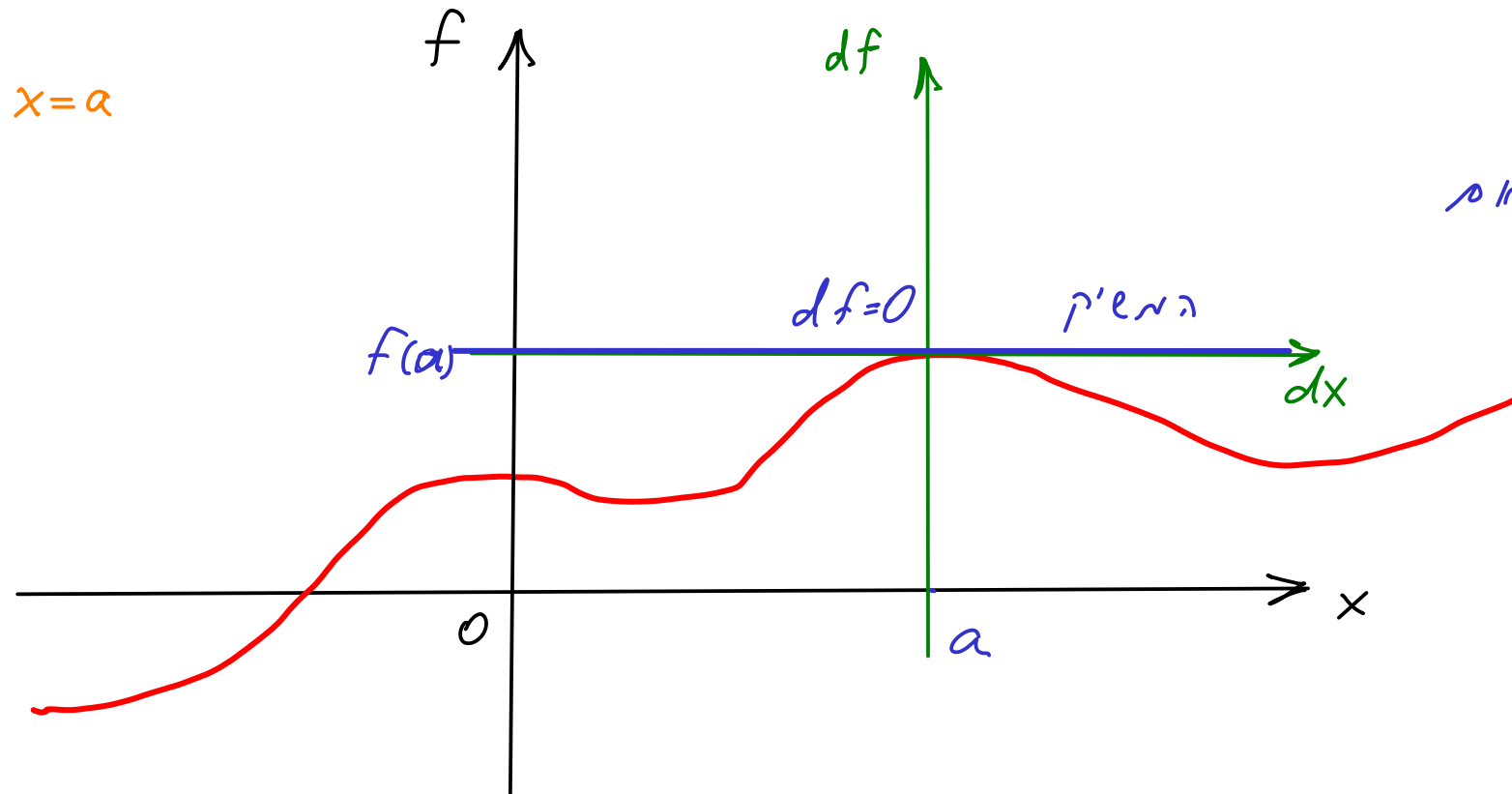
$$\frac{df}{dx}(a)$$

(P. de Fermat) לבע

נניח שהפונקציה $f(x)$ נגזרת ב $x=a$.

$d_a f = 0 \iff x=a$ נקודה קיצונית של $f(x)$ $\iff$ $f(x) - f(a)$ היא פונקציה

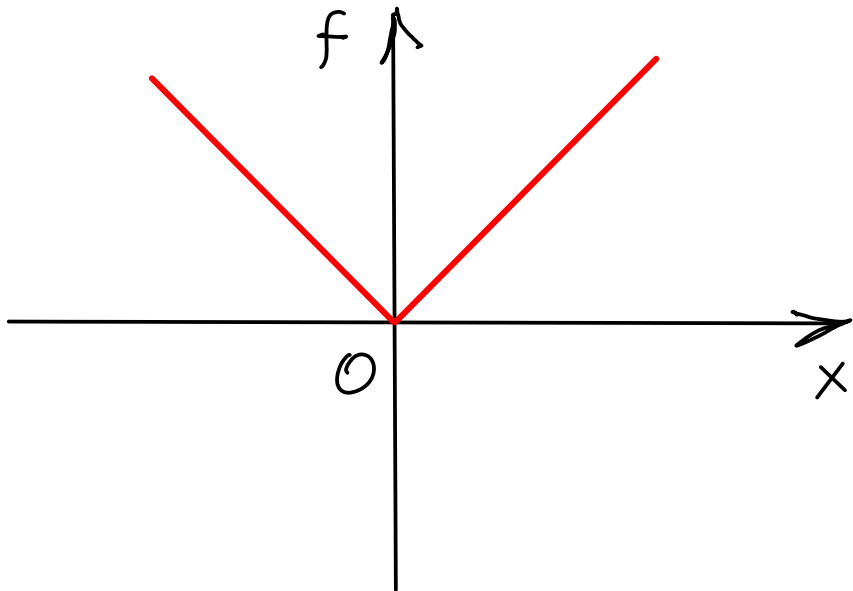
היא גורמת ל $x=a$
 $\Downarrow$
 $f'(a) = 0$



$f(x) - f(a)$ היא פונקציה
 $x=a$ נקודה קיצונית

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

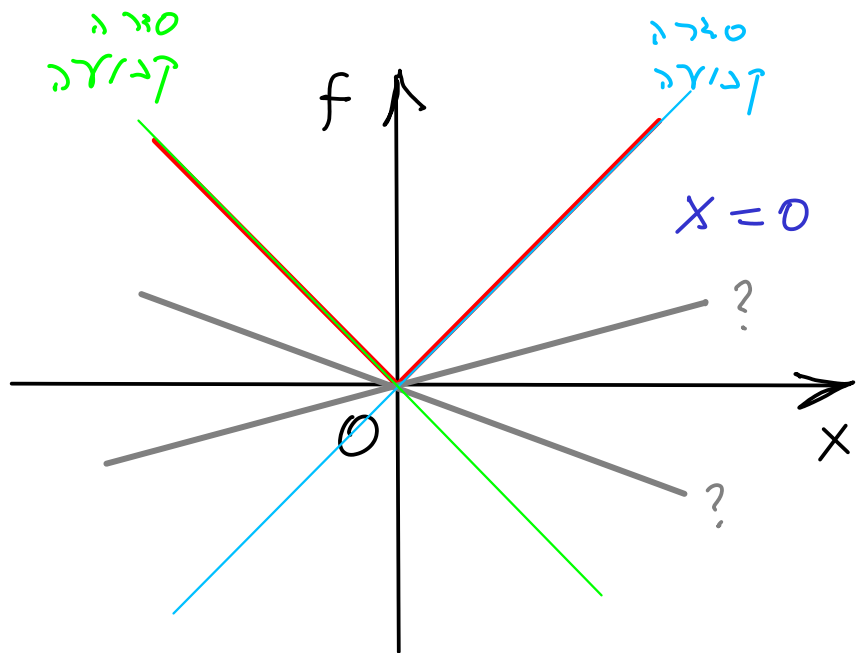
אנחנו רוצים
לכתוב את כל הערכים ב- $\mathbb{R}$



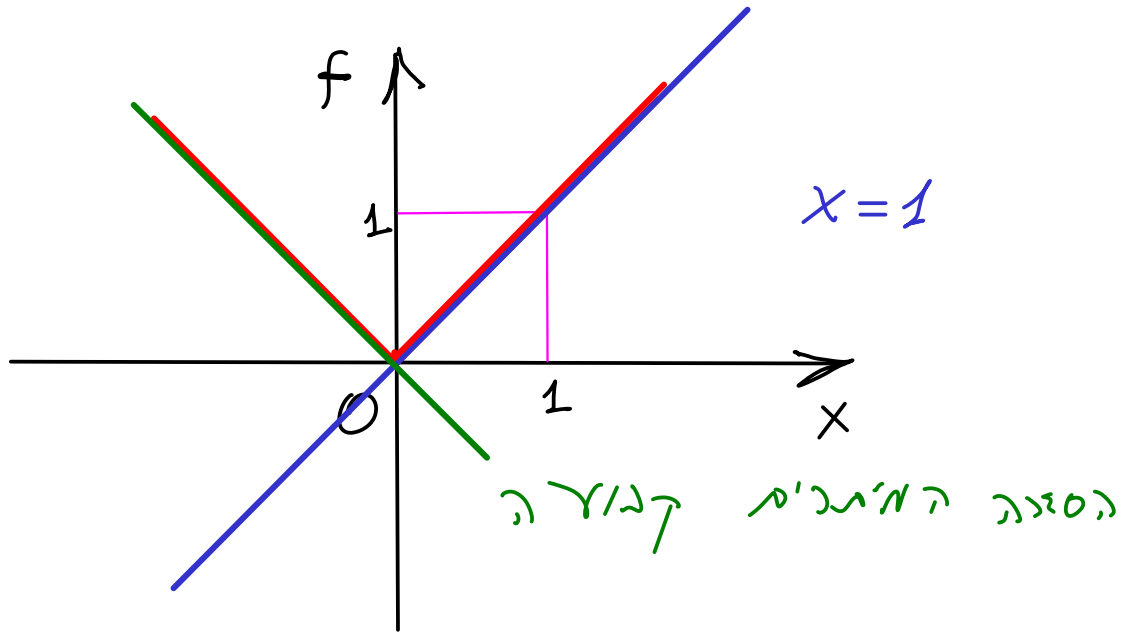
$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = |x|$$

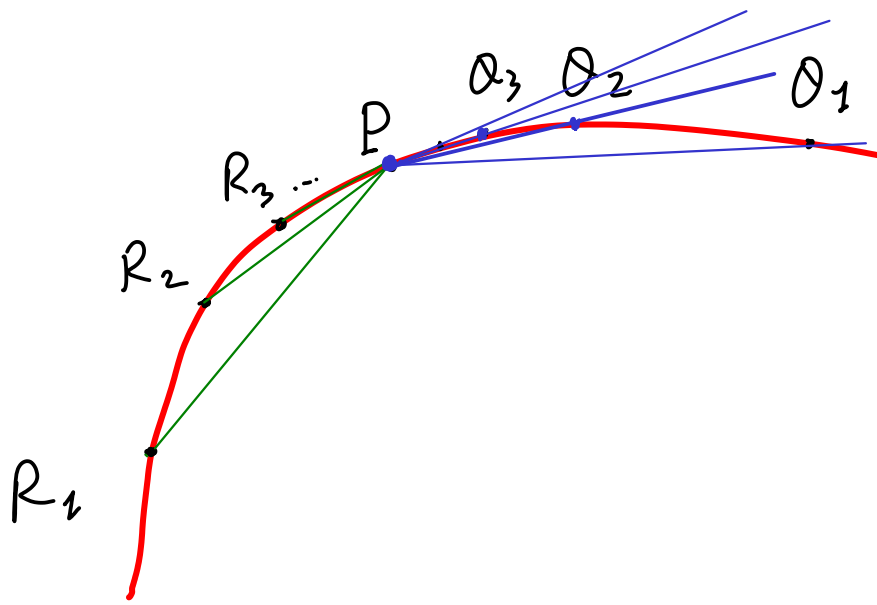
לעזרה בכתוב
אנחנו צריכים ב- $x=0$.



נבדוק הייחוס של המידע קיים
אבל הוא אומר מהבדול השמאלי.



מהו משך קו עקום?



למשל: בחינה: בוחנים נק' $Q_1 \neq P$
 אומדן הולך נצט' : $R_1 \neq P$
 קבלו סדרה:

- | | |
|---------|---------|
| PQ_1 | PR_1 |
| PQ_2 | PR_2 |
| $\dots$ | $\dots$ |
| PQ_3 | PR_n |

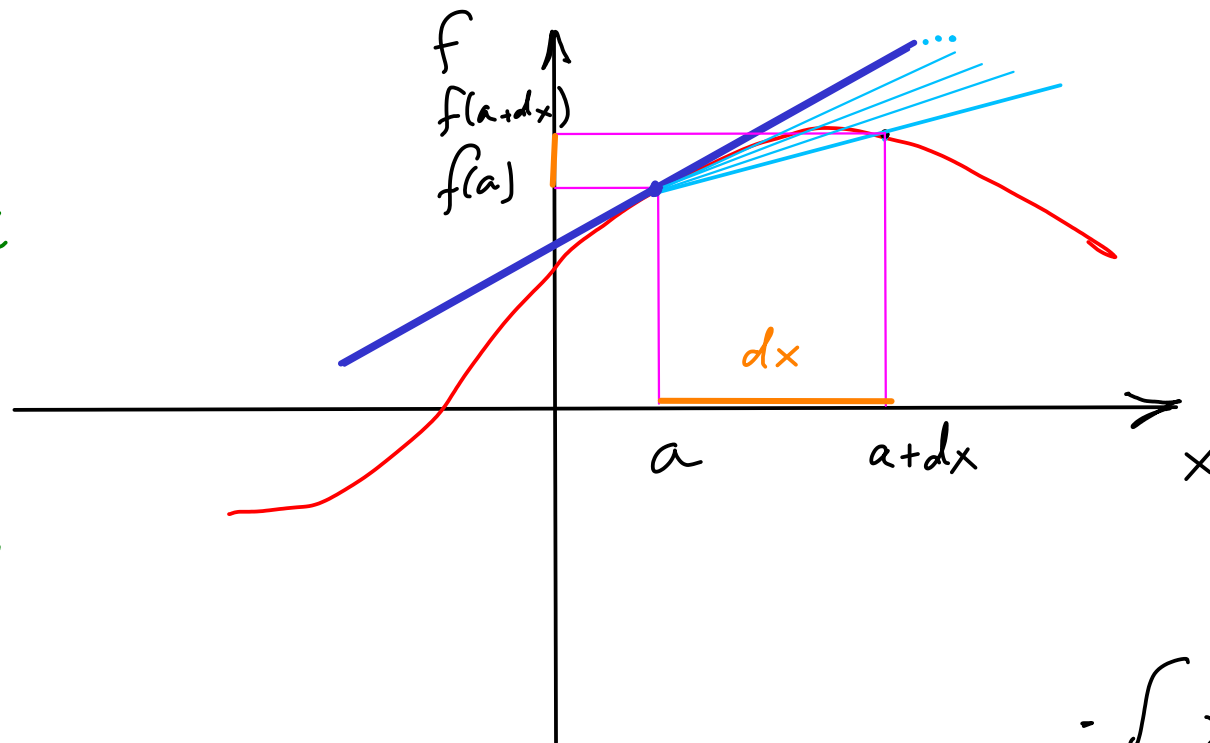
אם 2 בולאו קיימים ואם לא - יש משך בנק' P

ההזרה האנליטית והשורה

$x=a$ ג' f ג' f
 כח $d_a f$ ג' f

הזכר $d_a f$ - המעק
 שזכר $f(a)$ בקי $x=a$

המעק מוזכר ע"י נקודה
 $(a, f(a))$ ושיעור $f'(a)$



נניח $f(x)$ (רצפה) ג' f
 בקי $x=a$
 = הסביבה a

השפוע של המיד

לכן השפוע $f'(a)$ של המיד f - f

$$f'(a) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(a+dx) - f(a)}{dx}$$

$x=a$ ג' $f(x)$ $(a \in \mathbb{D}_f)$ והזכר $x=a$ ק"ס

$$d_a f = ?$$

$$f'(a) = ?$$

$$x = a$$

$$f(x) = x^2$$

$$\begin{aligned} \frac{f(a+dx) - f(a)}{dx} &= \frac{(a+dx)^2 - a^2}{dx} = \frac{\cancel{a^2} + 2adx + (dx)^2 - \cancel{a^2}}{dx} = \\ &= \frac{2adx + (dx)^2}{dx} = 2a + dx \xrightarrow{dx \rightarrow 0} 2a \end{aligned}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

הסדרה הנכונה

$$d_a f = 2a dx$$

$$f'(a) = 2a$$

המשפט של לייבניץ: $f'(a) = 2a$ $\Rightarrow$ $f(x) = x^2$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$a^n \quad a^{n-1}b \quad a^{n-2}b^2 \quad \dots \quad ab^{n-1} \quad b^n$$

$$\underline{x=a \quad 1 \leq n \quad f(x) = x^n}$$

$$\frac{f(a+dx) - f(a)}{dx} = \frac{(a+dx)^n - a^n}{dx} = \frac{\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} (dx)^k - a^n}{dx} =$$

$$= \frac{\cancel{a^n} + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} (dx)^k - \cancel{a^n}}{dx} = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} (dx)^{k-1} =$$

$dx \rightarrow 0$ 1/2 1/2

$$= \frac{n!}{1!(n-1)!} a^{n-1} + \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} (dx)^{k-1} \xrightarrow{dx \rightarrow 0} \frac{n!}{(n-1)!} a^{n-1} = n a^{n-1}$$

$k=1$

$k \geq 2$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

дополн

$$\frac{n!}{(n-1)!} = n$$

נרשם כל הפיתוח בעזרת $n=3$

$$x=a \quad f(x) = x^3$$

$$f(a+dx) - f(a) = (a+dx)^3 - a^3 = \cancel{a^3} + 3a^2 dx + 3a(dx)^2 + (dx)^3 - \cancel{a^3} = 3a^2 dx + 3a(dx)^2 + (dx)^3$$

$$(a+dx)^3 = (a+dx)(a+dx)(a+dx)$$

$$a^3 + 3a^2 dx + 3a(dx)^2 + 1(dx)^3$$

$$1 = \frac{3!}{3!(3-3)!} = \binom{3}{3} \quad \binom{3}{2} = \frac{3!}{1!2!} = 3 \quad \binom{3}{1} = \frac{3!}{1!2!} = 3 \quad \binom{3}{0} = \frac{3!}{0!3!} = 1$$

בקורה זו כ'ס נרשם כל הפיתוח בעזרת $n=3$

$$\frac{f(a+dx) - f(a)}{dx} = \frac{3a^2 dx + 3a(dx)^2 + (dx)^3}{dx} = 3a^2 + 3a dx + (dx)^2 \xrightarrow{dx \rightarrow 0} 3a^2$$

$$d_0 f = ?$$

$$x=0 \quad f(x) = |x|$$

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(dx) - f(0)}{dx} = ?$$

$$\lim_{dx \rightarrow 0+} \frac{|dx| - |0|}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{dx}{dx} = 1$$

$$dx > 0$$

$$\lim_{dx \rightarrow 0-} \frac{|dx| - |0|}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{-dx}{dx} = -1$$

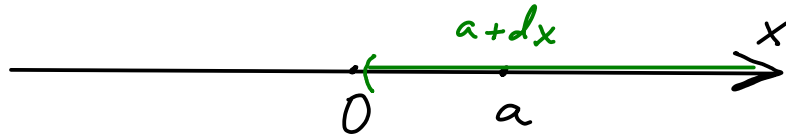
$$dx < 0$$

$$1 \neq -1$$

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{|dx| - 0}{dx}$$

הגדרה

$$x=0 \quad f(x) = |x| \quad \text{א'נה צ'ס'רה בע'ק'}$$



$$\mathcal{D}_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

$$x = a \neq 0$$

$$f(x) = \frac{3}{2x^5}$$

$$\frac{f(a+dx) - f(a)}{dx} = \frac{3}{2dx} \left(\frac{1}{(a+dx)^5} - \frac{1}{a^5} \right) = \frac{3}{2dx} \cdot \frac{a^5 - (a+dx)^5}{a^5(a+dx)^5} =$$

תוצאה נכונה

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}$$

זוהי ג'ומ

!!! בליק

$$\binom{5}{n} = \frac{5!}{n!(5-n)!}$$

$$0! = 1$$

0 נכונה a-dx | a+dx | a+dx | a+dx | a+dx | a+dx

$$(a+dx)^5 = \sum_{n=0}^5 \binom{5}{n} a^{5-n} dx^n = a^5 + 5a^4 dx + 10a^3(dx)^2 + 10a^2(dx)^3 + 5a(dx)^4 + (dx)^5$$

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!5!} = 1$$

$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!(5-1)!}$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} =$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 2 \cdot 5 = 10$$

$$= \frac{3}{2dx} \cdot \frac{\cancel{a^5} - [\cancel{a^5} + 5a^4 dx + 10a^3(dx)^2 + 10a^2(dx)^3 + 5a(dx)^4 + (dx)^5]}{a^5 \cdot (a+dx)^5} =$$

$$= \frac{3}{2\cancel{dx}} \cdot \frac{-5a^4\cancel{dx} - 10a^3\cancel{(dx)^2} - 10a^2\cancel{(dx)^3} - 5a\cancel{(dx)^4} - \cancel{(dx)^5}}{a^5 \cdot (a+dx)^5} =$$

$$= \frac{3}{2 \cdot a^5 (a+dx)^5} [-5a^4 - 10a^3 dx - 10a^2(dx)^2 - 5a(dx)^3 - (dx)^4]$$

$$f'(a) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{3}{2 \cdot a^5 (a+dx)^5} [-5a^4 - 10a^3 dx - 10a^2(dx)^2 - 5a(dx)^3 - (dx)^4] =$$

$$= \frac{3}{2 \cdot a^5 (a+dx)^5} [-5a^4 - 10a^3 dx - 10a^2(dx)^2 - 5a(dx)^3 - (dx)^4] \Big|_{dx=0} =$$

$$= \frac{3 \cdot (-5a^4)}{2a^5 \cdot a^5} = \frac{-15a^4}{2a^{10}} = -\frac{15}{2}a^{-6}$$

$$\ln(e^x) = x \quad \forall x$$

$$e^{\ln(x)} = x \quad \forall x > 0$$

$$x = a > 0$$

$x > 0$

$$f(x) = \ln x$$

6

$$e^x = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx \quad (1)$$

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b \quad (2)$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(a^{-1}) = -1 \ln a \quad (3)$$

$$e^t = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{k}\right)^k \quad (4)$$

$$\lim_{dx \rightarrow 0+} \left(1 + \frac{dx}{a}\right)^{\frac{1}{dx}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{ak}\right)^k = e^{\frac{1}{a}}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \ln\left(\left(1 + \frac{dx}{a}\right)^{\frac{1}{dx}}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{a}}\right) = \frac{1}{a}$$

$a, b > 0$

$$\frac{f(a+dx) - f(a)}{dx} = \frac{\ln(a+dx) - \ln a}{dx} =$$

$$= \frac{1}{dx} [\ln(a+dx) - \ln a] = \frac{1}{dx} \ln \left(\frac{a+dx}{a} \right) = \frac{1}{dx} \ln \left(1 + \frac{dx}{a} \right) = \ln \left[\left(1 + \frac{dx}{a} \right)^{\frac{1}{dx}} \right]$$

$d_x \rightarrow 0^-$ וְ $d_x \rightarrow 0^+$ נגזרת של פונקציה בנקודה נתונה $= k = \frac{1}{d_x}$

$$t = \frac{1}{a}$$

$x=a \neq 0, f(x) = \ln|x|$ נ'נ
 $f'(a) = \frac{1}{a}$ ש'ו לזכור

$$\frac{f(a+dx) - f(a)}{dx} = \ln \left(\left| 1 + \frac{dx}{a} \right|^{\frac{1}{dx}} \right)$$

הוכח:

$$\lim_{dx \rightarrow 0+} \left(\ln \left| 1 + \frac{dx}{a} \right|^{\frac{1}{dx}} \right) = \lim_{dx \rightarrow 0+} \left(\ln \left(1 + \frac{dx}{a} \right)^{\frac{1}{dx}} \right) = \ln \left[\lim_{dx \rightarrow 0+} \left(1 + \frac{dx}{a} \right)^{\frac{1}{dx}} \right] =$$

נמצא אפשר לבחור dx כזה
 $1 + \frac{dx}{a} > 0$

נ'נ
 $\ln e$

$$e^t = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{x} \right)^x$$

$$= \left\| \begin{array}{l} t := \frac{1}{dx} \\ t \rightarrow \infty \end{array} \right\| = \ln \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{t} \right)^t = \ln \left(e^{\frac{1}{a}} \right) = \frac{1}{a}$$

$$e^t = \lim_{x \rightarrow 0+} (1+tx)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{dx \rightarrow 0-} \left(\ln \left| 1 + \frac{dx}{a} \right|^{\frac{1}{dx}} \right) = \lim_{dx \rightarrow 0-} \left(\ln \left(1 + \frac{dx}{a} \right)^{\frac{1}{dx}} \right) = \ln \left[\lim_{dx \rightarrow 0-} \left(1 + \frac{dx}{a} \right)^{\frac{1}{dx}} \right] =$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$
 $\ln e$

נמצא את המספר e כגון
 $1 + \frac{dx}{a} > 0 : dx \in \mathbb{R}$

$$= \left\{ \left| \begin{array}{l} t := -\frac{1}{dx} \\ t \rightarrow \infty \end{array} \right. \right\} = \ln \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{a} \cdot \left(-\frac{1}{t} \right) \right)^{-t} \right) = \ln \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \left(-\frac{1}{a} \right) \cdot \frac{1}{t} \right)^t \right]^{-1} =$$

$$= \ln \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{1}{a} \right) \cdot \frac{1}{t} \right)^t \right]^{-1} = \ln \left[\left(e^{-\frac{1}{a}} \right)^{-1} \right] = \ln \left(e^{\frac{1}{a}} \right) = \frac{1}{a}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$
 $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$

$$\lim_{dx \rightarrow 0^-} \frac{\ln|a+dx| - \ln|a|}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0^+} \frac{\ln|a+dx| - \ln|a|}{dx} = \frac{1}{a}$$

הוכחה

כי $dx \rightarrow 0$ זהו Δx קטן

הוכחה

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$x = a, f(x) = \cos x \text{ n'uj } \underline{\underline{\text{Cöln}}}$$

$$f'(a) = -\sin(a) \text{ 'sk}$$

$$\frac{f(a+dx) - f(a)}{dx} = \frac{\cos(a+dx) - \cos a}{dx} = \frac{\cos(a) \cdot \cos(dx) - \sin(a) \cdot \sin(dx) - \cos(a)}{dx} = \underline{\underline{\therefore \text{ n'uj } \therefore}}$$

$$= \cos(a) \frac{\cos(dx) - 1}{dx} - \sin(a) \frac{\sin(dx)}{dx} \quad (=)$$

$$\cos(\alpha) - 1 = \cos(2 \cdot \frac{\alpha}{2}) - 1 = \cos^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\alpha}{2}) - 1 =$$

$$\cos^2(\frac{\alpha}{2}) + \sin^2(\frac{\alpha}{2}) = 1$$

$$= \cos(a) \frac{-2\sin^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\alpha}{2})}{dx} - \sin(a) \frac{\sin(dx)}{dx} = -\cos(a) \cdot \sin(\frac{dx}{2}) \cdot \frac{\sin(\frac{dx}{2})}{\frac{dx}{2}} - \sin(a) \frac{\sin(dx)}{dx} \xrightarrow{dx \rightarrow 0} -\sin(a)$$

Se.N

$$\cos'(a) = \lim_{dx \rightarrow 0} \left[\cos(a) \frac{-2 \sin^2\left(\frac{dx}{2}\right)}{dx} - \sin(a) \cdot \frac{\sin(dx)}{dx} \right] =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

$$= \cos(a) \cdot (-2) \cdot \overset{=0}{\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{dx}{2}\right)}{dx}} - \sin(a) \cdot \overset{=1}{\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\sin(dx)}{dx}} = -\sin(a)$$

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{dx}{2}\right)}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \left[\sin\left(\frac{dx}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{dx}{2}\right)}{\frac{dx}{2}} \cdot 2 \right] = 0 \cdot 1 \cdot 2 = 0$$

f.e.v

תכונות של הנגזרת

למשל נניח $f(x), g(x)$ פונקציות שנגזרתן קיימת בנקודה $x=a$.

הפונקציה $f+g$ נגזרת בנקודה $x=a$ (✓)

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

הפונקציה fg נגזרת בנקודה $x=a$ (✓)

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

"Leibniz rule"

הוכחה: (✓)

$\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$

הסכום של הפונקציות

הפונקציה $(f+g)$ נגזרת בנקודה x אם ורק אם f ו- g נגזרות בנקודה x

$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

$$(f+g)'(a) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{(f+g)(a+dx) - (f+g)(a)}{dx} =$$

$$= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\underline{f(a+dx)} + \underline{g(a+dx)} - \underline{f(a)} - \underline{g(a)}}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(a+dx) - f(a) + g(a+dx) - g(a)}{dx} =$$

$$= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(a+dx) - f(a)}{dx} + \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{g(a+dx) - g(a)}{dx} = f'(a) + g'(a).$$

במשפט זה

קיים, כי $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

f, g נגזרות ב $x=a$

$$(fg)(x) := \overbrace{f(x)g(x)}^{\text{כפול}}$$

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{(fg)(a+dx) - (fg)(a)}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(a+dx) \cdot g(a+dx) - f(a)g(a)}{dx} =$$

$$= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(a+dx)g(a+dx) - f(a)g(a+dx)}^{\text{כחיתוך}} + \overbrace{f(a)g(a+dx) - f(a)g(a)}^{\text{כחיתוך}}}{dx} =$$

$$= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(a+dx)g(a+dx) - f(a)g(a+dx)}{dx} + \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(a)g(a+dx) - f(a)g(a)}{dx} =$$

?

$$= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(a+dx) - f(a)}{dx} \lim_{dx \rightarrow 0} g(a+dx) + f(a) \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{g(a+dx) - g(a)}{dx} =$$

$$= f'(a) \cdot g(a) + f(a) g'(a).$$

S.I.N

הגדרת ק'ס
כ' $f(x)$ של'יה
 $x=a$ ב

הגדרת ק"ס
כ' $g(x)$ של'יה
 $x=a$ ב

סיכום:

הנחיות

Leibniz

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(\sin(x))' = \cos(x) \quad \underline{\text{Leibniz}}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$f(x) = x^3 \cdot \sin(x) \quad \boxed{7}$$

$$f'(x) = (x^3 \sin x)' = (x^3)' \cdot \sin(x) + x^3 \cdot (\sin x)' = 3x^2 \sin(x) + x^3 \cos(x).$$

Leibniz

$$\underline{f'(a) = 3a^2 \sin(a) + a^3 \cos(a) \quad \text{Leibniz}}$$

לפיכך נגזרת של

היא

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad a \neq 0 \quad \boxed{1}$$

$$\frac{f(a+dx) - f(a)}{dx} = \frac{1}{dx} \left(\frac{1}{a+dx} - \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{dx} \cdot \frac{a - (a+dx)}{a(a+dx)} = \frac{1}{dx} \cdot \frac{\cancel{a} - \cancel{a} - dx}{a(a+dx)} =$$

$$= - \frac{1}{a(a+dx)} \xrightarrow{dx \rightarrow 0} - \frac{1}{a(a+dx)} \Big|_{dx=0} = - \frac{1}{a^2}$$

הפונקציה $\frac{1}{x}$ נגזרת על $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\mathring{D}_f: x < \frac{3}{4}$$

$$D_f: x \leq \frac{3}{4}$$

$$f(x) = \sqrt{3-4x}$$

$$: a \in \mathring{D}_f \quad \Gamma_{\text{max}}$$

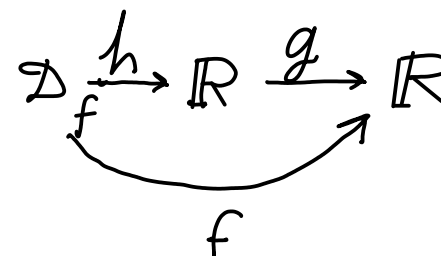
$$\frac{f(a+dx) - f(a)}{dx} = \frac{\sqrt{3-4(a+dx)} - \sqrt{3-4a}}{dx} = \frac{1}{dx} \frac{(3-4a-4dx) - (3-4a)}{\sqrt{3-4a-4dx} + \sqrt{3-4a}} =$$

$$= \frac{\cancel{3-4a} - \cancel{4dx} - \cancel{3} + \cancel{4a}}{\cancel{dx} (\sqrt{3-4a-4dx} + \sqrt{3-4a})} = - \frac{4}{\sqrt{3-4a-4dx} + \sqrt{3-4a}} \xrightarrow{dx \rightarrow 0} - \frac{2}{\sqrt{3-4a}}$$

נוגזת סהירכה

$$f = g \circ h$$

$$f(x) = g[h(x)]$$



למשל

$$d_a f = d_{h(a)} g \cdot d_a h$$

כלומר, $x=a \rightarrow f = g \circ h$

$$f'(a) = g'[h(a)] \cdot h'(a)$$

כלומר

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$h(x) = x^2 + 1$$

$$g(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f = g \circ h$$

2

$$f'(x) = \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{\frac{1}{2} - 1} \cdot 2x = (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$g'[h(a)]$$

$$\leftarrow \frac{g(h(a) + dh) - g[h(a)]}{dh} = \frac{g(\overbrace{h(a) + h'(a) dx}) - g[h(a)]}{h'(a) dx}$$

$$\approx g[\cancel{h(a)} + h'(a) dx - \cancel{h(a)}]$$

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \quad \boxed{4}$$

$$f'(x) = \left((x + (x + x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} (x + (x + x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} (x + x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}-1} \right) \left(1 + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) =$$

$$(x^{\lambda})' = \lambda x^{\lambda-1}$$

$$= \frac{1}{2 \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \sqrt{x + \sqrt{x}}} \right) \left(1 + \frac{1}{2 \sqrt{x}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2 \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \cdot \frac{2 \sqrt{x + \sqrt{x}} + 1}{2 \sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \frac{2 \sqrt{x} + 1}{2 \sqrt{x}} = \frac{(2 \sqrt{x + \sqrt{x}} + 1)(2 \sqrt{x} + 1)}{8 \sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$$

NATURALIS

e vor

lg

$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + 1}$$

5

$$f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x) - \ln(\sqrt{x^2+1} + 1)$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - 1}{\sqrt{x^2+1} - x} - \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{\sqrt{x^2+1} + 1} =$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)' = \left(\sqrt{x^2+1}\right)' - 1 =$$

$$= \frac{1}{2} (x^2+1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2x - 1$$

$$= \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1}{\sqrt{x^2+1} - x} - \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1} + 1} =$$

$$= \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{(\sqrt{x^2 + 1} - x) \sqrt{x^2 + 1}} - \frac{x}{(\sqrt{x^2 + 1} + 1) \sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$= \frac{(x - \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 1} + 1) - x(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} (\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} =$$

$$= \frac{\cancel{x\sqrt{x^2 + 1}} - \cancel{x^2} - 1 - \sqrt{x^2 + 1} - \cancel{x\sqrt{x^2 + 1}} + \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + 1} (\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \frac{- (\cancel{\sqrt{x^2 + 1}} + 1)}{\sqrt{x^2 + 1} (\sqrt{x^2 + 1} - x)(\cancel{\sqrt{x^2 + 1} + 1})} =$$

$$= - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} (\sqrt{x^2 + 1} - x)}$$

$$\underline{g(x)^{h(x)} \quad \text{potenzgesetz}}$$

$$f(x) = g(x)^{h(x)} \rightarrow \ln f(x) = h(x) \cdot \ln[g(x)]$$

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$: \ln[f(x)] \text{ nicht } \rightarrow \ln f(x), f(x) \text{ nicht } \rightarrow f(x)$$

also $\int$ $\left(\ln f(x) \right)' = \left(h(x) \cdot \ln g(x) \right)'$
Leibniz $\int$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x) \cdot \ln[g(x)] + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$$

3/10/21

$$f'(x) = f(x) \left[h'(x) \ln g(x) + \ln(x) \frac{g'(x)}{g(x)} \right]$$

$$\ln f(x) = x \ln(x)$$

$$g(x) = h(x) = x$$

$$f(x) = x^x$$

6

$$f'(x) = x^x \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (\ln x + 1)$$

$$(8 - 7 \text{ 1/1213}) : \ln(x) \text{ 1/1213 2 318}$$

$$f(x) = 2^x$$

7

$$\ln f(x) = x \ln 2$$

$$(\ln f(x))' = (x \ln 2)'$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln 2$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \ln 2$$

$$(2^x)' = 2^x \ln 2$$

3/10/21

$$x \geq 1$$

$$f(x) = \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$$

$$\ln f(x) = 2 \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x-1) - 3 \ln(x+4) - x$$

$$\left(\ln f(x) \right)' = 2 \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1 = \frac{(x-1)(x+4) + (x+1)(x+4) - 3(x^2-1) - (x^2-1)(x+4) \cdot 2}{2(x^2-1)(x+4)}$$

$$= \frac{x^2 + 3x - 4 + x^2 + 5x + 4 - 3x^2 + 3 - (x^3 - x + 4x^2 - 4)2}{2(x^2-1)(x+4)} =$$

$$= \frac{-x^2 + 8x + 3 - 2x^3 + 2x - 8x^2 + 8}{2(x^2-1)(x+4)} = \frac{-x^3 - 9x^2 + 10x + 11}{2(x^2-1)(x+4)}$$

$$f'(x) = \frac{-x^3 - 9x^2 + 10x + 11}{2(x^2 - 1)(x + 4)} \cdot \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x} = \frac{(-x^3 - 9x^2 + 10x + 11)(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{2(x^2 - 1)(x+4)^4 e^x}$$

כ"ס / כ"ג ג"כ

כ"ס

הנגזרת $f^{-1}(x)$

$$\text{id}(x) = x$$

$$f \circ \text{id} = f$$

$$\text{id} \circ f = f$$

נניח $f(x)$ הפ' $[a, b]$ וחס $g(x)$ וחס $f(b), f(a)$

$$\alpha := f(a)$$

$$\beta := f(b)$$

$$g = f^{-1} \quad f \circ g = \text{id} \quad g \circ f = \text{id}$$

$$\begin{aligned} f[g(y)] &= y & \alpha, \beta & \text{כ"ס} \\ g[f(x)] &= x & a \leq x \leq b \end{aligned}$$

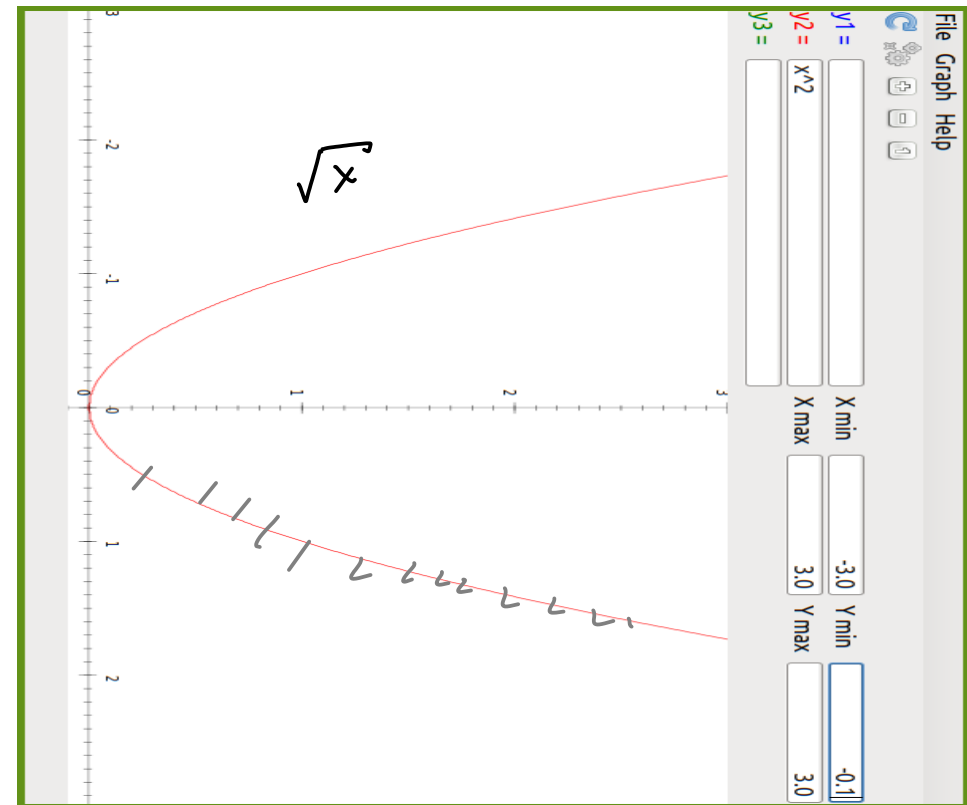
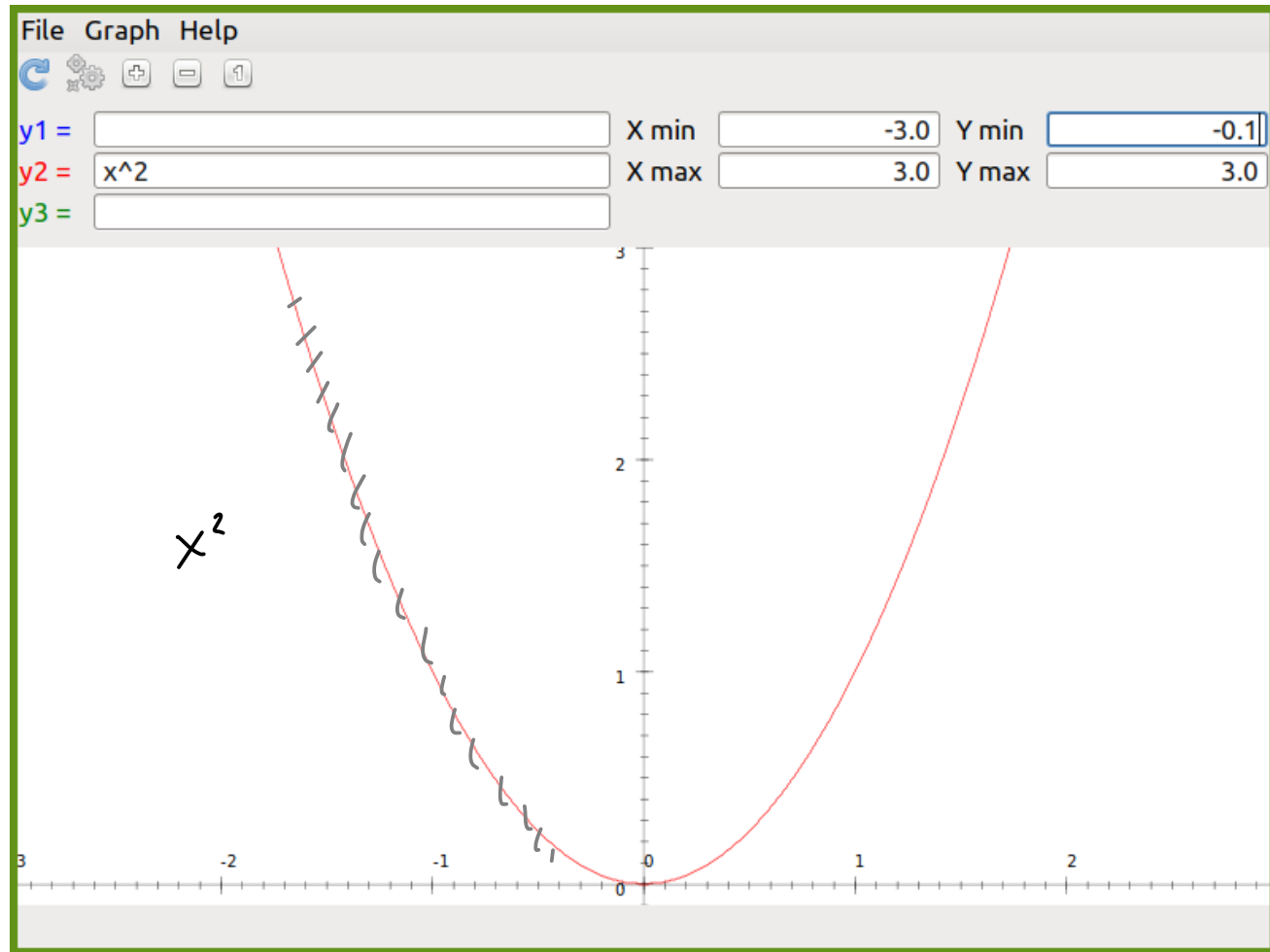
$$[0, \infty) \quad f(x) = x^2 \quad \boxed{1}$$

$$[0, \infty) \quad g(x) = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{x})^2 &= x \\ \sqrt{x^2} &= x \quad (x > 0) \end{aligned}$$

$$g'(x) \quad ? \quad \text{כ"ס} : \text{כ"ס}$$

$$\frac{1}{x} \quad \text{כ"ס} \quad \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2} \quad \text{כ"ס}$$



(א.ב.ק.י.)
 $\lambda \in \mathbb{R}$

const
 x^λ
 $\cos(x)$
 $\sin(x)$
 $h(x)$

אינטגרל - פונקציה

$\arccos(x)$
 $\arcsin(x)$
 e^x
 $\arctan(x)$

$$g = f^{-1}$$

$$g(y) = x$$

ז"ל

$$y := f(x) \quad : \text{מוסד}$$

$$\left(g[f(x)] \right)' = 1$$

$\Longleftarrow$

$$g[f(x)] = x$$

$$g \circ f = \text{id}$$

$$g'[f(x)] \cdot f'(x) = 1$$

המשפט הפוך

$$g'(y) \cdot f'(x) = 1$$

כאן f הפכה ב- (α, β)
במוקציה יציבה

לענין נניח $f(x)$ מונוטונית ויציבה ב- (α, β) .

נסמן ב- $g(y)$ את הפונקציה ההפוכה $f(x) = y$.

נניח $\alpha < a < \beta$: $f'(a) \neq 0$, ונסמן $b := f(a)$.

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

ז"ל

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

$$y = e^x \quad x = \ln(y)$$

$$f'(x) = \frac{1}{(\ln(y))'} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

$$g(y) = \ln(y)$$

$$f(x) := e^x \quad : \text{pro}$$

$$(e^x)' = ?$$

$$D_f = (0, \infty)$$

pro

$$I_m f = (0, \infty)$$

$$: f(x) \int e \text{ nicht}$$

$$f[g(y)] = y$$

$$f(x) = x^\lambda$$

$$\ln[f(x)] = \lambda \ln(x)$$

$$(x > 0)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, (x^\lambda)'$$

3

$$? x^\lambda \rightarrow x^{\lambda-1}$$

$$(\ln[f(x)])' = (\lambda \ln(x))'$$

$$\ln[f(x)] = \lambda \ln(x)$$

$$(\ln[f(x)])' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\lambda}{x}$$

$$/x$$

$$f'(x) = \frac{\lambda f(x)}{x} = \frac{\lambda x^\lambda}{x} = \lambda x^{\lambda-1}$$

$$(x^\lambda)' = \lambda x^{\lambda-1}$$

$$f(x) = a^x \quad \sqrt{e} \rightarrow 1.5217 \quad \boxed{4}$$

$$\ln f(x) = x \ln(a)$$

$$\left(\ln f(x) \right)' = \left(x \ln(a) \right)'$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(a)$$

$$\text{נגזרת כפול } \ln(a)$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \ln(a) = a^x \ln(a)$$

$$(a^x)' = a^x \ln(a)$$

$$g(x) = \arcsin(x) \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$a = \arcsin(b)$$

$$f(x) = \sin(x) \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$b = \sin(a)$$

ידוע

$$(\arcsin(x))' \quad \boxed{5}$$

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{(\sin x)' \Big|_{x=a}} = \frac{1}{\cos(a)}$$

$$\cos(a) = \cos(\arcsin(b)) = \sqrt{1 - [\sin(\arcsin(b))]^2} = \sqrt{1 - b^2}$$

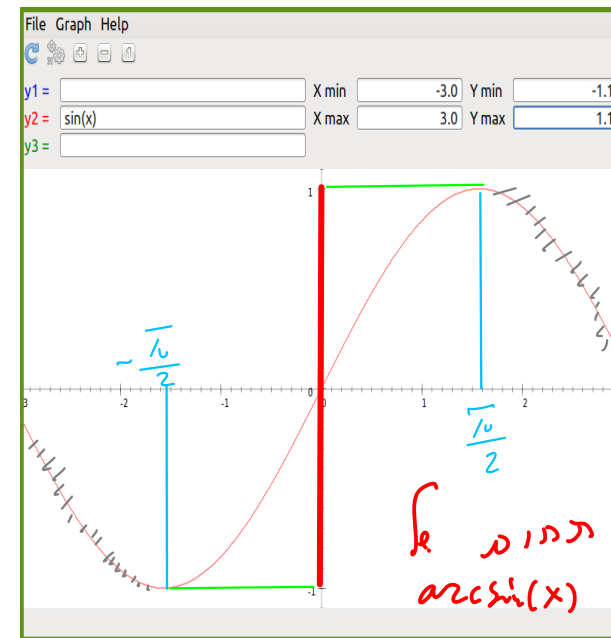
$$g'(b) = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}}$$

הסברתי צריך להגיד את $g'(b)$
בהיכאני b .

$$\sin(\arcsin(b)) = b \quad (2)$$

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \quad (3)$$

$$\left(\arcsin(x) \right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad |x| < 1$$



$$x \in (-\infty, \infty)$$

$$g(x) = \operatorname{arctg}(x)$$

$$a = \operatorname{arctg}(b)$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \operatorname{tg}(x)$$

$$b = \operatorname{tg}(a)$$

$$(\operatorname{arctg}(x))'$$

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{(\operatorname{tg}(x))'_{x=a}}$$

$$(\operatorname{tg}(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - (-\sin(x)) \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$$

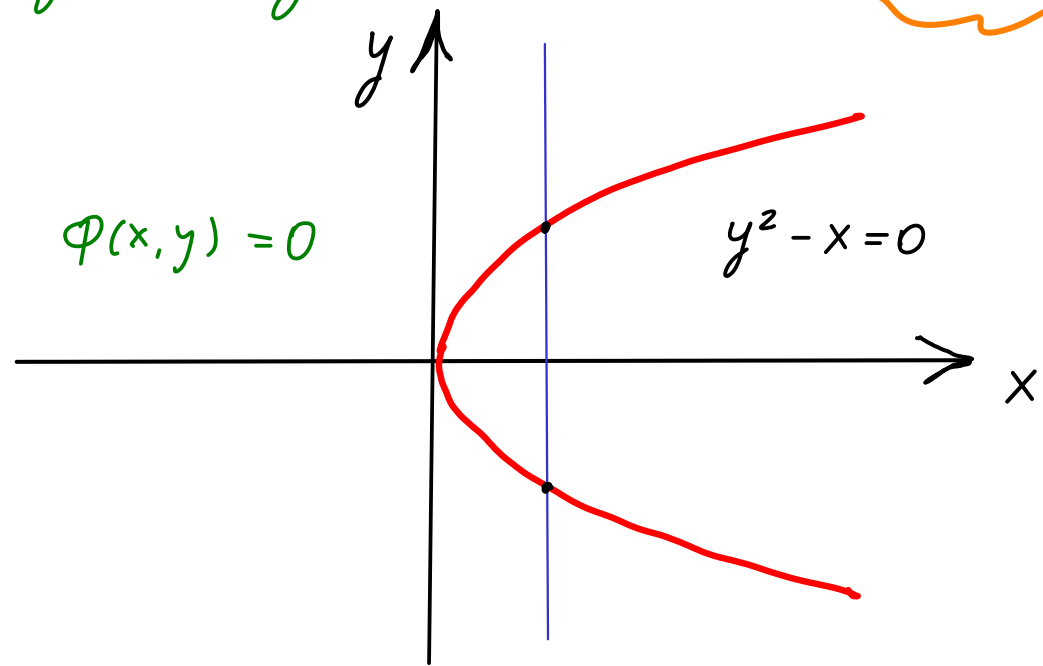
$$g'(b) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(x)} \Big|_{x=a} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(a)} = \frac{1}{1 + (\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(b)])^2} = \frac{1}{1 + b^2}$$

$$g'(b) = \frac{1}{1 + b^2}$$

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1 + x^2}$$

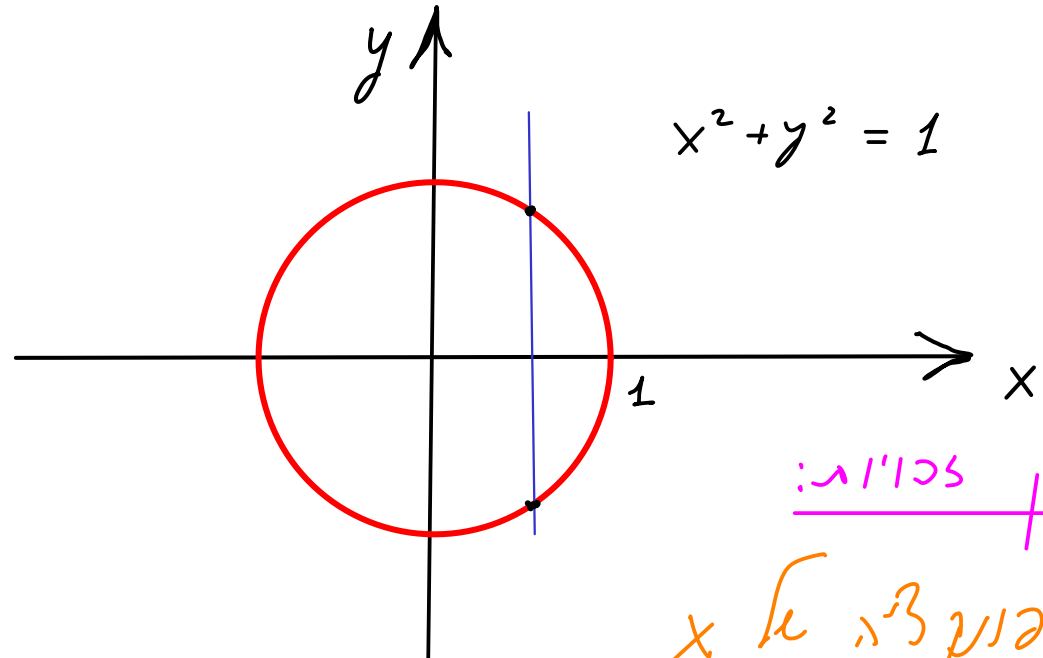
הנגזרת של פונקציה סימטרית

$$\Phi(x,y) = -x + y^2$$



לכן צריך להוסיף את הנגזרת.

$$\Phi(x,y) = x^2 + y^2$$

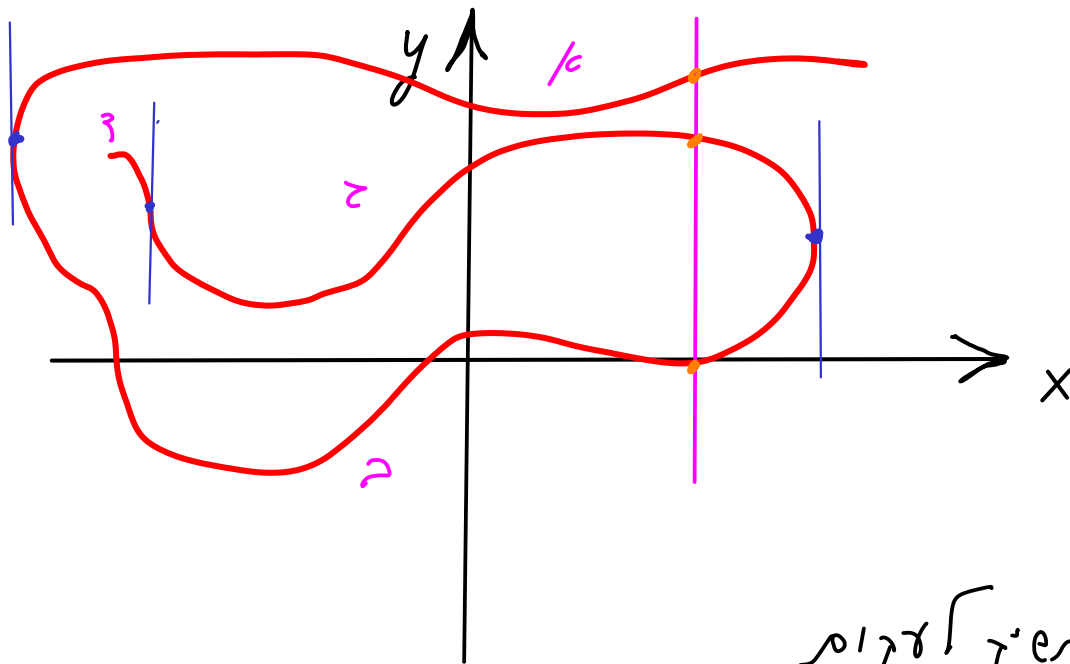


$$\Phi(x,y) = 1$$

עיון נוסף:

y פונקציה של x
x פונקציה של y

הערה: לכו ככל
 מקיז יש משך.



כל פונקציה סימטרית כמה
 פונקציות יחידות ("פונקציות")

הצורה: תלכידים א, ב, ג, ד - צופים
 כל פונקציה נולדת
 (כאן מצוין כל פונקציה של x)

נקודות גלגה - מקוצות שגבן קו המשיך לעקום
 מקבל לציב y.

ניתנה פונקציה $\Phi(x, y)$ 2 משתנים
 רצפה וז'ר'ה.

$\Phi(x, y) = C$ פונקציה סימטרית א

כאן $C \in \mathbb{R}$.

המקרה הראשון

"זכירה" $= \varphi - \psi$ יש "נצירות" המקיף הציבור.

המשפט הראשון - לא פונקציות אלאמנטריות נכון גם לפונקציות אחרות.

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2$$

7

$$\varphi'_x = 2x + 0 = 2x$$

$$\varphi'_y = 0 + 2y = 2y$$

נצירות המקיף φ : "נצירות" לפי x y קבוע

"נצירות" לפי y x קבוע

$$\varphi'_x = -y - 2x$$

$$\varphi'_y = 6y^5 - x$$

$$\varphi(x, y) = y^6 - xy - x^2$$

8

$$\varphi(x, y) = y + \cos(x) - \sin(y)$$

9

$$\varphi'_x = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\varphi'_y = 1 - \cos(y)$$

$y(x)$ בציור נראה כי נמצא נקודה יחידה:

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$y = y(x)$$

נציב את $y = y(x)$ ב- $x^2 + y^2 = 2$

$$(x^2 + y^2)' = 0$$

$$(x^2 + [y(x)]^2)' = 0$$

$$([y(x)]^2)' = 2y(x) \cdot y'(x)$$

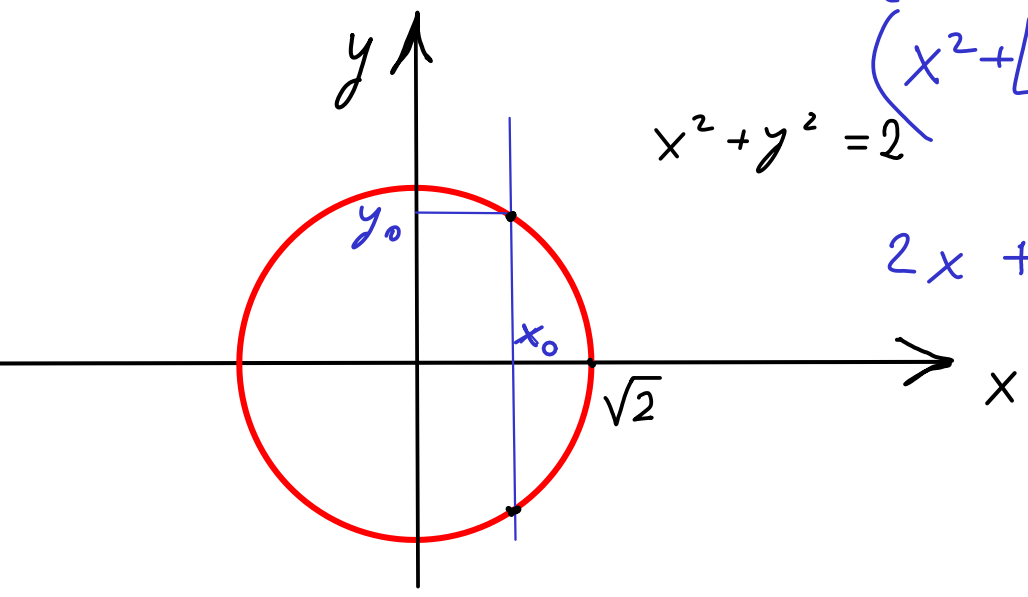
$$x^2 + y^2 = 2$$

$$2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

$$y'(x_0) = -\frac{x_0}{y_0}$$

כלומר, $y_0 = y(x_0)$



$$x_0 = \frac{1}{2}$$
$$y_0 = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$y(x_0) = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$y'(x_0) = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y_0^2 &= 2 \\ y_0^2 &= 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \\ y_0 &> 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_0 = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

נזכיר את פונקציה נמדד בלורה פונקציה

$$x \text{ ו- } y \text{ פונקציה } t$$

$$x(t), y(t)$$

t - פונקציה "חיצונית"

11 את הפונקציה הסגורה $x^2 + y^2 = 2$ נמן לבדוד פונקציה פונקציה:

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t \end{cases}$$

$$(\sqrt{2} \cos t)^2 + (\sqrt{2} \sin t)^2 = 2 \quad \text{אכן} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{לפי}$$

בעל נ"ח $y(x)$ נחשב בצורה פנימית:

$$x_0 := \varphi(t_0), \quad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

בן שהפונקציות $\varphi(t), \psi(t)$ מקיימות את התנאים הבאים:

- (א) $\varphi(t), \psi(t)$ זריחות בקטע (α, β)
- (ב) $\psi(t)$ הפיכה בקטע (α, β) , והפונקציה ההפוכה גם גזירה.
- (ג) $\dot{\varphi}(t_0) \neq 0$ עבור t_0 מסוים.

$$\dot{\varphi}(t_0) = \left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=t_0} \quad \text{כאן}$$

$$y'(x_0) = \frac{\dot{\psi}(t_0)}{\dot{\varphi}(t_0)} \quad \text{לפי}$$

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

$$x_0 = \varphi(t_0)$$

$$y_0 = \psi(t_0)$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$\psi = \gamma \circ \varphi$$

הוכחה:

$$\dot{\psi}(t_0) = \frac{d}{dt} \psi[\varphi(t)]_{t_0} = \gamma'[\varphi(t_0)] \cdot \dot{\varphi}(t_0) = \gamma'(x_0) \cdot \dot{\varphi}(t_0)$$

$\swarrow$ $\searrow$
 נגזרת $\quad$ נגזרת

: $\dot{\varphi}(t_0) \neq 0$ - $\Rightarrow$ נגזרת $\dot{\varphi}(t_0)$ אינה 0, $\dot{\varphi}(t_0) \neq 0$ - $\Rightarrow$ נגזרת

$$\frac{\dot{\psi}(t_0)}{\dot{\varphi}(t_0)} = \gamma'(x_0)$$

נגזרת

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= a(1 - \cos t) & \varphi(t) &= a(t - \sin t) \\ \dot{\psi}(t) &= a \sin t & \psi(t) &= a(1 - \cos t)\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$y'(x_0) = \frac{1 - \cos(t_0)}{\sin(t_0)}$$

$$x_0 = \varphi(t_0) = a(t_0 - \sin t_0)$$

$$y(1) = e + 1$$

$$x_0 = 1$$

$$t_0 = 1 \quad \begin{cases} y(t) = t + e^t \\ x(t) = t^2 + \ln t \end{cases}$$

$$\varphi(t) = t^2 + \ln t$$

$$\psi(t) = t + e^t$$

$$y'(1) = ?$$

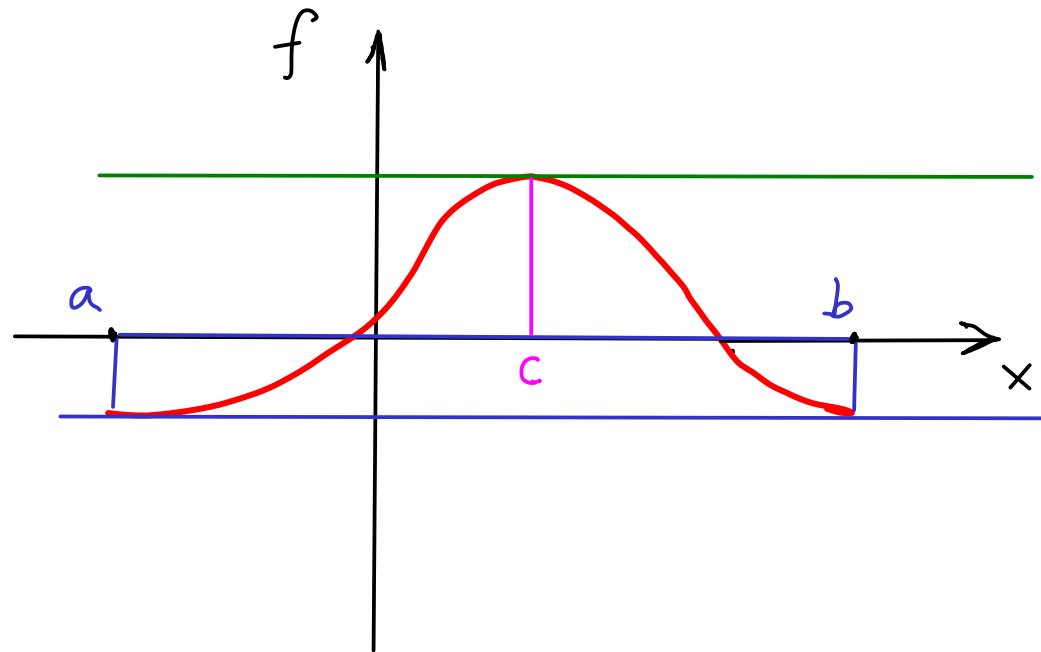
$$y'(1) = \frac{\dot{\psi}(1)}{\dot{\varphi}(1)} = \frac{1 + e^t}{2t + \frac{1}{t}} \Big|_{t=1} = \frac{t(1 + e^t)}{2t^2 + 1} \Big|_{t=1} = \frac{1 + e}{3}$$

הצורה ניתן לזכור את הקיבוע באינטגרל $y(x)$ סגור $x=1$

$$L_1 = y(1) + y'(1) dx = y(1) + y'(1) \cdot (x-1) = e+1 + \frac{1+e}{3} (x-1) =$$

$$= \frac{1+e}{3} x + \left(e+1 + \frac{e+1}{3} \right) = \frac{e+1}{3} x + \frac{4}{3} (e+1)$$

משפטים מרכזיים על פונקציות גזירות



משפט (Michel Rolle)

נניח שהפונקציה $f(x)$ מקיימת את התנאים הבאים:

① רציפה בקטע $[a, b]$

② גזירה בקטע (a, b)

③ $f(a) = f(b)$

אז קיימת $a < c < b$: $f'(c) = 0$

הוכחה: לפי משפט Cauchy על פונקציות גזירות סדור, $f(x)$ ו $g(x) = x$ מקיימים את תנאי Cauchy. הוכחה: לפי משפט Cauchy על פונקציות גזירות סדור, $f(x)$ ו $g(x) = x$ מקיימים את תנאי Cauchy. הוכחה: לפי משפט Cauchy על פונקציות גזירות סדור, $f(x)$ ו $g(x) = x$ מקיימים את תנאי Cauchy.

מקרה 1° הפונקציה $f(x)$ קבועה: $f(x) = \text{const} \Leftrightarrow f'(x) \equiv 0 \Leftrightarrow (f(x) = c) \Leftrightarrow c = x$

מקרה 2° $f(x) \neq \text{const} \Leftrightarrow f$ איננה קבועה $[a, b]$ על $\frac{1}{2}$ ^{לפחות} קטע c_1, c_2 ו- $c_1 < c_2$ כך ש- $c_1, c_2 \in [a, b]$ ו- $f(c_1) \neq f(c_2)$

בכיוון: $f(c_1) \neq f(c_2) \Rightarrow$ לא נמצא קטע $[a, b]$ שבו f קבועה, $c_1 = a$ או $c_2 = b$ אינן מקושרות, $(a, b) \ni c_2$ ו- $c_1 = a$ או $c_2 = b$ אינן מקושרות.

לכן יבוא לקבוע c_1 ו- c_2 נמצא בקטע $[a, b]$ ובקטע $c_1 - c_2$ ו- $c_2 - c_1$ בקטע $[a, b]$ כי במקרה כזה היה

$$\nRightarrow f(a) = f(c_1) = f(c_2) = f(b)$$

c מקושר קטע, $f'(c) = 0$, Fermat (על פ' f), $f'(c) = 0$

ל.ע.נ

למה (J.L. Lagrange)

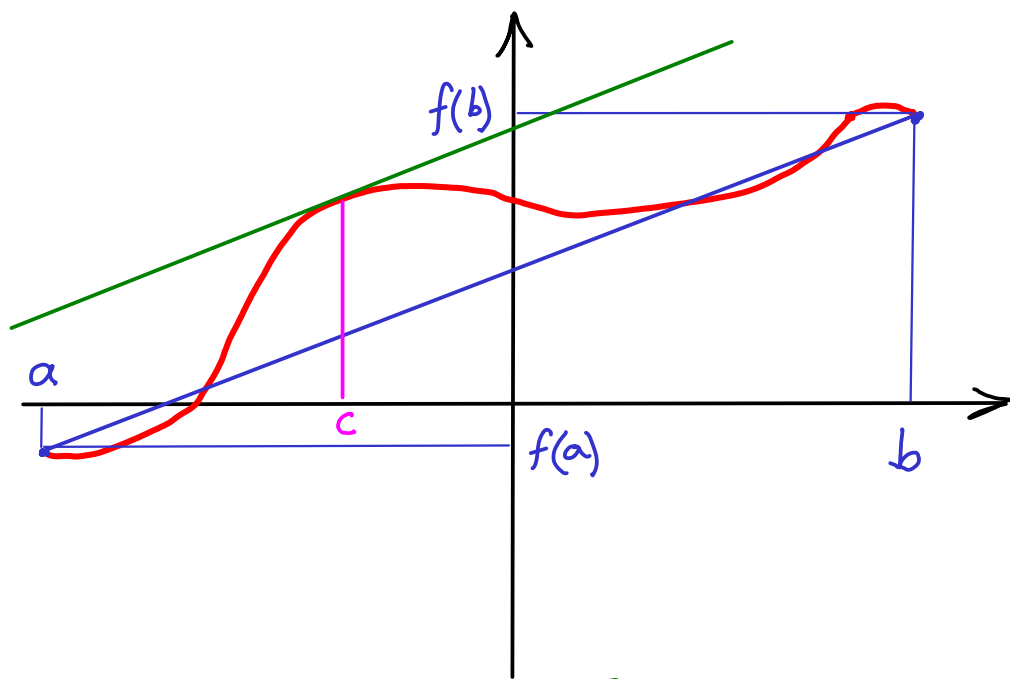
נניח שהפונקציה $f(x)$ מתמדת ונגזמת על הקטע $[a, b]$:

① הנקודה c בקטע $[a, b]$

② הנגזרת בקטע (a, b)

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

כאשר $a < c < b$



הנקודה c נקבעת על ידי $f(a) = f(b)$ (Rolle)

הוכחה: נגדיר פונקציה $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

הפונקציה $g(x)$ מתמדת ונגזמת על הקטע $[a, b]$: Rolle (1), (2) $g(a) = g(b)$

נבדוק (3):

$$g(a) = \cancel{f(a)} - \cancel{f(a)} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 0 = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\cancel{b - a}} (\cancel{b - a}) = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0$$

$$g(a) = g(b) \quad \text{וכן}$$

$$g'(c) = f'(c) - 0 - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 1 = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Lt.N

pdf

- $g'(c) = 0: \exists c \in (a, b)$, Rolle Cond.

(A. Cauchy) לעז

נניח $f(x), g(x)$ מתמשכות ויחידה על $[a, b]$ והמשותף:

1) $g'(x) \neq 0$ בקטע (a, b)

2) $g'(x) \neq 0$ בקטע (a, b)

3) $a < x < b$ כל x $g'(x) \neq 0$

אם קיימת $a < c < b$:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

הוכחה: נגדיר פונקציה

$$h(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a))$$

כל $h(x)$ מתקיימת הנאימל (L'Hôpital's Rule)

לעז

$$f'(c_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g'(c_2) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

אם $c_1 \neq c_2$ כל c

J. Bernoulli - l'Hôpital

$$\begin{aligned} \infty + \infty &= \infty \\ \lambda \infty &= \infty \quad (\lambda > 0) \\ \lambda \infty &= -\infty \quad (\lambda < 0) \\ \frac{0}{\infty} &= 0 \end{aligned}$$

לדל

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

נניח $f(x), g(x)$ נקייטו $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ו- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

1. $x=a$ נקייטו f, g בסדרה נקייטו $x=a$

2. $x=a$ נקייטו f', g' ו- $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = L$ ו- $\lim_{x \rightarrow a} g'(x) \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

דיווח:

(1) נניח $f(a) = g(a) = 0$ -

הכלל - $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ -

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$$

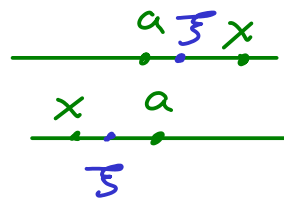
$\tilde{f}(x)$ כגון $\tilde{f}(x)$ סביב $x=a$

נניח $f(x)$ לא נגזרת

אולי $g(x)$ נגזרת

(2) Cauchy Criterion: עבור כל $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ כזה שכל x, y המקיימים $|x - y| < \delta$ מקיימים $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$



$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad | \text{ } \frac{0}{0}, \xi \rightarrow a \quad \text{s/o} \quad x \rightarrow a \quad \text{p/o} \quad (3)$$

- Ex - 1

$\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos x \Big|_{x=0} = \cos 0 = 1$$

! $\mathbb{R} \int_0^{\infty} \cos x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{3x} =$$

2

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos(5x)}{3} = \frac{5}{3} \cos 0 = \frac{5}{3}$$

"0/0"

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} =$$

3

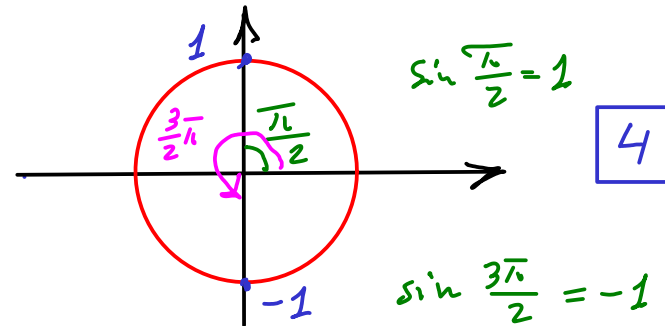
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$f(x) = \ln(1+x)$$

$$g(x) = x$$

$$y \rightarrow \infty \quad t := \frac{1}{y} \rightarrow 0+$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(3x)} =$$



$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{3 \frac{1}{\cos^2(3x)}} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(3x)}{\cos x} \right)^2 =$$

$$(\operatorname{tg}(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - (-\sin(x))(\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(3x)}{\cos x} \right)^2 = \frac{1}{3} \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-3 \sin(3x)}{-\sin(x)} \right)^2 = 3 \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(3x)}{\sin(x)} \right)^2 = 3 \left(\frac{\sin(\frac{3\pi}{2})}{\sin \frac{\pi}{2}} \right)^2 = 3 \left(\frac{-1}{1} \right)^2 = 3$$

$\Rightarrow 3, x^2$
 $\mathbb{R} \rightarrow$

$\frac{0}{0}$

B-L $\int$ $\rightarrow$ $\lim$
 $\rightarrow$ $\rightarrow$ $\rightarrow$

Wille Wille

$$(tg(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$f(x) = tg(x) - \frac{1}{3} tg^3(x) + \frac{1}{5} tg^5(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} \cdot tg^2(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5} \cdot tg^4(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)} + \frac{\sin^4(x)}{\cos^6(x)} = \frac{1}{\cos^6(x)} \left(\cos^4(x) - \sin^2(x) \cdot \cos^2(x) + \sin^4(x) \right) =$$
$$= \frac{\cos^6(x) + \sin^6(x)}{\cos^6(x)} = 1 + tg^6(x)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a := \cos^2(x)$$

$$b := \sin^2(x)$$

$$\Rightarrow (\cos^2(x))^3 + (\sin^2(x))^3 = \overbrace{(\cos^2(x) + \sin^2(x))}^{=1} (\cos^4(x) - \cos^2(x) \sin^2(x) + \sin^4(x)) =$$
$$= \cos^4(x) - \cos^2(x) \sin^2(x) + \sin^4(x)$$

? $0 \rightarrow \text{L'Hôpital's rule}$ $f'(x), f(x)$ $x=0$: L'Hôpital's rule

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2(x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) \cdot \cos(x)}{1} = 2 \sin(0) \cdot \cos(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0 = f(0)$$

$\frac{0}{0}$ $x=0 \rightarrow \text{L'Hôpital's rule}$ $f(x)$ L'Hôpital's rule

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\frac{x \neq 0}{f'(x)} = \left(\frac{\sin^2(x)}{x} \right)' = \frac{2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot x - \sin^2(x)}{x^2} = 2 \frac{\sin(x)}{x} \cdot \cos(x) - \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) - \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \right)^2 = 2 \cdot 1 = 1$$

$0 \rightarrow \text{L'Hôpital's rule}$ $f'(x)$ L'Hôpital's rule

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \frac{\sin(x)}{x} \cos(x) - \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

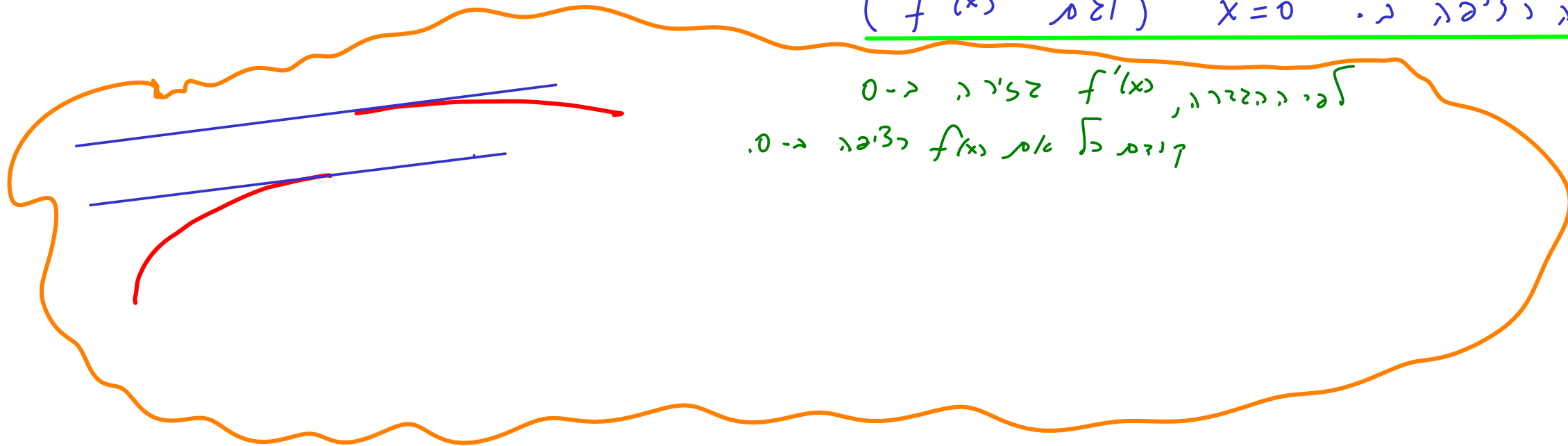
$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
 . האם $f(x), f'(x)$ מתאנים ב- $x=0$?

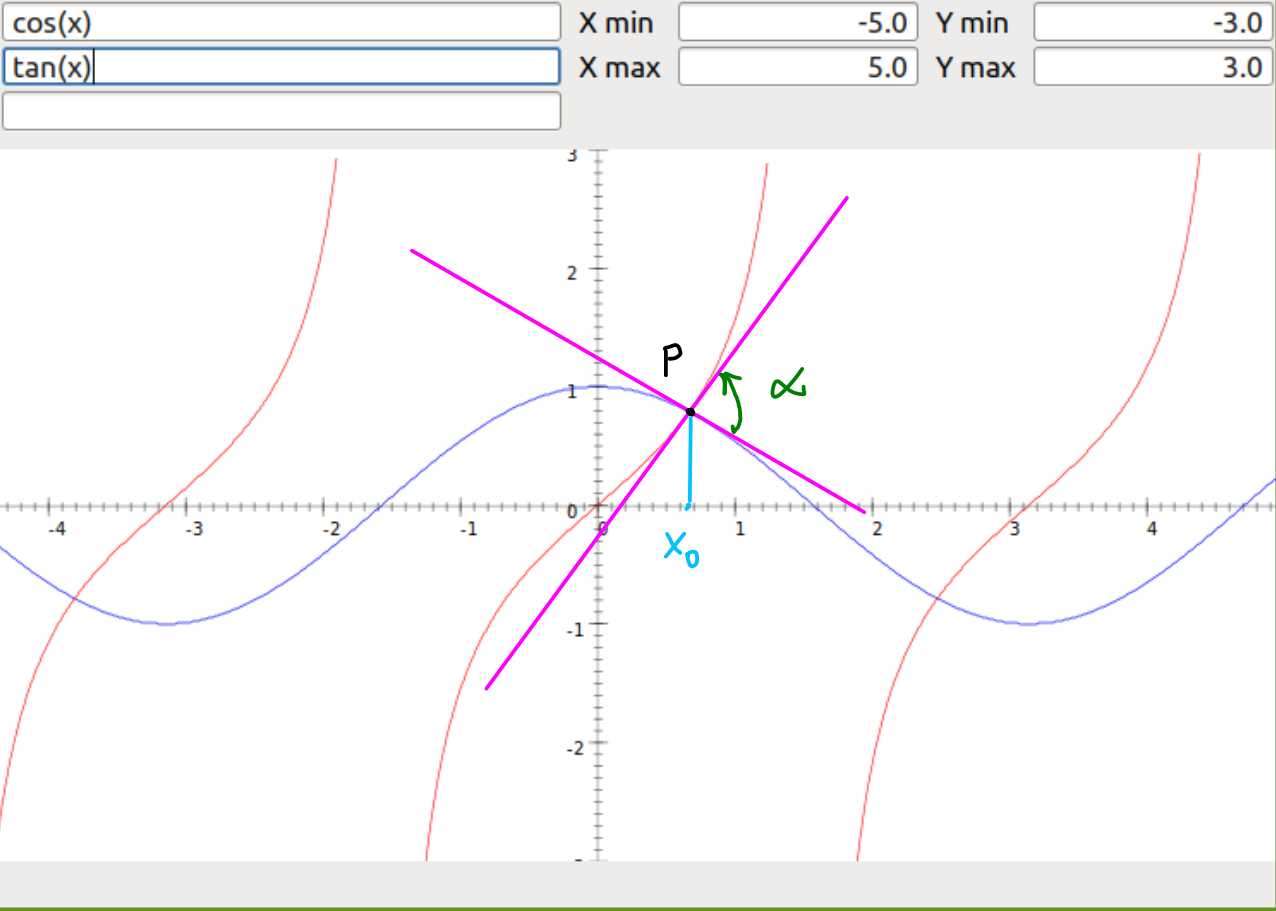
$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$

לכן $x=0$ הוא נקודה אי-רציפה מסוג ב'

לכן $f(x)$ אינה רציפה ב- $x=0$ (אם $f'(x)$)

לפי ההגדרה, נא f' קיימת ב- 0
 קודם כל אם נא f רציפה ב- 0 .





$$y = \cos x \quad , \quad y = \operatorname{tg}(x) \quad \text{הצטווים} \quad \left| \begin{array}{l} \text{הצטווים} \\ \text{הצטווים} \end{array} \right. \quad \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{הצטווים}$$

$$: P \quad \text{הצטווים} \quad \text{הצטווים} \quad (1$$

$$P(x_0, y_0)$$

$$\begin{cases} \cos(x) = \operatorname{tg}(x) \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\cos^2(x) = \sin(x)$$

$$1 - \sin^2(x) = \sin(x)$$

$$t := \sin(x)$$

$$t^2 + t - 1 = 0$$

$$t > 0$$

$$x_0 = \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \left. \begin{array}{l} \\ t > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$y_0 = \cos(x_0) = \cos\left(\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4-5+2\sqrt{5}-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2(\sqrt{5}-1)} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

ס'פירא נ"ל לזר, (2

$$y = ax + b$$

$$y_0 = ax_0 + b \Rightarrow$$

$$a = y'(x_0)$$

$$b = y_0 - y'(x_0)x_0$$

אנחנו נרצה לראות:

$$ax - y = c$$

$$f'(x_0)x - y = c$$

$$\cos \alpha = \frac{|f'_1(x_0)f'_2(x_0) + 1|}{\sqrt{(f'_1(x_0))^2 + 1} \cdot \sqrt{(f'_2(x_0))^2 + 1}}$$

$$\Leftrightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} f'(x_0) \\ -1 \end{pmatrix} : \text{וקווינטינל}$$

$$f_1(x) = \tan(x) \quad f_1'(x_0) = \frac{1}{\cos^2(x_0)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

$$f_2(x) = \cos(x) \quad f_2'(x_0) = -\sin(x_0) = -\sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{|-1+1|}{\sqrt{\cdot}\sqrt{\cdot}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$f(x) = cx^3$ $\square$ $\text{תנאי קצה: } y = 1 - 2x$ $\text{ב' } y = 1 - 2x$

$x = x_0$ $\text{הנקודה } f(x) \text{ על הקו } y = 1 - 2x$

$$y = f'(x_0)x + b$$

$$f'(x_0) = 3cx_0^2$$

$$b = y_0 - f'(x_0) \cdot x_0 = cx_0^3 - 3cx_0^2 \cdot x_0 = -2cx_0^3$$

$$y = 3cx_0^2x - 2cx_0^3$$

הנקודה היא

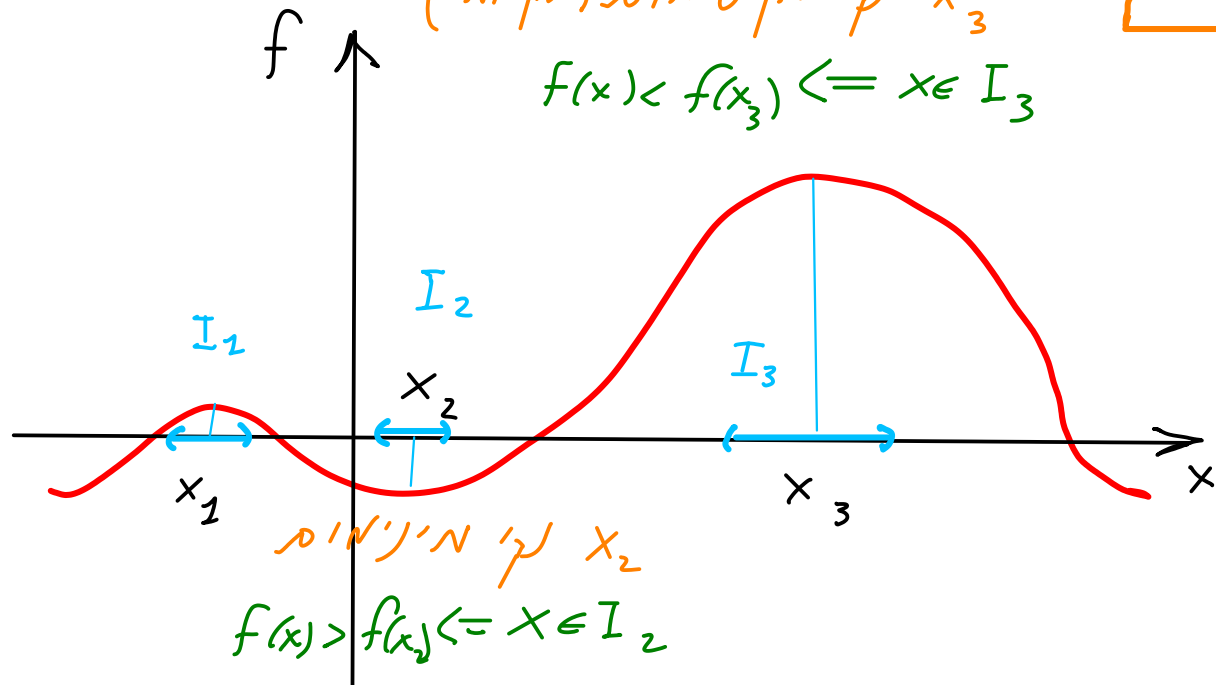
$$\begin{cases} 3cx_0^2 = -2 \\ -2cx_0^3 = 1 \end{cases}$$

$\square$ $y = 1 - 2x$ הנקודה היא

$$\frac{3cx_0^2}{-2cx_0^3} = \frac{-2}{1} \Rightarrow \frac{3}{2x_0} = 2 \Rightarrow x_0 = \frac{3}{4} \Rightarrow c = \frac{-2}{3x_0^2} = -\frac{2 \cdot 16}{9 \cdot 3} = -\frac{32}{27}$$

תקידה בולטת

x_3 נקודת מינימום (מקומי)
 $f(x) < f(x_3) \iff x \in I_3$



x_2 נקודת מקסימום (מקומי)
 $f(x) > f(x_2) \iff x \in I_2$

נקודת מינימום

נקודת מקסימום = נקודת מינימום

נקודת מינימום = נקודת מקסימום

x_0 נקודת מינימום (מקומי) אם קיימת סביבה I של x_0 : $f(x) < f(x_0) \forall x \in I$
 x_0 נקודת מקסימום (מקומי) אם קיימת סביבה I של x_0 : $f(x) > f(x_0) \forall x \in I$

מ/ע $f(x)$ ו/או מקור קו' f' מ/ע $\Phi_f \ni x_0$ נ"ח

$$x = x_0, \quad \text{and} \quad \text{if} \quad f'(x_0) = 0 \quad \textcircled{2}$$

$g(x) = x^2$ $\gamma, \lambda \neq 0$ $f(x) = |x|$ $\gamma, \lambda \neq 0$ $x = 0$ 2

לכן צריך להפחית מקצומו קיצוץ כ"ן מקוצו קיצוץ.

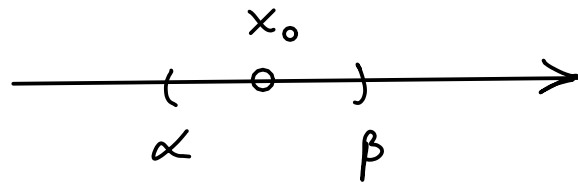
[illegible]

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \int \cdot 3 \quad , a \leq x_1 < x_2 \leq b \quad \text{np} \quad \textcircled{2}$$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) \quad : a < c < b \quad \text{D''T, Lagrange Caen '08}$$

$$f(x_2) - f(x_1) <= f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(c) > 0 \quad , \text{ „steil“ } \nearrow$$

Fe-N



נניח $\exists x_0, f(x)$ נגזרת ומה לענ

$$x_0 \in [\alpha, \beta] \leadsto \exists \delta, \beta, f(x) \quad (1)$$

$$(\alpha, \beta) \setminus x_0 \rightarrow \gamma \cup N \text{ ב } \gamma \cap \gamma' \neq \emptyset \text{ ב } f(x) \text{ (2)}$$

$$(\alpha, x_0) \rightarrow f'(x) > 0 \quad (3)$$

$$(x_0, \beta) \rightarrow f'(x) < 0 \quad (4)$$

$$X = X_0 \rightarrow (N, \gamma_N) \text{ o/n } \gamma_N \text{ e } f \text{ - } \int \gamma_N$$
[illegible]

הוכחה: לכל $\epsilon > 0$, נבחר $\delta > 0$ כך ש
 $f(x) < f(x_0) - \epsilon$ לכל $x \in [x_0, x_0 + \delta]$
 $f(x) > f(x_0) + \epsilon$ לכל $x \in [x_0 - \delta, x_0]$
נניח $f(x) < f(x_0) - \epsilon$ לכל $x \in [x_0, x_0 + \delta]$

נניח

$$f(x) < f(x_0) - \epsilon \quad (1)$$

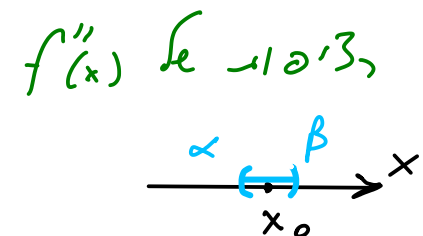
$$f'(x_0) = 0 \quad (2)$$

$$f''(x_0) < 0 \quad (3)$$

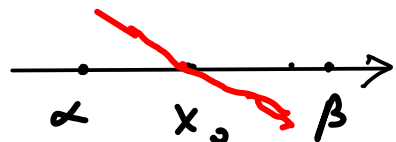
$$f(x) < f(x_0) - \epsilon \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \delta]$$

הוכחה: נניח $f''(x_0) < 0$. נבחר $\epsilon > 0$ כך ש
 $f''(x) < -2\epsilon$ לכל $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
 $f(x) < f(x_0) - \epsilon$ לכל $x \in [x_0, x_0 + \delta]$

$$f(x) < f(x_0) - \epsilon \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \delta]$$



$f'(x)$



למשל נסתכל ב-2) נראה שיש נקודה $f'(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha, x_0] \text{ פקודה } f'(x) \leq f''(x_0) < 0 \\ [x_0, \beta) \text{ פקודה } f'(x) \geq f''(x_0) < 0 \\ f'(x_0) = 0, \beta = 0 \end{cases}$$

$f'(x)$
 $(\alpha, x_0]$ - נראה
 $[x_0, \beta)$ - נראה

נראה

נראה שיש נקודה $f(x)$ ב- x_0

$$f(x) = 2\sin(x) + \cos(2x)$$

4

בנקודה $f(x)$ נראה שיש נקודה $f(x)$ ב- $[0, 2\pi]$

נקודה $f'(x) = 0$: $f(x)$ נראה שיש נקודה $f(x)$ ב- $(\mathbb{R})$

$$f'(x) = 2 \cos(x) - 2 \sin(2x)$$

$$\cos(x) - \sin(2x) = 0$$

$$\cos(x) - 2 \sin(x) \cdot \cos(x) = 0$$

$$\cos(x) [1 - 2 \sin(x)] = 0$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

$$\cos(x) = 0 \quad (1^\circ)$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$[0, 2\pi]$ $\mathbb{R}^2$

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \quad (2^\circ)$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{6}$$

$$x_4 = \frac{5}{6}\pi$$

1, 2, 3, 4
no
10

$$x_0 = 0$$

הנקודה הקריטית

$$\Leftrightarrow f'(x) = -4x^3 = 0$$

$$f(x) = 1 - x^4$$

1

$$f''(x_0) = -12x_0^2 = 0$$

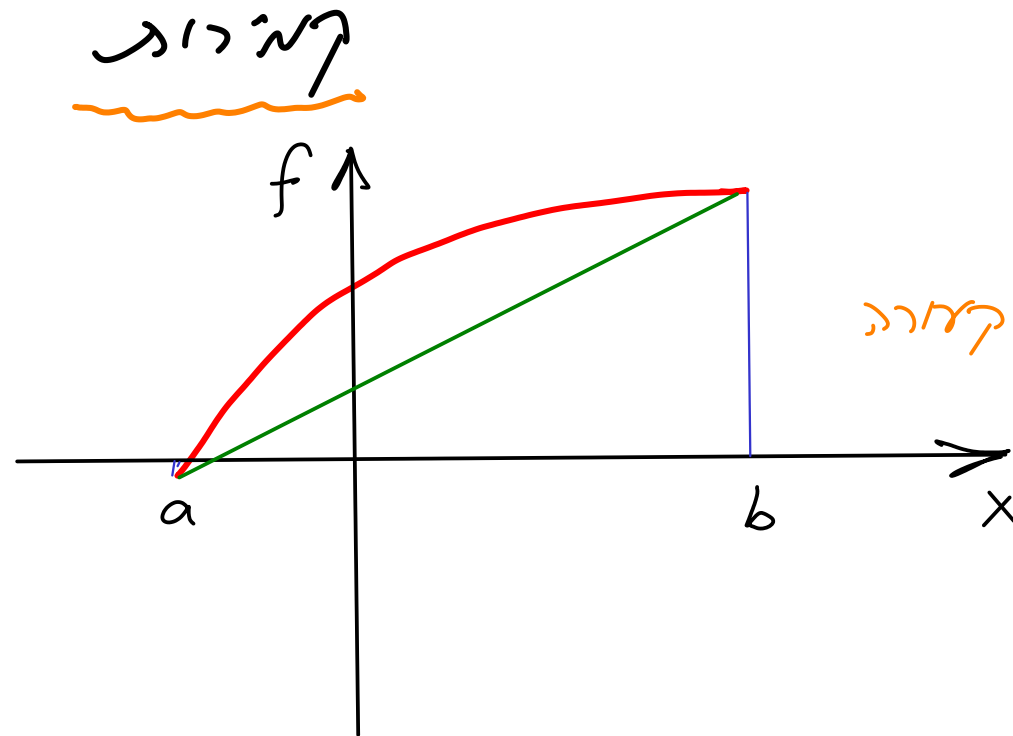
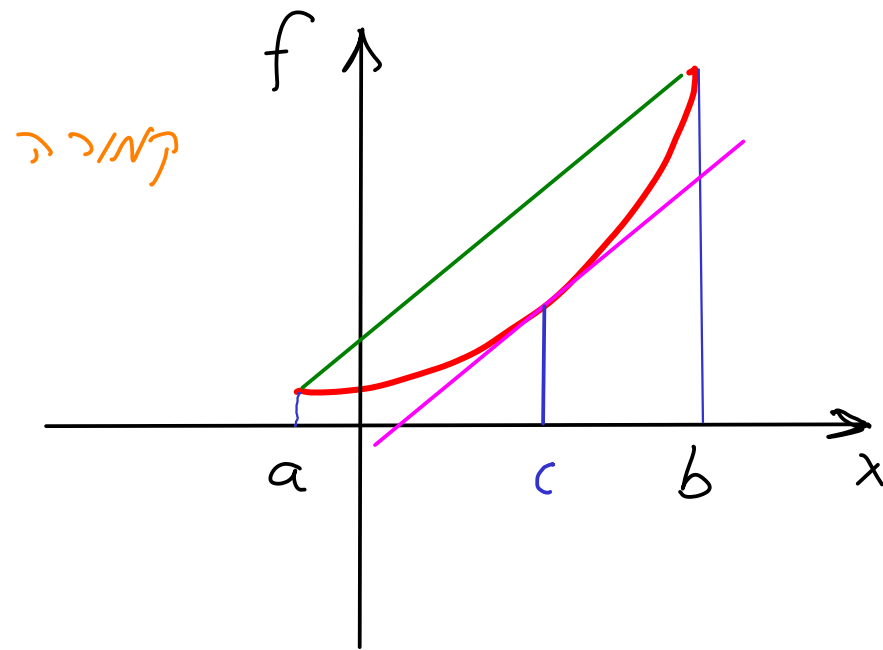
הנקודה הקריטית $x=0$ $\Rightarrow$



$$f'(x) = -4x^3 > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

$$f'(x) = -4x^3 < 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \text{הנקודה הקריטית } x_0 \Leftrightarrow \mathbb{R} \text{ לכל } x \in \mathbb{R} \text{ } f(x)$$



ה'ג: Lagrange's Theorem: $f(x)$ is continuous on (a, b) and differentiable on $[a, b]$ $\Rightarrow$ there exists $c \in (a, b)$ such that $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$f(x)$ is concave up on $[a, b]$ and differentiable on $[a, b]$ $\Rightarrow$ the secant line is above the function.

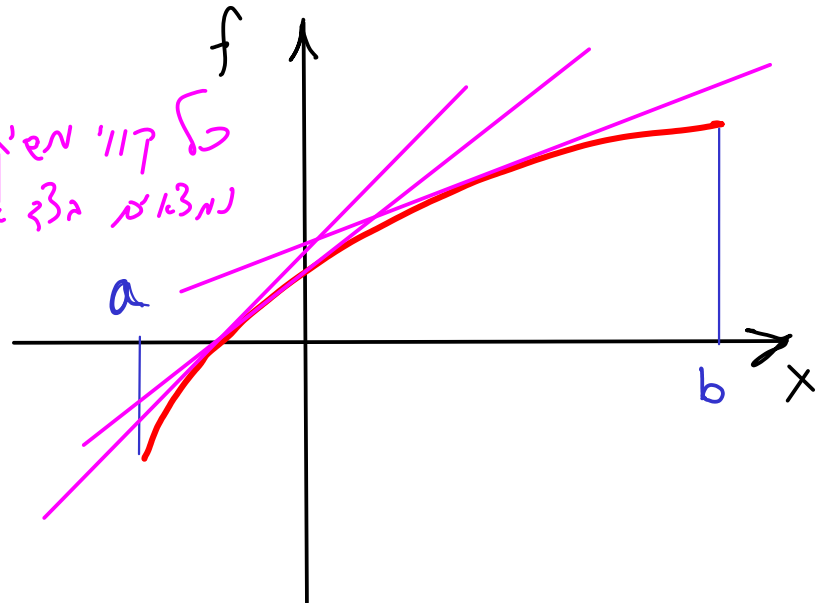
$$B = f(x_0) - f'(x_0)x_0 \quad \text{where} \quad y = f(x) \quad \text{and} \quad x = c \quad y = f'(x_0)x + B \quad \text{at} \quad x = x_0$$

the function $f(x)$ is concave down $\Rightarrow$ the secant line is below the function.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \text{and} \quad y = f'(x_0)x + B$$

לפי $f(x) - [f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)] > 0$ נקרא $a < x_0 < b$ נקרא $[a, b]$ קטע $f(x)$ קמורה

$$a \leq x \leq b \quad \text{כאשר} \\ x \neq x_0$$



נניח $f(x)$ זעירה ב (a, b) $f(x) - f(x_0) < f'(x_0)(x-x_0)$ נקרא $[a, b]$ קטע $f(x)$ קמורה $a < x_0 < b$ נקרא x $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ x \neq x_0 \end{cases}$

לענין נניח $f(x)$ זעירה פשוטה ב (a, b)

$f''(x) < 0$ ב $[a, b]$

זעירה ב $[a, b]$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$$

הוכחה: (1) נניח $f(x)$ זעירה ב $[a, b]$ נקרא $x = x_0$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f(x) - y < 0$$

$$: \int'' 3$$

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) < 0$$

x_0, x | c | λ | x_0 | $f(x)$ | Lagrange Coefficient (2)

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



$$f(x) = f(x_0) + f'(c) \cdot (x - x_0)$$

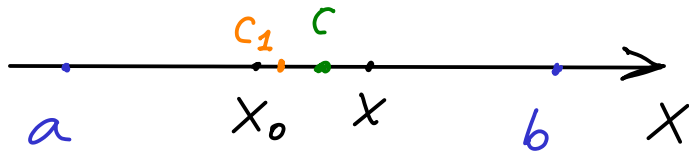
$$f(x) - y = \cancel{f(x_0)} + f'(c) \cdot (x - x_0) - [\cancel{f(x_0)} + f'(x_0) \cdot (x - x_0)] = (f'(c) - f'(x_0)) (x - x_0) \quad (3)$$

c, x_0 / c_1 143 NS / c, x_0 / c_2 $f'(x)$ 143 NS Lagrange 143 NS 143 NS (4)

$$f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(c - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad f''(c_1) = \frac{f'(c) - f'(x_0)}{c - x_0}$$

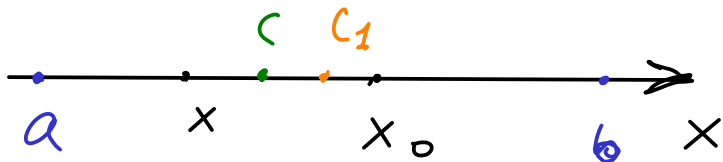
$$f(x) - y = (f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)) \quad \therefore (3 \rightarrow (4 \text{ א/כ } 2, 3) (5$$

? 1625 be / n 022 n



$$f(x) - y < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - x_0 > 0 \\ c - x_0 > 0 \\ f''(c_1) < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x > x_0 \quad (0a$$

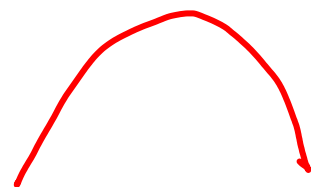
: (62222 n n n 105



$$f(x) - y < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - x_0 < 0 \\ c - x_0 < 0 \\ f''(c_1) < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x < x_0 \quad (0b$$

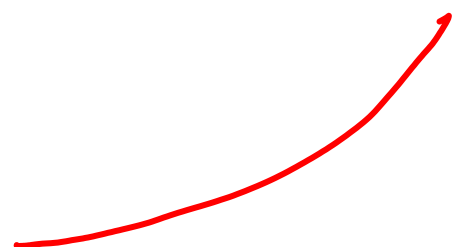
י.ע.נ

|| נקודת ע"נ' מקסימום → קצרות א $\gg \beta$ א $f(x)$ קרית נקודת מינימום



$$\boxed{2} \quad f(x) = 2 - x^2 \quad \text{ש"ר ב} \mathbb{R} \quad (\text{א'סוף ברמ'ס}).$$

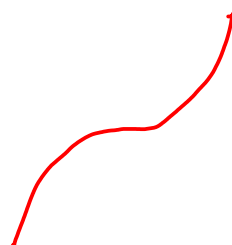
$$f'(x) = -2x \quad f''(x) = -2 < 0 \quad \Leftarrow f(x) \text{ קמורה ב} \mathbb{R} \quad (= \text{קמורה ב} \mathbb{R}).$$



$$\boxed{3} \quad f(x) = e^x \quad f''(x) = e^x > 0 \quad \Leftarrow \text{קמורה ב} \mathbb{R}$$

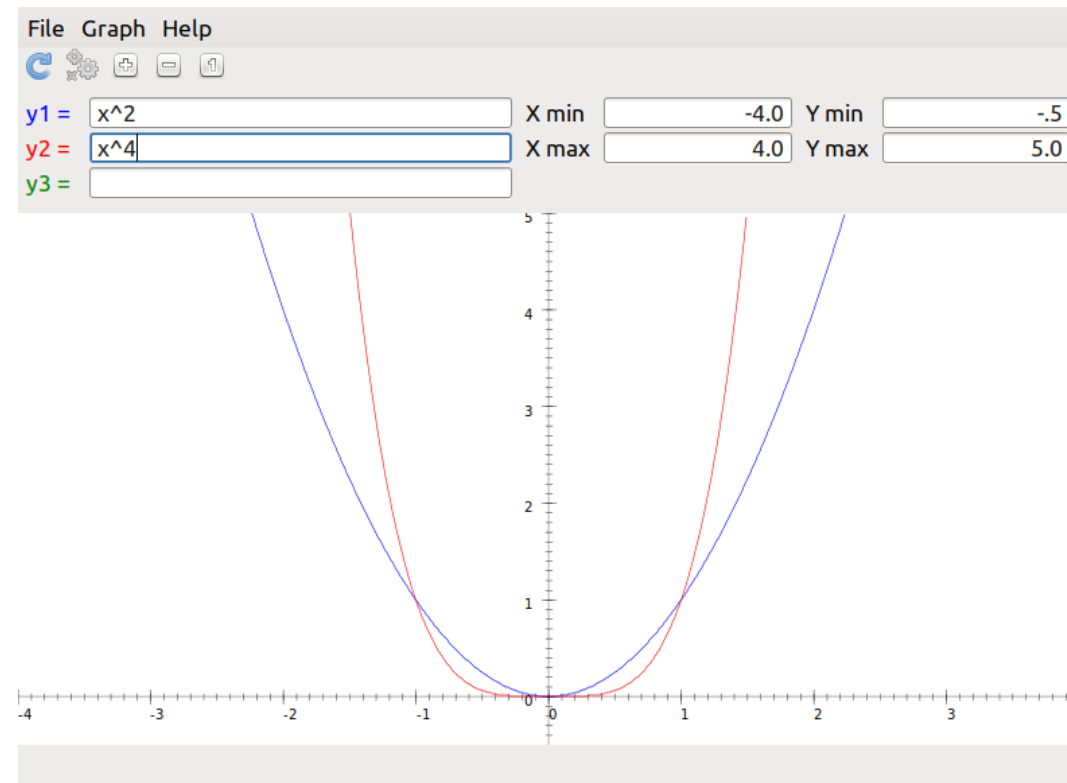
$$\boxed{4} \quad f(x) = x^3 \quad f''(x) = 6x \quad f''(x) < 0 \quad (-\infty, 0) \quad \text{קמורה ב} \mathbb{R} \quad (-\infty, 0]$$

$$f''(x) > 0 \quad (0, \infty) \quad \Leftarrow \text{קמורה ב} \mathbb{R} \quad [0, \infty)$$



$$x_0 = 0 \quad \Leftarrow \text{נקודת מינימום ב} \mathbb{R} \quad x_0 = 0$$

$f(x) = x^4$ 5
 $f''(x) = 12x^2 > 0$
 $(x \neq 0)$
 $\Rightarrow$ קמור $\rightarrow (-\infty, \infty)$



בעל נניח -

1/ $f(x)$ זנצרה בסדרה $x = x_0$, וזנצרה ביחסיים בסדרה $x = x_0$ על x_0 .

2/ $f''(x_0)$ אינה ק"מ"מ או שזה 0.

3/ $f''(x)$ משנה את הסימן ב $x = x_0$.

אם x_0 היא נקודה פנימית של $f(x)$

נקסימים ומינימום מקסי

$$f(x) = x^3 - 3x + 3 \quad \text{על המרחב } [-3, \frac{3}{2}] \quad \text{הפונקציה } f(x) \text{ היא}$$

6

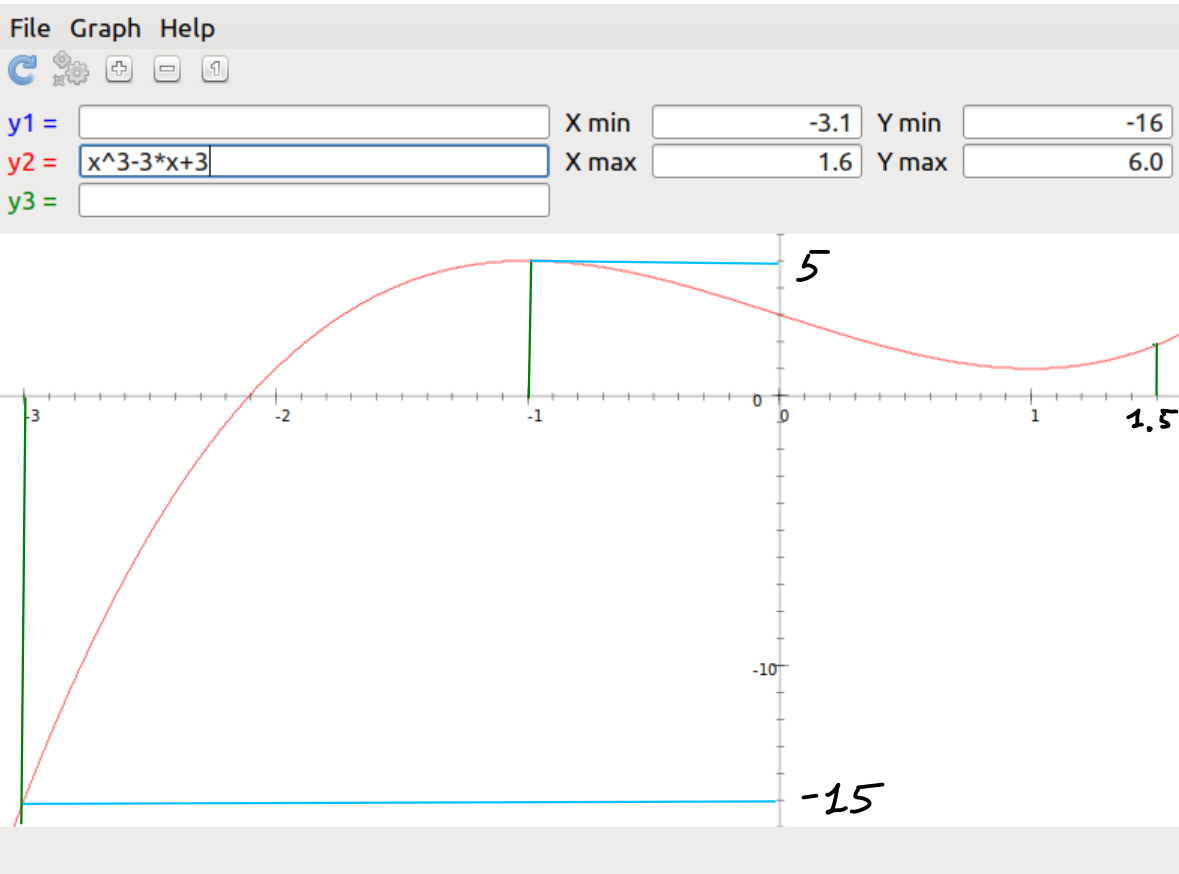
$$\text{Weierstrass} \quad \text{על המרחב } [-3, \frac{3}{2}] \quad \text{הפונקציה } f(x) \text{ היא}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \quad \text{נקודות קיצון:}$$

$$x_2 = -1, \quad x_1 = 1 \quad \text{כי} \quad 3(x^2 - 1) = 0$$

$$(2) \quad \text{נקודות קצה:} \quad x_3 = -3, \quad x_4 = \frac{3}{2}$$

ואם צריך לבדוק סוג המקסימום/מינימום.



x	f(x)
1	1
-1	5
-3	-15
1.5	1.875

$$\min_{-3 \leq x \leq 1.5} f(x) = -15$$

$$\max_{-3 \leq x \leq 1.5} f(x) = 5 \quad \text{interval}$$

$$f(x) = xe^{-x}$$

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x)$$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

(1)

$$f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$$

נקודת קיצון

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$e^{-x} > 0$$

הפונקציה חיובית ב- $(0, \infty)$

הפונקציה f היא פונקציה

הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה

הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$$

$$y = ax + b$$

(2)

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$\infty \cdot 0 \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$

L'Hôpital's rule

$$y = 0 \text{ is a horizontal asymptote as } x \rightarrow \infty$$

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t = \infty \Rightarrow x \rightarrow -\infty \rightarrow \text{e/o} \rightarrow \text{Gren'zok /k}$$

$$f'(x) = 0$$

מק' קר' - ר' יצחק

$\therefore \frac{1}{3} \sim \frac{1}{2} \quad (3)$

$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1-x)e^{-x} = 0 \quad e^{-x} > 0$$

$$x = 1$$

$x_0 = 1$

$$f''(x) = \underbrace{(1-x)e^{-x}}_{f'(x)}' = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$$

$$f''(x_0) = f''(1) = (1-2)e^{-1} = -\frac{1}{e} < 0$$

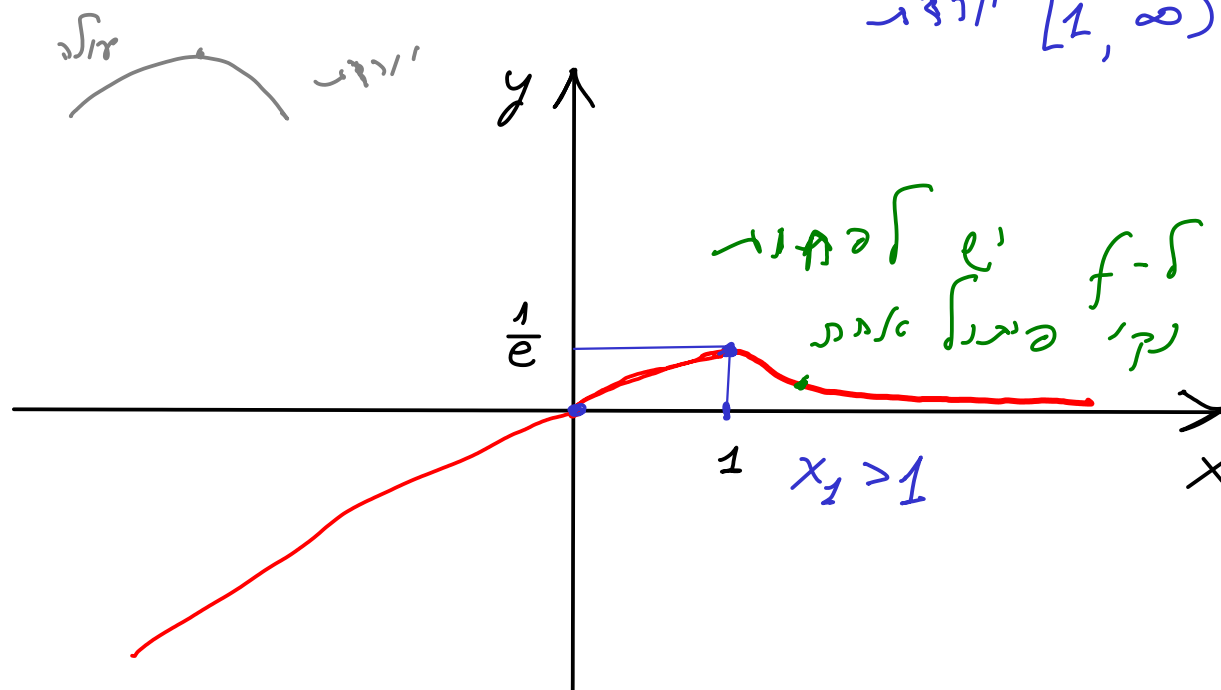
$$x_0 \neq x_1$$

$$f(1) = \frac{1}{e} \approx 0.368$$

ערך $[-\infty, 1]$

(4) גרמיים עליה וירידה: בקצ'ר

$[1, \infty)$ ירידה



(5) קריטריון: נקודת פיתול: $f''(x_1) = 0$

$$f''(x) = (x-2)e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow f''(x_1) = (x_1-2)e^{-x_1} = 0$$

$$x_1 = 2$$

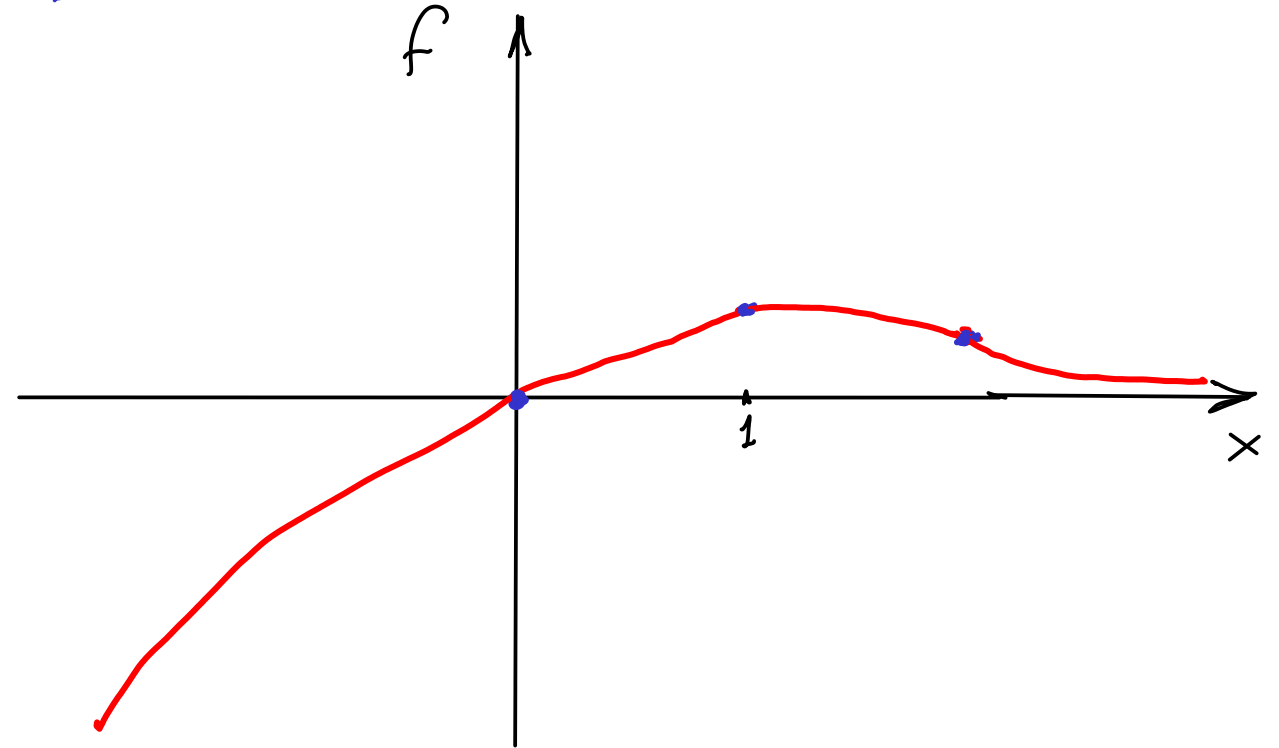
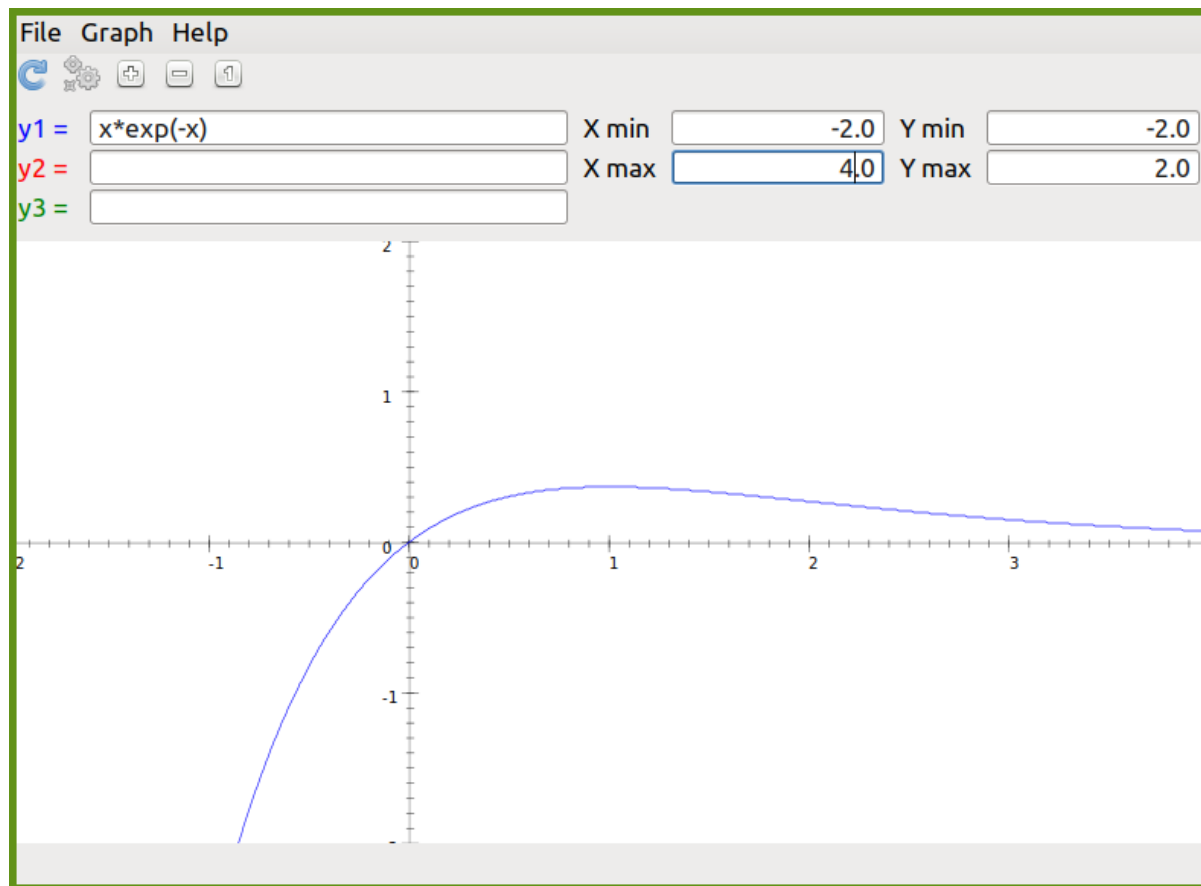
קטע $(-\infty, 2]$
 קטע $[2, \infty)$

במקום $f(x)$
 במקום

הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה של x .

$\forall x \quad f(x) < e^{-1} : \frac{1}{e}$ היא הפונקציה של x

$$f(x_1) = f(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2} \approx 0.271$$



$$f(x) = x - \sqrt{|x^2 - 3x + 2|}$$

2

הפונקציה איננה סימטרית ביחס ל- $y=0$ $\Leftrightarrow \mathbb{R} \not\subset \text{Dom } f \Leftrightarrow \text{Dom } f \subsetneq \mathbb{R}$ $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ (1)

הפונקציה איננה זוגית $f(x) \neq f(-x) = -x - \sqrt{|x^2 - 3x + 2|} \neq \pm f(x)$

$$f(0) = 0 - \sqrt{|2|} = -\sqrt{2}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{|x^2 - 3x + 2|}$$

הפונקציה איננה חד-חד ערכית $\Leftrightarrow x < 0$? הפונקציה איננה חד-חד ערכית

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

$$x^2 = |x^2 - 3x + 2| \quad x > 0$$

$$x^2 = x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0 \quad (a)$$

$$x^2 = -x^2 + 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \quad (b)$$

$$x_1 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1 \quad (a)$$

$$\text{⚡ } x_1 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$\cdot \text{ } |f'| \leq 9 - 4 \cdot 2 \cdot 2 < 0 \quad 2x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x < 2 \quad (b)$$

$$\left(\frac{2}{3}, 0 \right), (0, -\sqrt{2}) : \text{שני נקודות על הפרבולה}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} \right) \stackrel{x \rightarrow \infty}{=} 1 - 1 = 0 \quad \text{לפי כלל לופיט (2)}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 3x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 3x + 2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2} - (\cancel{x^2} - 3x + 2)}{x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2}{x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}} \stackrel{/:x}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}} = \frac{3}{2}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{|x^2 - 3x + 2|}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x} = \left| \left| \begin{array}{l} t := -x \\ t \rightarrow \infty \end{array} \right\} \right| =$$

$x \rightarrow -\infty$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t - \sqrt{t^2 + 3t + 2}}{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t + \sqrt{t^2 + 3t + 2}}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{3}{t} + \frac{2}{t^2}} \right) = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x + 2} - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x) = \left| \left| \begin{array}{l} t := -x \\ t \rightarrow \infty \end{array} \right\} \right| =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(t - \sqrt{t^2 + 3t + 2} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\cancel{t^2} - (\cancel{t^2} + 3t + 2)}{t + \sqrt{t^2 + 3t + 2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-3t - 2 \quad | : t}{t + \sqrt{t^2 + 3t + 2} \quad | : t} = -\frac{3}{2}$$

קיבלנו 2 נקודות - נבדוק

$$\begin{array}{lcl} x \rightarrow \infty & \text{נע} & y = \frac{3}{2} \\ x \rightarrow -\infty & & y = 2x - \frac{3}{2} \end{array}$$

$$|x^2 - 3x + 2| = -x^2 + 3x - 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2 \quad \text{קיבלנו (3)}$$

$$f(x) = x - \sqrt{-x^2 + 3x - 2} = x - (-x^2 + 3x - 2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2} (-x^2 + 3x - 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x + 3) = 1 - \frac{-2x + 3}{2\sqrt{-x^2 + 3x - 2}}$$

$$x_1, x_2 \text{ - נקודות קיצון של } f'(x)$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2 \text{ - נקודות קיצון}$$

$$\begin{cases} -2x + 3 = 2\sqrt{-x^2 + 3x - 2} \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad (*) \text{ נבדוק את הנקודה הזו } f'(x) = 0 \text{ - נקודה זו היא הנקודה שבה } f'(x) = 0$$

$$A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = -B$$

! אפשר בדרך נוספת לקבל פתרון נוסף: $(-2x+3)^2 = 4(-x^2+3x-2)$

$$8x^2 - 24x + 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = -4x^2 + 12x - 8$$

$$\frac{24 \pm \sqrt{(24)^2 - 4 \cdot 17 \cdot 8}}{16} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 17 \cdot 2}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{2}}{4}$$

נניח שמסמכים האלו הם פתרונות:

(*) פתור נוסף

$$\frac{6 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{6 + \sqrt{2}}{2} + 3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

קראנו מספר

שלישי! אפשר לבדוק אם ניתן להגיע לפתרון זה באופן אחר? (*):

פתור נוסף:

$$-2x + 3 = -\frac{6 - \sqrt{2}}{2} + 3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{6 - \sqrt{2}}{4}$$

הוא הפתרון השני:

$$\begin{aligned}
 -x^2 + 3x - 2 &= -\left(\frac{6-\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{3(6-\sqrt{2})}{4} - 2 = \frac{-(36 - 12\sqrt{2} + 2) + 12(6-\sqrt{2}) - 32}{16} = \\
 &= \frac{-36 + \cancel{12\sqrt{2}} - 2 + 72 - \cancel{12\sqrt{2}} - 32}{16} = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

$$2\sqrt{-x^2 + 3x - 2} = 2\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

נקודה קיצונית $x_3 = \frac{6-\sqrt{2}}{4}$

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$$

בתחום $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

(**)

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x-3 = 2\sqrt{x^2-3x+2} \\ x > 2 \\ x < 1 \end{array} \right.$$

!-d'G>7 -1317J

$$(2x-3)^2 = 4(x^2-3x+2)$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 4x^2 - 12x + 8$$

!-d'G>7 -1317J

$$9 = 8$$

!-d'G>7 -1317J -1317J

$$x_3 = \frac{6-\sqrt{2}}{4}$$

$$x = x_3 \Rightarrow 2\sqrt{-x_3^2 + 3x_3 - 2} = 3 - 2x_3$$

$$f''(x_3) = \left(1 - \frac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}} \right)' \Big|_{x=x_3} = \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{(-2)\sqrt{-x^2+3x-2} - (-2x+3) \frac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}}{(-x^2+3x-2)} \Big|_{x=x_3}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{-(3-2x_3) - (3-2x_3) \cdot \frac{\cancel{3-2x_3}}{\cancel{3-2x_3}}}{-x_3^2 + 3x_3 - 2} = \frac{3-2x_3}{-x_3^2 + 3x_3 - 2} =$$

$$= \frac{3 - 2 \cdot \frac{6 - \sqrt{2}}{4}}{-\left(\frac{6 - \sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{3(6 - \sqrt{2})}{4} - 2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-(36 + 2 - 12\sqrt{2}) + 12(6 - \sqrt{2}) - 32}{16}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 16}{-38 + 72 - 32} > 0$$

$f(x) = \frac{6 - \sqrt{x}}{4}$

$f(x)$ איז פונקציע וואס אהרן זיצט דאס דיסטאנץ פון אים צו
 : $x_1=1, x_2=2$ רעגולירט
 : (130 מ"ר) גארטן

(152 'מח)

$$f'(x) = 1 + \frac{2x-3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}$$

$$\Leftarrow x > 1$$

$$: x_1 \quad \text{דגש}$$

$$-f'(x) < 0 \quad \Leftarrow 1 < x < a \quad \text{כל } x \in (1, a) \quad \text{כל } x \in (1, a)$$

$$2x-3 < 0 \quad \text{כל } x \in (1, \frac{3}{2}) \quad \text{כל } x \in (1, \frac{3}{2})$$

$$\frac{2x-3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}} < -1 \quad \Leftarrow 1 < x < \delta : \delta \quad \text{כל } x \in (1, \delta) \quad \Leftarrow \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x-3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}} = -\infty \quad \text{כל } x \in (1, \delta)$$

$$M = -1 \quad \text{כל } x \in (1, \delta)$$

$$\lambda \cdot \infty = -\infty \quad \Leftarrow \lambda < 0$$

$$(f(x) < M \quad \Leftarrow x \in (a, \delta] : \delta \text{ כל } M) \quad \Leftarrow \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty$$

$$(1, 1+\delta] \rightarrow \text{כל } x \in (1, 1+\delta] \quad \Leftarrow f'(x) < 0 \quad \text{כל } x \in (1, 1+\delta] \quad \text{כל } x \in (1, 1+\delta]$$

הפונקציה (העצמה הראשונה)

הפונקציה

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 3x + 2} \quad \text{כאשר } x < 1$$

$$x_1 = 1$$

הפונקציה היא חיובית ויש לה מקסימום

$$f'(x) = 1 - \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$$

(הפונקציה היא חיובית ויש לה מקסימום)
כאשר $f'(x) > 0$ (הפונקציה היא חיובית ויש לה מקסימום)

$$f'(x) > 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}} < 0 \Leftrightarrow 2x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{כאשר } f'(x) > 0 \quad \text{כאשר } x_1 = 1 \quad \text{הפונקציה היא חיובית ויש לה מקסימום}$$

$$f(x) - f(x_1) \quad \text{כאשר } x_1 = 1$$

$$f(x) \quad \text{כאשר } x_2 = 2 \quad \text{הפונקציה היא חיובית ויש לה מקסימום}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}} \quad \Leftrightarrow f(x) = x - \sqrt{x^2-3x+2} \quad \Leftrightarrow x > 2$$

$$f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow x \in (2, 2+\delta) \quad : \delta > 0 \text{ נ"ך} \quad \Leftrightarrow 2x-3 > 0 \quad \Leftrightarrow x > 2$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = -\infty \text{ ל } \sqrt{x-2} \right)$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x-3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}} \quad \Leftrightarrow x < 2$$

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow 2-\delta < x < 2 \quad : \delta > 0 \text{ נ"ך} \quad \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \infty \quad \Leftrightarrow 2x-3 > 0 \quad \Leftrightarrow 1.5 < x < 2 \quad \text{נ"ך}$$

הנקודה $x_2 = 2$ היא נקודת קיצון של $f(x)$ ונ"ך

תיק 6 f(x)

$f(x)$ רציפה בכל $\mathbb{R}$

1.

$$x \rightarrow \infty \quad y = \frac{3}{2}$$

2.

$$x \rightarrow -\infty \quad y = 2x - \frac{3}{2}$$

3.

$$x_1 = 1 \quad \text{נקודת מקסימום } f(x)$$

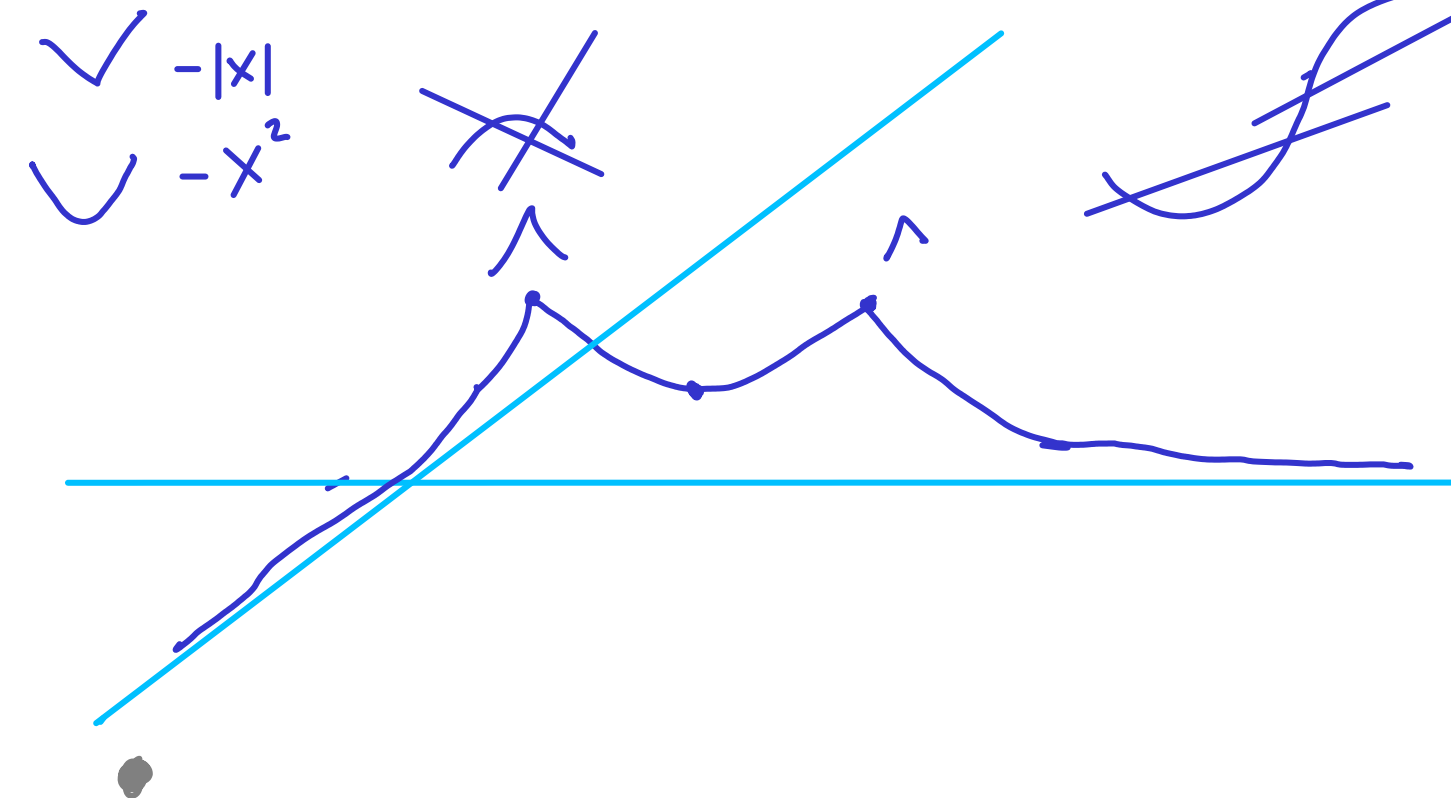
4.

$$x_2 = 2 \quad \text{בנקודה } f(x) \text{ יש מקסימום} \quad \text{בנקודה}$$

5.

$$x_3 = \frac{6 - \sqrt{2}}{4} \quad \text{בנקודה } f(x) \text{ יש מינימום מקומי}$$

6.



נשאו את כל הנקודות
בייחוד (במחשבה)

חשבון אינטגרל.

האינטגרל הוא מסומן

① $F'(x) = f(x)$ כל $f(x)$ פונקציה קצרה

② $\int f(x) dx := \{ F(x) : F'(x) = f(x) \}$ האינטגרל הוא מסומן

הקבוצה של פונקציות קצרות $f(x)$

SVMA "סומ"

√80 נוסח קירוב

(63 נח)

ע"מ בקירוב ליניארי.

df בומציה ליניארי על הנעמד dx כאשר dx = x - a

$$df = f'(a) \cdot dx$$

$$df = f'(a)(x - a)$$

נקח בומציה $f(x) = \sqrt{x}$

הקיבוץ הליניארי של f(x) נגזר x=a

$$L_f(x) = Ax + B$$

$$A = f'(a)$$

$$L_f(x) = f'(a)x + B$$

B=?

אנחנו יוצרים ערך אחד של L(x) : $L_f(a) = f(a)$

$$B = L_f(a) - f'(a) \cdot a = f(a) - f'(a)a$$

$$L_f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

נסקנו:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

$$a = 81$$

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-1}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

הנקודה של 1/18

$$L_f(x)$$

$$\leftarrow f(x)$$

$$f'(x) = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

כל הנקודות של 1/18

$$L_f(x) = f(81) + f'(81) \cdot (x - 81) =$$

$$\Leftarrow f'(81) = \frac{1}{18}$$

$$= 9 + \frac{1}{18}(x - 81) = \frac{x}{18} + \left(9 - \frac{9}{2}\right) = \frac{x}{18} + 4.5$$

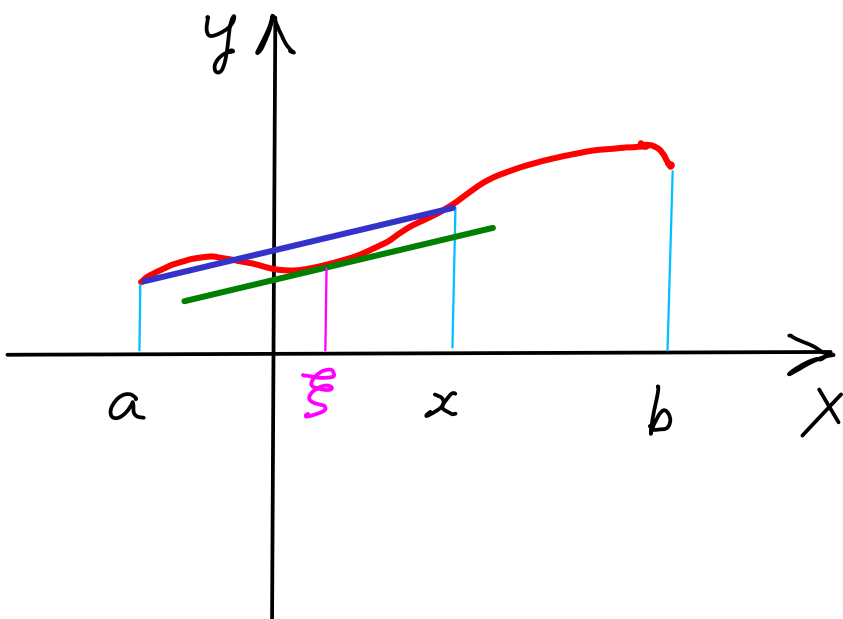
$$\sqrt{80} \approx L_f(80) = \frac{80}{18} + 4.5 = \frac{40}{9} + 4.5 = 8.9444\dots$$

$$\dots F(x) = \frac{x^3}{3} + \bar{c}, \quad F(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$f(x) = x^2$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + c$$

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + c \right)' = x^2$$



$\in \mathbb{N}$ ו' F_1, F_2 פונקציות קבועות $f(x) = \int [a, b]$ ו' ξ

נסתק קבוע

$$F_1(x) - F_2(x) = \text{const} \quad \text{ש'}$$

הוכח: $\therefore$ $\varphi(x) := F_1(x) - F_2(x)$, ש' $\varphi'(x) = 0$ ו' $\xi \in (a, b)$

$\varphi(x)$ נגזרת, לכן נניח להשוות $\in \mathbb{N}$ Lagrange : (113 נר) $\xi \in (a, b)$ קיים $a < \xi < x$

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(x-a) = 0 \cdot (x-a) = 0 \quad \therefore$$

כל $a < x \leq b$ $\int_a^b \varphi(x) = \varphi(a)$, $[a, b]$ הפונקציה $\varphi(x) = \varphi(a) - \epsilon$ עבור $a \leq x \leq b$
ל.ע.נ

$C \in \mathbb{R}$, $F(x)$ is a function

then $F(x) + C$

is a primitive of $f(x)$ iff

antiderivative

$\int f(x) dx$ is a primitive

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

$$d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

$$\int dF = F(x) + C$$

Corollary

(1)

(2)

(3)

הטבלה הראשונה של אינטגרלים

$F(x)$	$f(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \neq 0)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{x^2+1}$
e^x	e^x
$\ln x $	$\frac{1}{x}$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$
$$\alpha \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C$$

למעשה, זהו גאומטרי
של נגזרות.

$$\int (2x+3)^{10} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 2x+3 \\ dt = (2x+3)' dx = 2 dx \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\} = \int t^{10} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^{10} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{10+1}}{10+1} + C =$$

מ'נצח בגלל

$$(2x+3)^{10} = \sum_{n=0}^{10} \binom{10}{n} 2^n x^n \cdot 3^{10-n} = \dots = \frac{1}{22} t^{11} + C = \frac{(2x+3)^{11}}{22} + C$$

לא לשכוח לחדוד
!! למעגל x

כללים של אינטגרציה

כל אינטגרציה בהתאם קונבנציות

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

Differentiation	Integration
Linearity: $[\lambda f(x) + \mu g(x)]' = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$	Linearity: $\int [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx$
The Leibniz Rule: $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	אינטגרציה בחלקים: $f(x)g(x) = \int f(x) dg(x) + \int g(x) df(x)$
כלל השרשרת: $f[g(t)]' = f'[g(t)] \cdot g'(t)$	הצבה: $\int f(x) dx = \int f[g(t)]g'(t) dt$

ע'כ"ל זר צ'יג בחלקים

$$\int f(x) dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x) df(x)$$

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

המילוי נעשה בחלקים

יכול להיות גם
נימל אמיב

$$\int \underbrace{x}_f \underbrace{\cos x dx}_{dg} =$$

f	x	sin(x)	g
f'	1	cos(x)	g'

$$= \underbrace{x \sin x}_{f(x) g(x)} - \int \underbrace{1 \cdot \sin x dx}_{f'(x) g(x)} = x \sin x - \int \sin x dx =$$

המילוי נעשה בחלקים

$$= \underline{\underline{x \sin x + \cos x + C}}$$

בז'ק ה'י

$$(x \sin x + \cos x + C)' = (x \sin x)' + (\cos x)' = \cancel{\sin x} + x \cos x - \cancel{\sin x} = x \cos x$$

$$\cos x = (\sin x)'$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t := \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right\} = \int t^{1/2} dt = \frac{t^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{2t^{3/2}}{3} + C = \frac{2\sqrt{\sin^3 x}}{3} + C$$

$$\left(\frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C \right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \sin^{3/2-1} x \cdot \cos x = \sqrt{\sin x} \cos x \quad \text{!} \rightarrow \text{p'32}$$

$$x = \frac{1}{2} (1+x^2)'$$

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} =$$

!} p'32

$$= \left\{ \begin{array}{l} t := 1+x^2 \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C = \frac{1}{2} \ln (1+x^2) + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$\left(\frac{1}{2} \ln (1+x^2) + C \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{x}{1+x^2} \quad \text{!} \rightarrow \text{p'32}$$

$$\frac{1}{x} = (\ln x)'$$

$$\int \frac{\ln^3 x}{x} dx =$$

6

$$= \left\{ \begin{array}{l} t := \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right\} = \int t^3 dt = \frac{t^{3+1}}{3+1} + C = \frac{1}{4} t^4 + C = \underline{\underline{\frac{1}{4} \ln^4 x + C}}$$

$$\left(\frac{1}{4} \ln^4 x + C \right)' = \frac{1}{4} \cdot \cancel{4} \cdot \ln^3 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln^3 x}{x} \quad \text{! } \lambda 7^{32}$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} =$$

7

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{2} \ln |x-3| - \frac{1}{2} \ln |x-1| + C =$$

↑
! 3 16
! 3 3 3
! 1 1 1 1 1

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C}}$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 34}}{2}, \quad 36 - 4 \cdot 34 < 0$$

√3,0 1/k 1,5

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 34} =$$

8

$$= \int \frac{dx}{(x^2 + 6x + 9) + 25} = \int \frac{dx}{(x+3)^2 + 5^2} = \frac{1}{25} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+3}{5}\right)^2 + 1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t := \frac{x+3}{5} \\ dt = \frac{1}{5} dx \\ dx = 5 dt \end{array} \right\} = \frac{5}{25} \int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

(1/2 C 1/5
1 C 1/2 C)

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x + C \quad - \text{? 1/2 C 1/5, 1/2 C}$$

$$= \frac{1}{5} \arctan t + C = \frac{1}{5} \arctan \frac{x+3}{5} + C$$

ס'קרא ב'צד'ה

$$= x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C =$$
$$= \underline{\underline{x(\ln x - 1) + C}}$$

$$(x(\ln x - 1) + C)' = (\ln x - 1) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x - \cancel{1} + \cancel{1} = \ln x \quad \therefore \text{נכון}$$

$$\int f(x) g'(x) \, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) \, dx$$

$$\int \ln x \, dx =$$

f	ln x	x	g
f'	$\frac{1}{x}$	1	g'

(11) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840

حکامہ اور عارفانہ

$$\int \frac{\cos(2x)}{\sin^2 x + \cos^2 x} dx =$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{2}{\sin(2x)}$$

$$\left(-\frac{2}{\sin(2x)} + C\right)' = \left((-2) \cdot [\sin(2x)]^{-1} + C\right)' = (-2) \cdot (-1) [\sin(2x)]^{-1-1} \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 2$$

$$= \cancel{4} \cdot \frac{\cos(2x)}{(\cancel{2} \sin x \cdot \cos x)^2} = \frac{\cos(2x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

1.7.32

(2) 4 2/3 6 1/3

$$\int \frac{4x^2 - 3x - 4}{x(x-1)(x+2)} dx =$$

$$\frac{4x^2 - 3x - 4}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2) + B(x^2+2x) + C(x^2-x)}{x(x-1)(x+2)}$$

$$\textcircled{x^2} \quad A + B + C = 4$$

$$\textcircled{x} \quad A + 2B - C = -3$$

$$\textcircled{1} \quad -2A = -4$$

$$A = 2$$

$$\begin{cases} B + C = 2 \\ 2B - C = -5 \end{cases}$$

$$C = 2B + 5$$

$$B = 2 - C = 2 - 2B - 5$$

$$3B = -3 \Rightarrow B = -1$$

$$C = 3$$

$$\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x-1)(x+2) - x(x+2) + 3x(x-1)}{x(x-1)(x+2)} = \frac{2x^2 + \cancel{2x} - 4 - x^2 - \cancel{2x} + 3x^2 - 3x}{x(x-1)(x+2)} =$$

$$= \frac{4x^2 - 3x + 4}{x(x-1)(x+2)}$$

$$= 2 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + 3 \int \frac{dx}{x+2} = 2 \ln|x| - \ln|x-1| + 3 \ln|x+2| + C = \ln \frac{x^2 |x+2|^3}{|x-1|} + C =$$

$$= \ln \left(x^2 \left| \frac{(x+2)^3}{x-1} \right| \right) + C$$

ל"פ"ע ל"ע ל"פ

ל"פ"ע

$$\deg = 2 - 1 = 1$$

$$\frac{3}{(2x-3)(x+1)^2} = \frac{A}{2x-3} + \frac{Bx+C}{(x+1)^2} \leftarrow \begin{array}{l} \text{ל"פ"ע} \\ \text{ל"ע} \end{array}$$

$\deg = 2$

$$\int \frac{3 dx}{(2x-3)(x+1)^2} = \quad (12) 4 \text{ ל"ע } 6 \text{ ל"פ}$$

$$A(x^2+2x+1) + (Bx+C)(2x-3) = 3$$

$$x^2$$

$$A + 2B = 0$$

$$A = -2B$$

$$B = -\frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}(3C+3)$$

$$x$$

$$2A - 3B + 2C = 0$$

$$2(3C+3) + \frac{3}{2}(3C+3) + 2C = 0$$

$$1$$

$$A - 3C = 3$$

$$A = 3C + 3$$

$$4(3C+3) + 3(3C+3) + 4C = 0$$

$$25C + 21 = 0$$

$$C = -\frac{21}{25}$$

$$A = \frac{12}{25}$$

$$B = -\frac{1}{2} \left(\frac{-63+75}{25} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{25} = -\frac{6}{25}$$

ה'ק'ה:

303: פתור

$$\frac{3}{(2x-3)(x+1)^2} = \frac{A}{2x-3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$A(x+1)^2 + B(2x-3)(x+1) + C(2x-3) = 3$$

$$\textcircled{x^2} \quad A + 2B = 0$$

$$\textcircled{x} \quad 2A - B + 2C = 0$$

$$\textcircled{1} \quad A - 3B - 3C = 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & 8 & -6 \\ 1 & -3 & -3 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & -3 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{array} \right)$$

$$C = -\frac{3}{5}, \quad B = -\frac{3}{5} + \frac{9}{25} = -\frac{6}{25}, \quad A = 3B + 3C + 3 = -\frac{18}{25} - \frac{9}{5} + 3 = \frac{12}{25}$$

$$\frac{12}{25} \frac{1}{2x-3} - \frac{6}{25} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{3}{5(x+1)^2} = \frac{-12(x+1)^2 - 6(2x-3)(x+1) - 15(2x-3)}{25(2x-3)(x+1)^2} =$$

∫

$$= \frac{\cancel{12x^2} + \cancel{24x} + 12 - 6(\cancel{2x^2} - \cancel{x} - 3) - \cancel{30x} + 45}{25(2x-3)(x+1)^2} = \frac{75}{25(2x-3)(x+1)^2} = \frac{3}{(2x-3)(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{25} \left(\int \frac{12 dx}{2x-3} - 3 \int \frac{2x+7}{(x+1)^2} dx \right) =$$

$$\int \frac{dx}{2x-3} = \left\{ \begin{array}{l} t = 2x-3 \\ dt = 2dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|2x-3| + C$$

$$A = \frac{12}{25}$$

$$B = -\frac{6}{25}$$

$$C = -\frac{21}{25}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+7}{(x+1)^2} dx &= \int \frac{2x+2}{(x+1)^2} dx + 5 \int \frac{dx}{(x+1)^2} = 2 \ln|x+1| + 5 \int (x+1)^{-2} dx = 2 \ln|x+1| + 5 \frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} = \\ &= 2 \ln|x+1| - \frac{5}{x+1} + C \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{25} \left(6 \ln |2x-3| - 6 \ln |x+1| + \frac{15}{x+1} \right) + C =$$

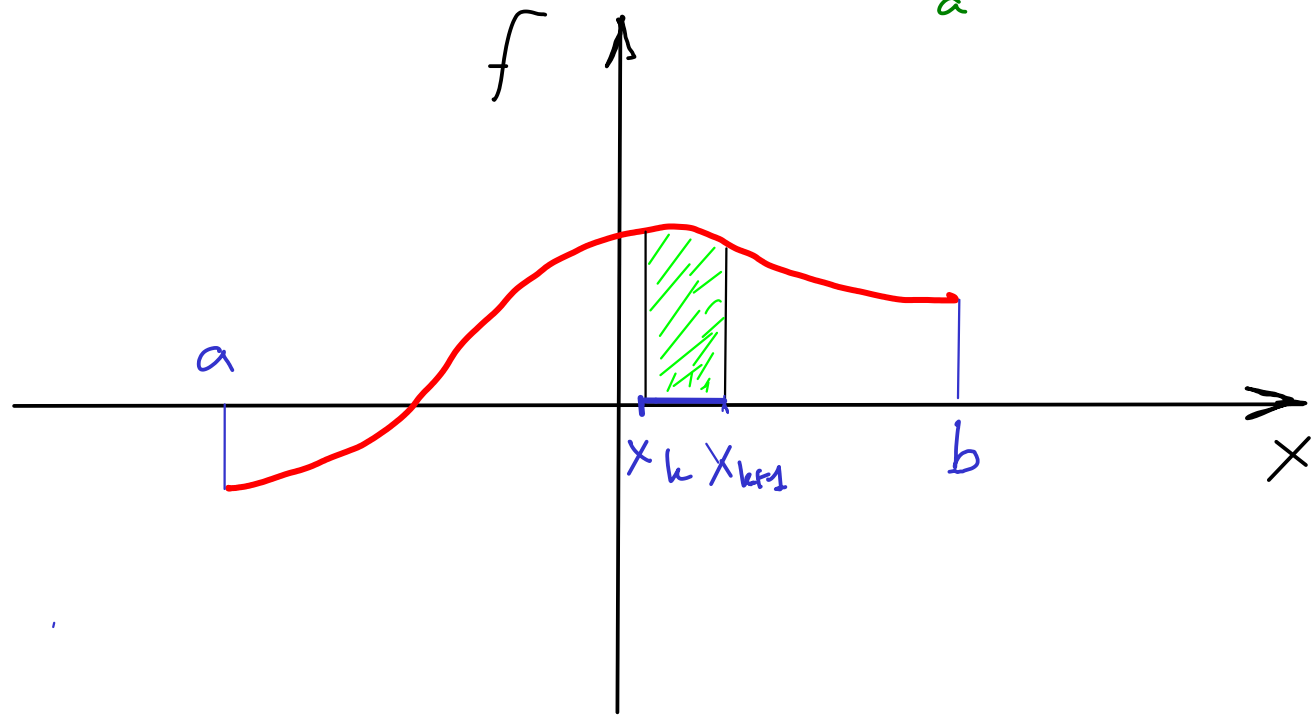
$$= \frac{6}{25} \ln \left| \frac{2x-3}{x+1} \right| + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x+1} + C$$

תשובה

הנחת גבול המסוים

$$f \geq \int_a^b f(x) dx \text{ נכונה לכל } f \text{ על } [a, b] \iff [a, b] \text{ כל } f(x) > 0$$

$[a, b]$ כל $f(x)$ חיובי

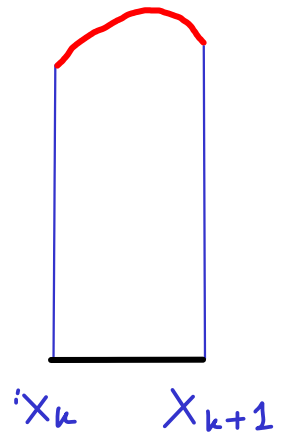


$\int_a^b f(x) dx$

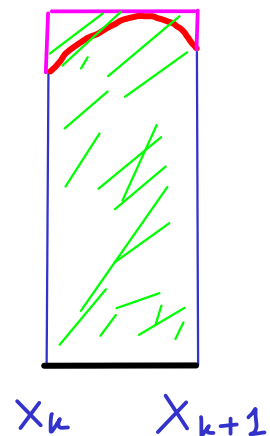
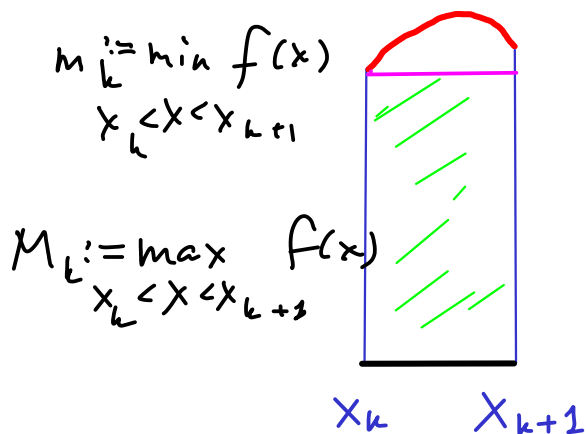
נקודות מסתגרות

מחלק את $[a, b]$ ל- n חלקים
 $a, x_1, \dots, x_n = b$

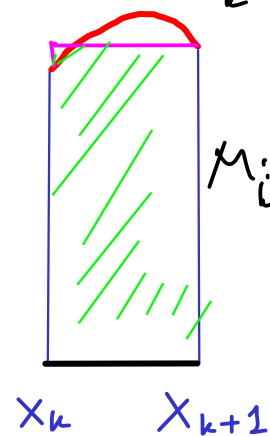
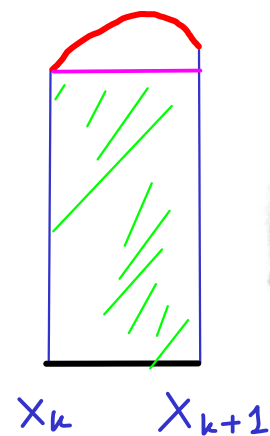
$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$



Darboux



Riemann



$$M_k := \min(f(x_k), f(x_{k+1}))$$

$$\mu_i = \max(f(x_k), f(x_{k+1}))$$

"ס" סגל 1/2 ס' N100 2 ס' 1/2

$\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.6$

$$\underline{S}_n := \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$$

|| 1158 / 100 ||

$$\overline{S}_n := \sum_{k=1}^n M_k \Delta_k$$

א/חור כק א/בר'מ א/זבול $n \rightarrow \infty$

$$0 \leq P_{k|k} \leq P_{k+1|k+1} \quad \text{for } [X_k, X_{k+1}]^T \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

S = $\int_{a/b}^{c/d}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_n$ $\text{für } \max \Delta x_k \rightarrow 0$ (K)

$$\text{נ"ך } \bar{S} := \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_k \rightarrow 0}} \bar{S}_n \quad \text{--- " ---} \quad (2)$$

$$\underline{S} = \bar{S} \quad \text{נ"ך} \quad (3)$$

על $f(x)$ בקטע $[a, b]$ קיימת אינטגרל רימן

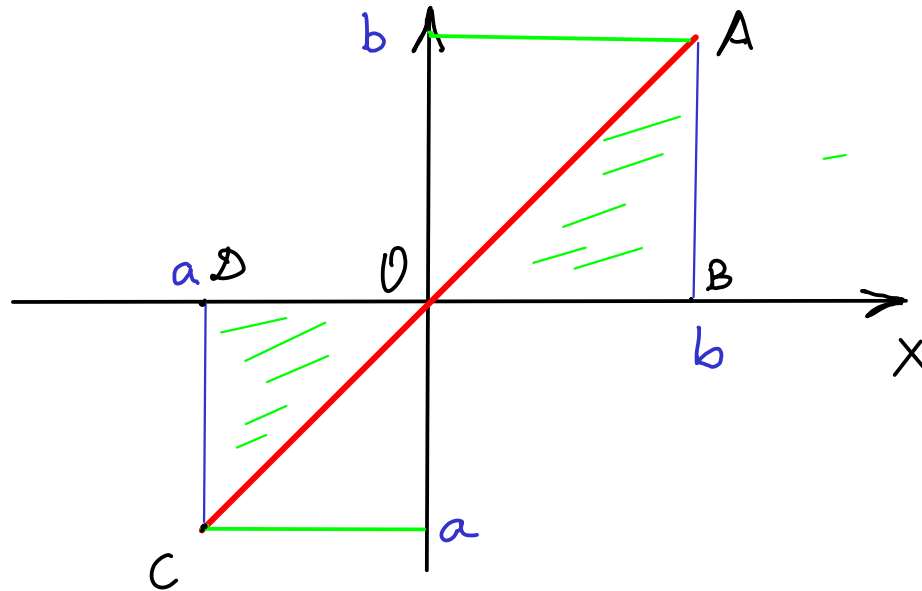
$$\int_a^b f(x) dx = \bar{S} = \underline{S} =: S$$

$$\underline{S}_n \leq S \leq \bar{S}_n \quad \text{ברור.}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(\theta) d\theta \quad \text{החליפה}$$

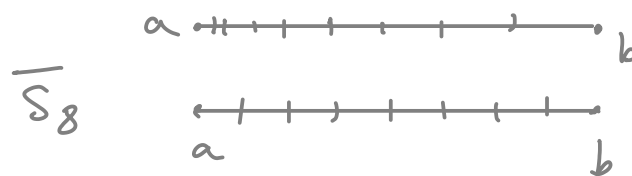
Cor כל פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ אינטגרלית רימן.

$$a < x < b$$



$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot b - \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$$

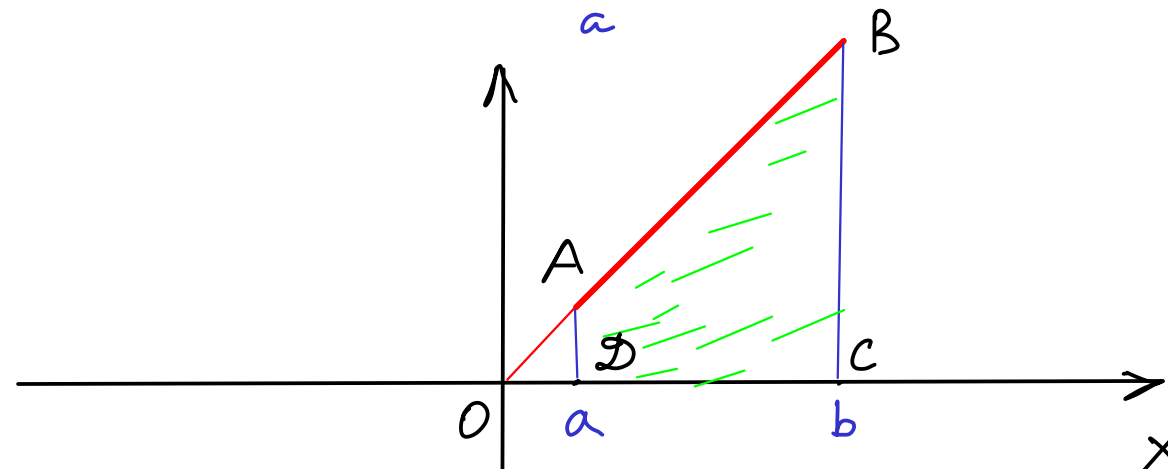
$$\int_a^b x dx = S_{\Delta OAB} - S_{\Delta OCA}$$



המשפט, $\int_a^b x dx$ קיים: אם f היא פונקציה רציפה, $[a, b]$ כחלקים שונים, כן הסדר. $\underline{S}_n, \overline{S}_n$ גינה מנורו.

$$0 < a < b$$

$$\int_a^b x dx$$



$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot b - \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$$

$$\int_a^b x dx = S_{\Delta OBC} - S_{\Delta OAB}$$

המשפט של המזל - לקבל שווה גובה, $\int_a^b x dx$ הגדרה

באן מכונית לגשמה המשפט (180'180)

Die wir für $n \rightarrow [a, b]$ mit $\sqrt{n}$, ist

$$\underline{S}_n = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n x_k \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{b-a}{n} k + a \right) =$$

$$\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$$

$$m_k = x_k$$

$$M_k = x_{k+1}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k + \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n a = \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(b-a)an}{n} =$$

$$x_k = \frac{b-a}{n} k + a$$

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= an$$

$$= (b-a)^2 \cdot \frac{n+1}{2n} + (b-a)a \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(b-a)^2 + (b-a)a = (b-a) \left(\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a + a \right) =$$

$$= (b-a) \left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a \right) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$\overline{S}_n = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = \Delta x_k \sum_{k=1}^n M_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n x_{k+1} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{b-a}{n} (k+1) + a \right) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} (k+1) + \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n a = \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=1}^n (k+1) + \frac{b-a}{n} \cdot \cancel{n}a =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k + n \right) + (b-a)a = \frac{(b-a)^2}{\cancel{n^2}} \left(\frac{\cancel{n}(n+1)}{2} + \cancel{n} \right) + ba - a^2 =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{n} \cdot \frac{n+1}{2} + ba - a^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)^2}{2} + ba - a^2 = \frac{b^2 - \cancel{2ab} + a^2 + \cancel{2ab} - 2a^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$p5 \quad \vec{S} = \underline{S} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

: 10/3/0

סיכום, גורמים (1) $f(x)$ יומר נצטרך - df

(2) $[a, b]$ γ

גורמים: $\int_a^b f(x) dx$ בצד הפנימי הקטן:

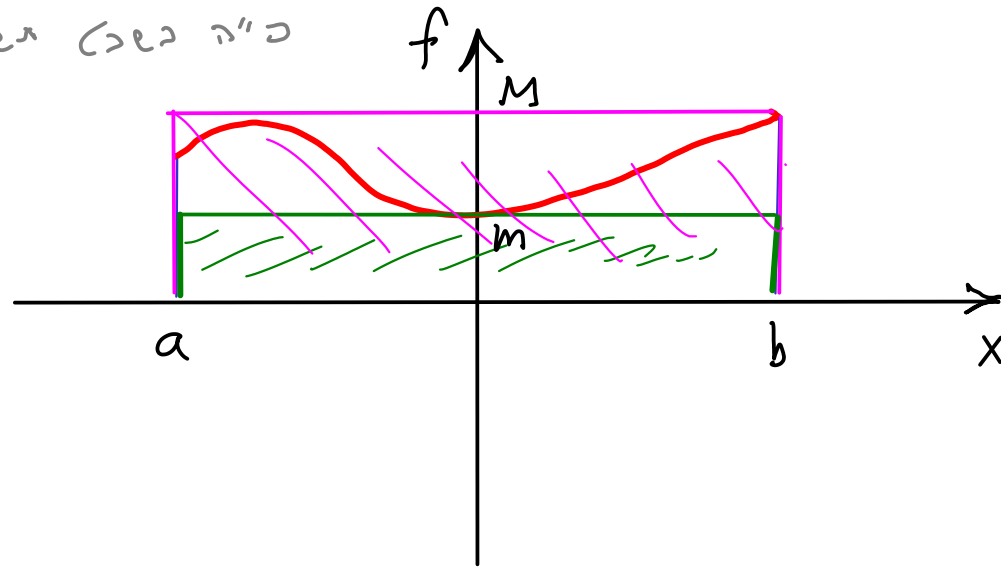
Coen

(1) $f(x), g(x)$ נ"מ γ $[a, b]$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\int_a^b (\lambda f + \mu g) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$ sk

(2) $f(x)$ נ"מ γ $[a, c]$ $a < b < c$ $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$ sk

כ"ה געבט געווען

3"02



$[a, b]$ רעגולער פונקציע $f(x)$ איז געבונדן

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b-a) \quad \text{'s/c}$$

$$m := \min_{a \leq x \leq b} f(x) \quad \text{רעגולער}$$

$$M := \max_{a \leq x \leq b} f(x)$$

הוכחה:

$$\int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx \iff a \leq x \leq b \text{ רעגולער } \varphi(x) \leq \psi(x) \quad (1)$$

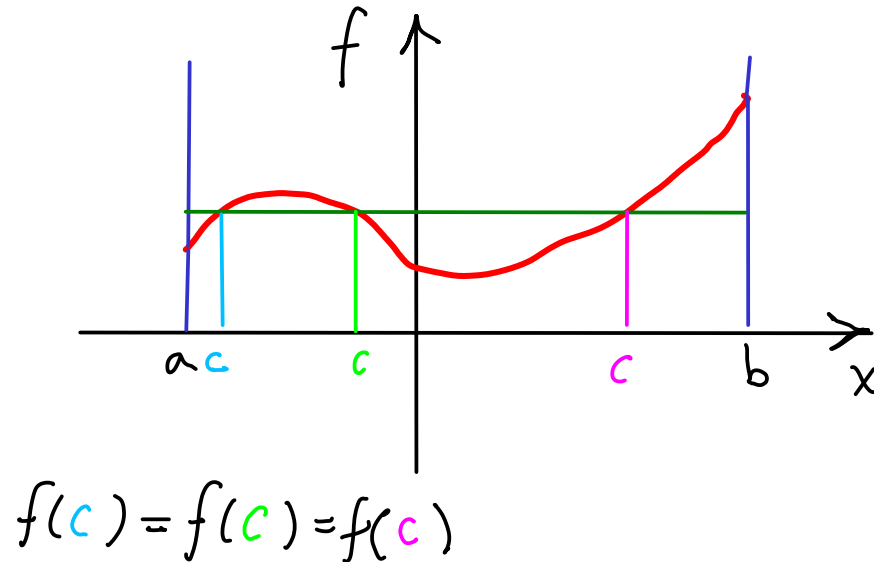
$$a \leq x \leq b \text{ רעגולער } m \leq f(x) \leq M : m, M \text{ איז געבונדן} \iff \begin{cases} [a, b] \text{ רעגולער } f(x) \\ \text{וויסן } [a, b] \text{ רעגולער} \end{cases} \quad (2)$$

Weierstraß געזעצ

$$\int_a^b M dx = M \int_a^b dx = M \cdot (b-a) \quad (3)$$

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx$$

ש.ל.ר



$$m = \min f(x)$$

$$M = \max f(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b m \, dx = m \int_a^b dx = m \cdot (b-a) \\ a \leq x \leq b \text{ ו} \quad m \leq f(x) \leq M \end{array} \right.$$

המשקל:

משקל (משקל) הדרך הבסיסית היא (משקל)

נניח $f(x)$ קצרה $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(c) \cdot (b-a) \quad : a \leq c \leq b \quad \text{שם קיים}$$

הוכחה: לפי המשקל:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M$$

$$m \leq \mu \leq M \quad \text{שם, } \mu := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

Lebesgue

$$f(c) = \mu : a \leq c \leq b$$

Cauchy
(35'11'')

Lebesgue

$$\left\{ \begin{array}{l} [a, b] \text{ רצוף } f(x) \\ m \leq f(x) \leq M \\ m \leq \mu \leq M \end{array} \right. \Leftarrow$$

$$x \text{ נקודה } \int_a^x f(t) dt$$

Lebesgue (המשפט הקטן של Lebesgue)
[a, b] רצוף f(x) נגזרת

$$a \leq x \leq b \text{ כל } \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) \quad \text{ז"ל}$$

$$F'(x) = \int_a^x$$

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad \text{הוכחה: } (1) \text{ נוסף}$$

$$F'(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx} =$$

$$= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{1}{dx} [\Phi(x+dx) - \Phi(x)] = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{1}{dx} \left(\underbrace{\int_a^{x+dx} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}_{\int_x^{x+dx} f(t) dt} \right) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{1}{dx} \int_x^{x+dx} f(t) dt$$

כל נקודה ברוחב
האינטרוויל

$$\int_x^{x+dx} f(t) dt$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_x^{x+dx} f(t) dt = f(\xi) dx \quad : x \leq \xi \leq x+dx \text{ נ"ק}$$



$$\xi \rightarrow x$$

$$\Leftrightarrow dx \rightarrow 0 \quad (2)$$

מד

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{1}{dx} \int_x^{x+dx} f(t) dt = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \cancel{dx}}{\cancel{dx}} = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x)$$

$f(x)$ נקודה

ל.ל.נ

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

(Newton-Leibniz) כולן

$[a, b]$ וכל $f(x) = \int_a^x f(t) dt$ וכל $F(x)$ וכל $F'(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

הוכחה:

הוכחה: $F_1(x) - F_2(x) = \text{const}$: $F_1(x), F_2(x)$ הן שתי פונקציות שגזירתן היא $f(x)$

$$F_1'(x) = f(x) \quad F_2'(x) = f(x)$$

המשפט 2.2 קובע

כל פונקציה $F(x)$ שגזירתה היא $f(x)$

$$\int_a^x f(t) dt - F(x) = C$$

כל

$f(x)$ וכל $F(x)$ שגזירתה היא $f(x)$

(2) $\int_a^x f(t) dt$ וכל $F(x)$ שגזירתה היא $f(x)$

(3) $x = a$

$C = -F(a)$

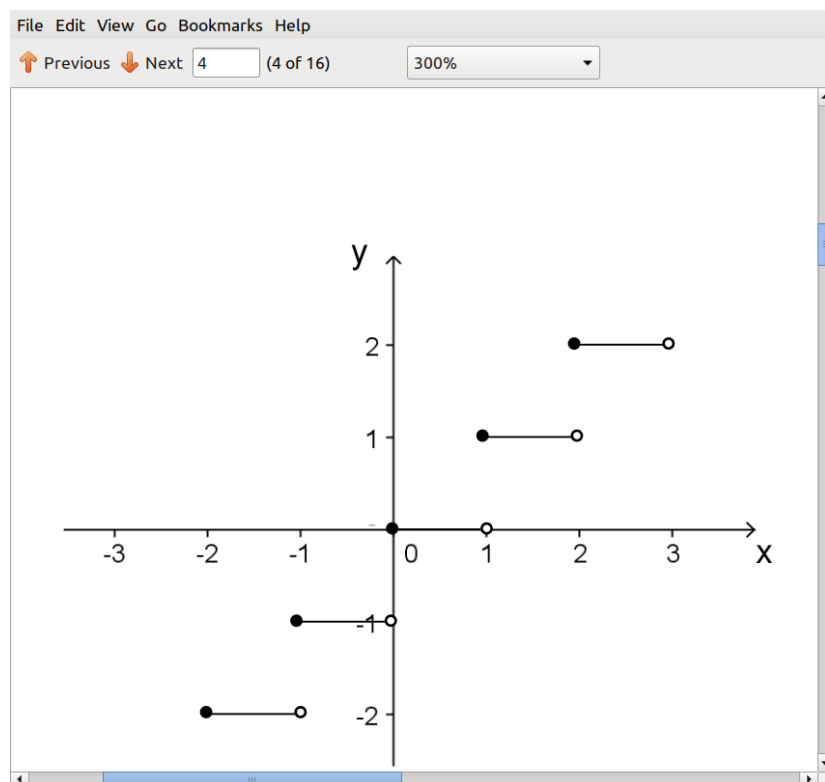
$$\int_a^x f(t) dt - F(x) = C$$

$\Rightarrow$

ש.ל.נ $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

(4) $x = b$

|| $f(x)$ ציגלען פון $f(x)$: $f(x)$ איז א פונקציע וואס איז געגעבן דורך $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in [-1, 1] \\ 1 & \text{if } x \in (1, 2] \\ 2 & \text{if } x \in (2, 3] \\ -1 & \text{if } x \in (-1, 0] \\ -2 & \text{if } x \in (-2, -1] \end{cases}$



בערע $f(x)$ איז א פונקציע וואס איז געגעבן דורך $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in [-1, 1] \\ 1 & \text{if } x \in (1, 2] \\ 2 & \text{if } x \in (2, 3] \\ -1 & \text{if } x \in (-1, 0] \\ -2 & \text{if } x \in (-2, -1] \end{cases}$ $\int_a^b f(x) dx$ איז א פונקציע וואס איז געגעבן דורך $\int_a^b f(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{if } a = b \\ \int_a^b f(x) dx & \text{if } a < b \end{cases}$

הצגה

$$\int \cos(3x) \cdot \sin(2x) dx =$$

$$\cos(3x) = \cos(2x + x) =$$

ההבדל בין $\sinh(x)$ ל- $sh(x)$

$$\sinh(x) = sh(x)$$

$e^z, \cos(z), \sinh(z), \cosh(z), \operatorname{sh}(z)$
 זוגי, אי-זוגי, זוגי, אי-זוגי, זוגי

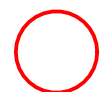
$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - (\cancel{e^{2x}} - 2 + \cancel{e^{-2x}})}{4} = 1$$



היחס $u^2 + v^2 = 1$

היחס $u^2 - v^2 = 1$



$$\left(\text{sh}(x) \right)' = \frac{(e^x - e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}(x)$$

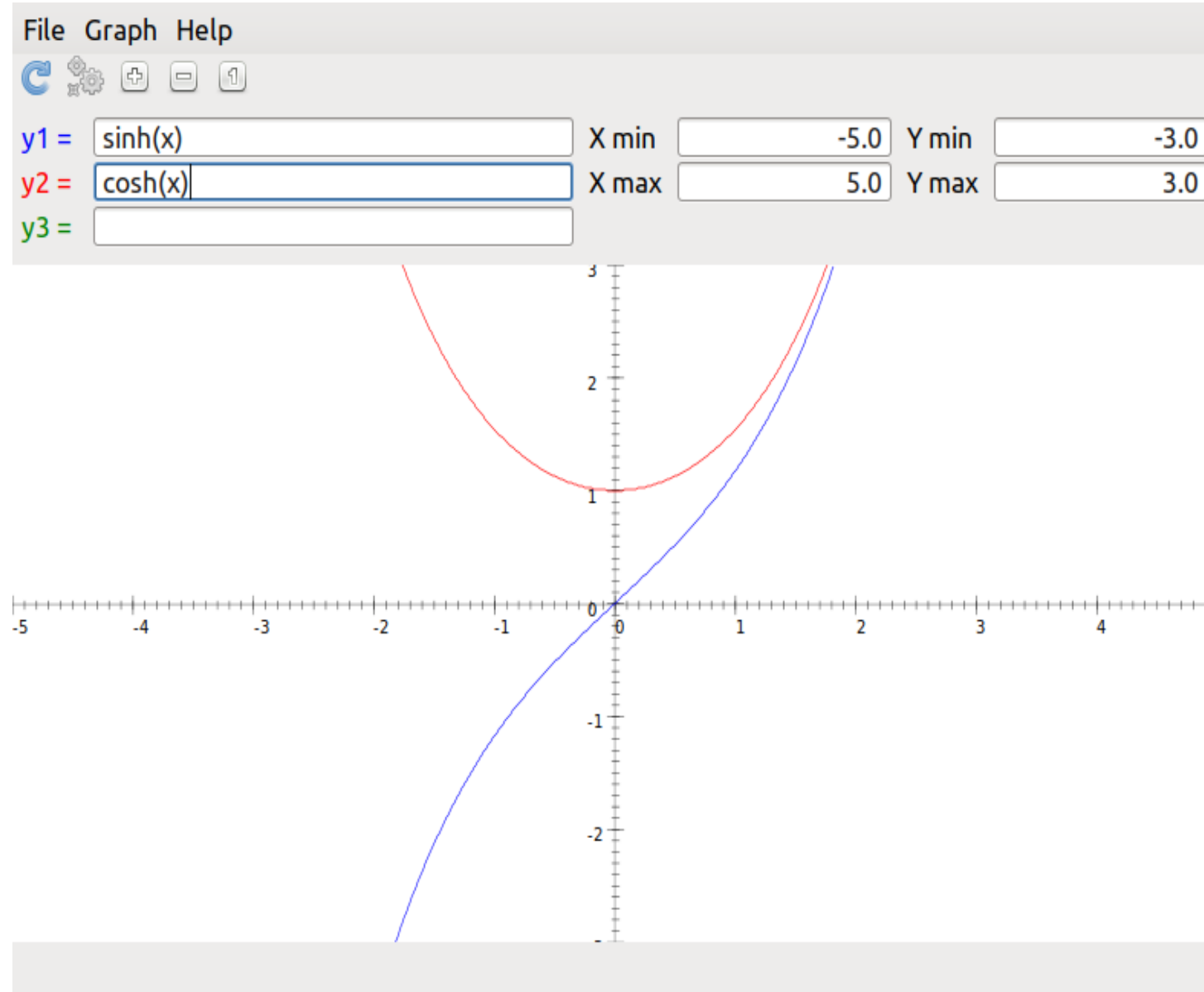
$$\left(\text{ch}(x) \right)' = \frac{(e^x + e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}(x)$$

$$\int \text{sh}(x) dx = \text{ch}(x) + C \quad ; / \text{ } \sim$$

$$\int \text{ch}(x) dx = \text{sh}(x) + C$$

$$\text{sh}(-x) = -\text{sh}(x)$$

$$\text{ch}(-x) = \text{ch}(x)$$



$$\sqrt[4]{15} = \sqrt[4]{16-1} = (16-1)^{\frac{1}{4}}$$

$$a = 16$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{4}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4 \sqrt[4]{x^3}}$$

$$f'(16) = \frac{1}{4 \cdot 2^3} = \frac{1}{32}$$

$$L_f = f(16) + f'(16) \cdot (x - 16) = 2 + \frac{1}{32} (x - 16) =$$

$$= 2 - \frac{1}{32} =$$

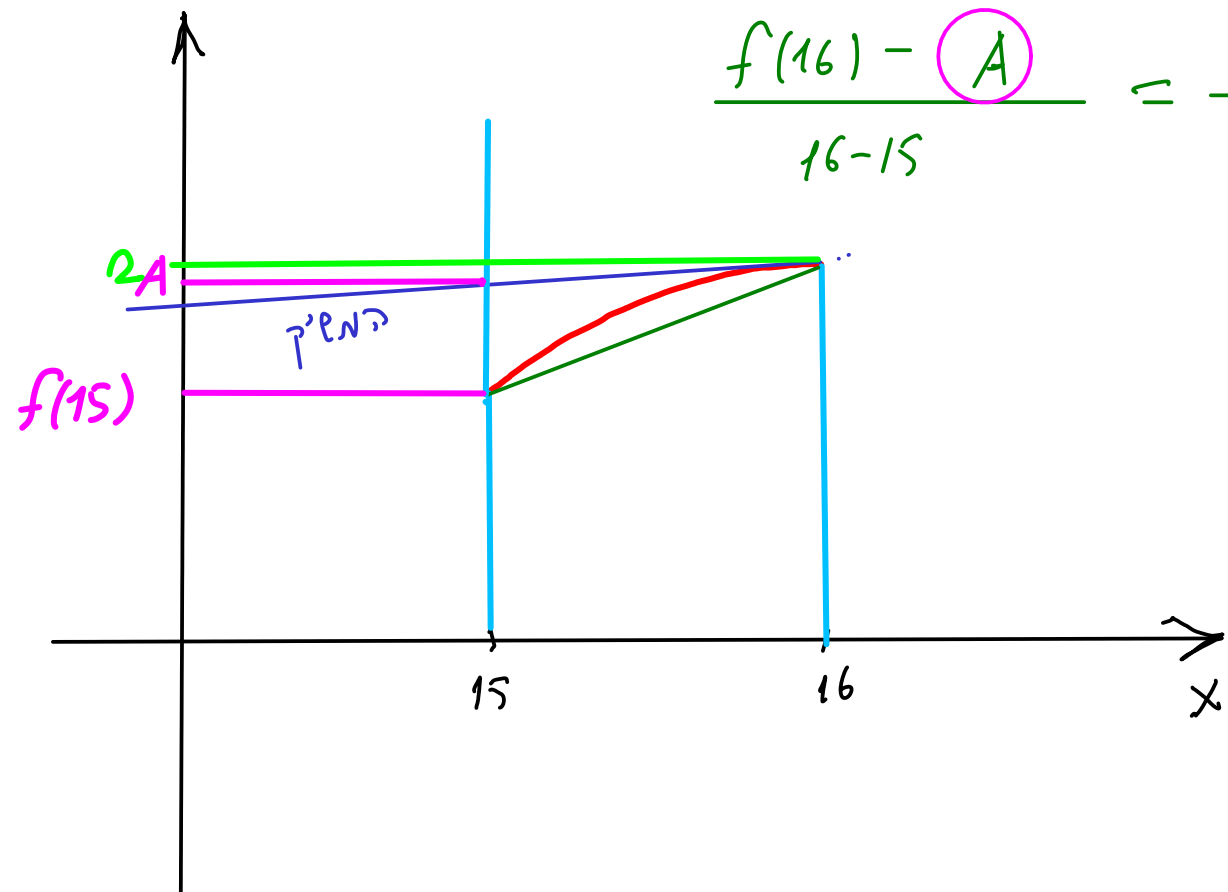
$$x = 15$$

$$\Delta x = x - 16 = -1$$

$$\frac{f(16) - f(15)}{16 - 15} = f'(c)$$

$$15 < c < 16$$

A : Δf near $f(15)$



$$f'(16)$$

$$f(15) \approx 1.772$$

$$A \approx 0.228$$

$$A = f(16) - f'(16) = 2 - \frac{1}{32}$$

File Edit View Search Terminal Help

ostap@ostap-desktop:~\$ octave

GNU Octave, version 5.2.0

Copyright (C) 2020 John W. Eaton and others.

This is free software; see the source code for copying conditions.

There is ABSOLUTELY NO WARRANTY; not even for MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. For details, type 'warranty'.

Octave was configured for "x86_64-pc-linux-gnu".

Additional information about Octave is available at <https://www.octave.org>.

Please contribute if you find this software useful.

For more information, visit <https://www.octave.org/get-involved.html>

Read <https://www.octave.org/bugs.html> to learn how to submit bug reports.

For information about changes from previous versions, type 'news'.

octave:1> 2-1/32

ans = 1.9688

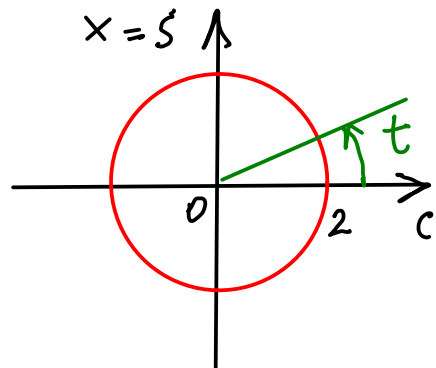
octave:2> 16^(1/4)

ans = 2

octave:3> 15^(1/4)

ans = 1.9680

octave:4>



התלכד נשנה בקוטר π ונחשב

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx =$$

1

$$x = 2 \sin t$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

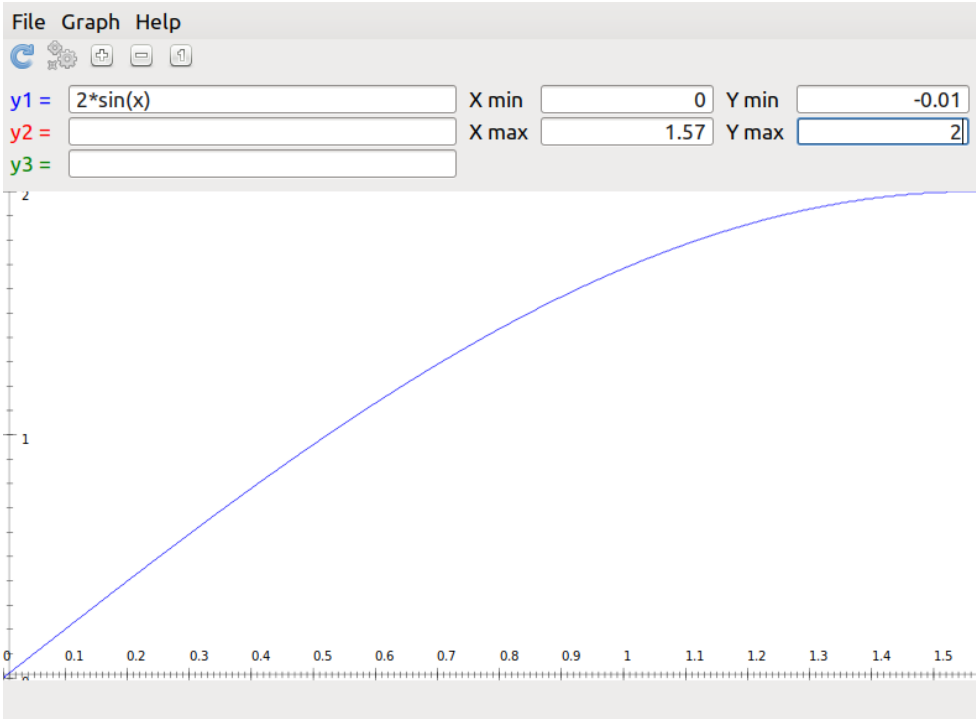
$$dx = 2 \cos t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(2t) + 1] dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1$$





$$x = \varphi(t)$$

$$dx = \dot{\varphi} dt$$

$$x = 2 \sin t$$

הפונקציה

הערה:

הטור (הפונקציה) $[0, \frac{\pi}{2}]$

הערה (הפונקציה) $[0, \frac{\pi}{2}]$

הפונקציה $x = \varphi(t)$ היא הפונקציה:

$$\begin{cases} \varphi(\alpha) = a \\ \varphi(\beta) = b \end{cases} \quad (1)$$

$[\alpha, \beta]$ הפונקציה $\varphi(t), \dot{\varphi}(t)$ (2)

$[\alpha, \beta]$ הפונקציה φ (3)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t) \cdot \dot{\varphi}(t) dt \quad \text{שם}$$

$$\int_0^{\ln 2} x e^{3x} dx = x \frac{1}{3} e^{3x} \Big|_0^{\ln 2} - \frac{1}{3} \int_0^{\ln 2} e^{3x} dx =$$

x	$\frac{1}{3} e^{3x}$
1	e^{3x}

$$= \frac{1}{3} (\ln 2) e^{3 \ln 2} - 0 \cdot e^0 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} e^{3x} \Big|_0^{\ln 2} = \frac{1}{3} \ln 2 \cdot e^{\ln 8} - \frac{1}{9} (e^{3 \ln 2} - e^0) =$$

$$= \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{9} (8 - 1) = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9} = \frac{24 \ln 2 - 7}{9}$$

سجل سجل

$$\int \frac{dx}{x^3+1}$$

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1) = 1$$

$$1-y < 0 \Rightarrow x^2-x+1$$

جواب

$$\textcircled{x^2} \quad A+B=0$$

$$B=-A$$

$$-2A+C=0$$

$$C=2A$$

$$\textcircled{x} \quad -A+B+C=0$$

$$3A=1$$

$$A = \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{1} \quad A+C=1$$

$$B = -\frac{1}{3}$$

$$C = \frac{2}{3}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{dx}{\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} =$$

$$= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x} = \left\{ \begin{array}{l} t := \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\} = - \int \frac{dt}{1 - t^2} = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t + 1} =$$

$$t = \sin x$$

$$dt = \cos x dx$$

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + C =$$

$$\int \int \frac{dt}{t - 1} = \left\{ \begin{array}{l} u := t - 1 \\ du = dt \end{array} \right\} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |t - 1| + C$$

$$\ln A + \ln B = \ln(AB)$$

$$-\ln A = \ln \frac{1}{A}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos(x) - 1}{\cos(x) + 1} \right| + C$$

$$\frac{1}{x^2+16}$$

ה'215 ג'3 ק'10

$\Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+16}$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+16} = 2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{dx}{x^2+16}$$

ה'215 ג'3 ק'10

("ה'215 ג'3 ק'10") ה'215 ג'3 ק'10 $\Leftarrow$

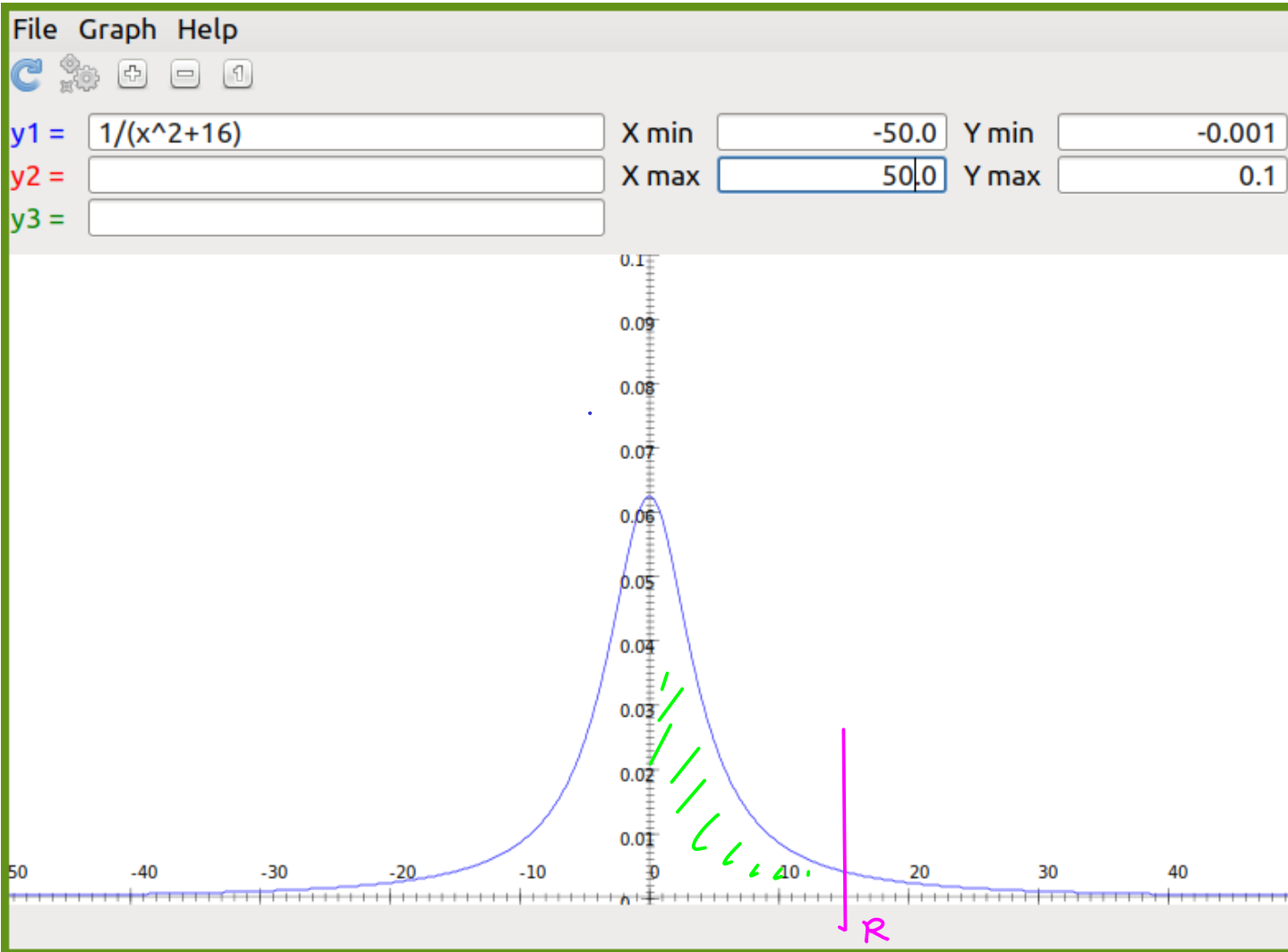
$$\int \frac{dx}{x^2+16}$$

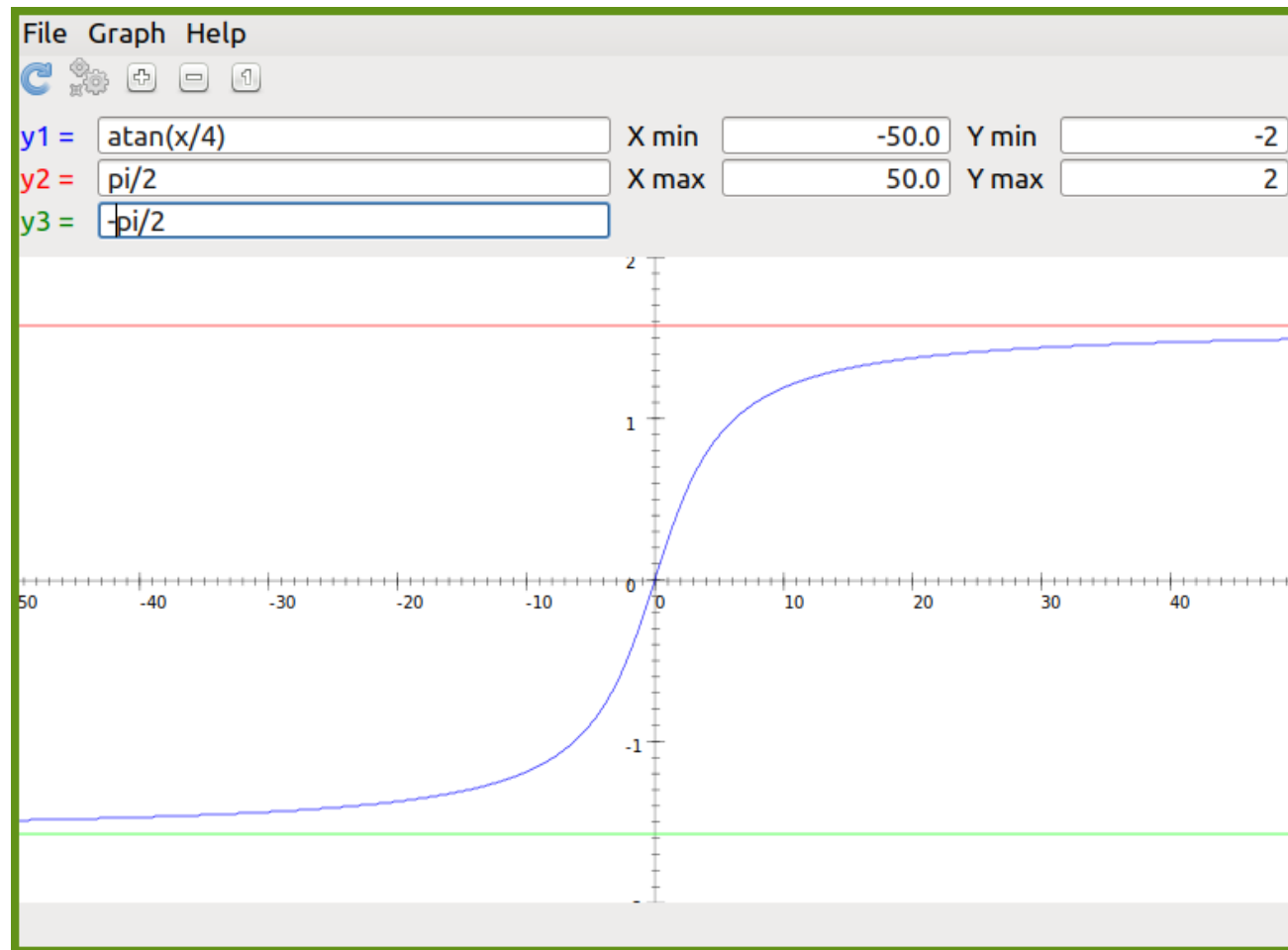
ה'215 ג'3 ק'10

$$\int \frac{dx}{x^2+16} = \frac{1}{16} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1} = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{x}{4} \\ 4 dt = dx \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{16} \int \frac{4 dt}{t^2+1} = \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{x}{4}\right) + C$$

$$\int_0^R \frac{dx}{x^2+16} = \frac{1}{4} \left[\arctan\left(\frac{R}{4}\right) - \arctan 0 \right] = \frac{1}{4} \arctan \frac{R}{4}$$





$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+16} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \arctan \frac{R}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+16} = 2 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow -\infty}} \int_M^N f(x) dx$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$

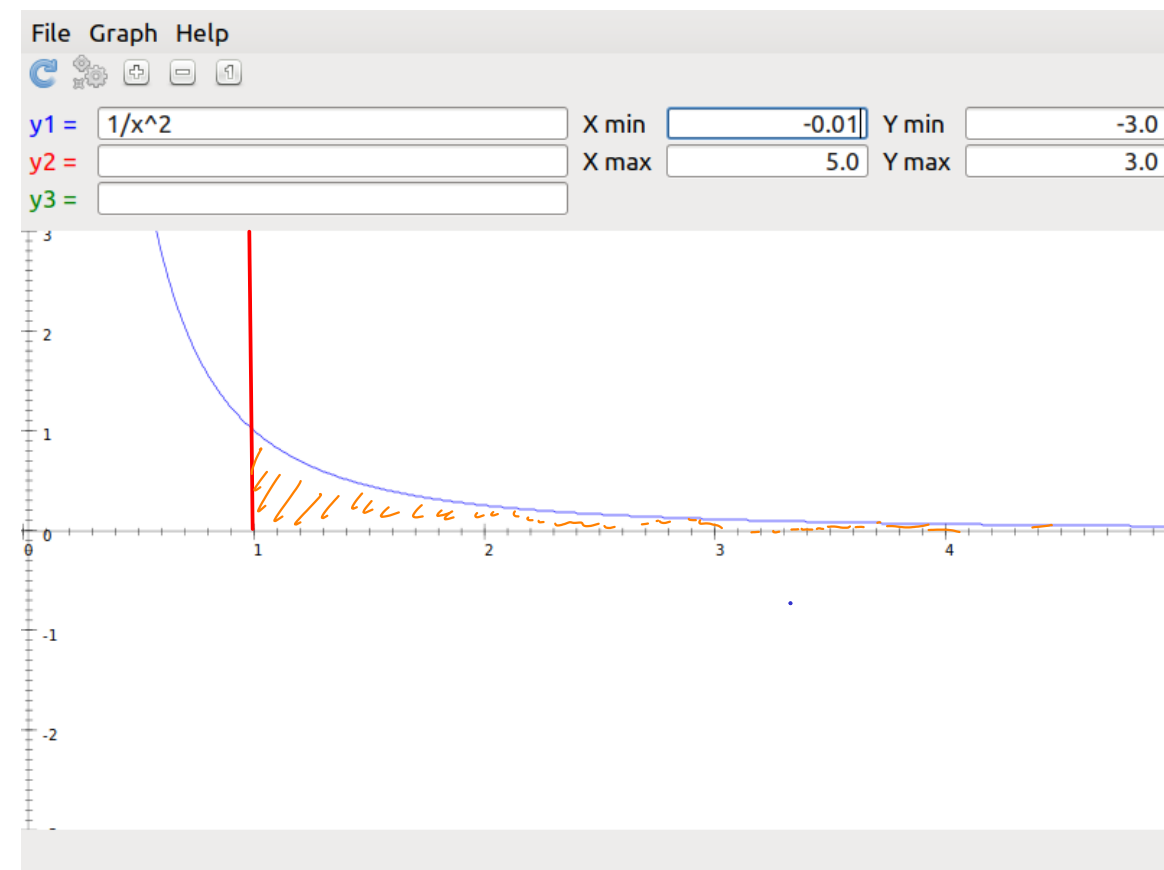
$$\gamma_{32} \sim N \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$$

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x) dx = 0$$

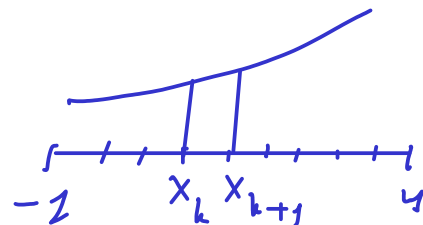
2

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_1^{\infty} x^{-2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R x^{-2} dx =$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_1^R = - \lim_{R \rightarrow \infty} \left. \frac{1}{x} \right|_1^R = - \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R} - 1 \right) = 1$$



$$\int_{-1}^4 (x^3 - x) dx$$



$$\sum_{k=1}^n m_k \Delta_n$$

$[-1, 4]$ פונקציה $x^3 - x$
 סכום ריבועי.

סכום ריבועי פונקציה $[-1, 4]$ בתקופה n גלגלים.

$$\Delta_n = \frac{4+1}{n} = \frac{5}{n}$$

(2) כחלק מהסכום $\sum_{k=1}^n$, $\overline{f}_n$

$$m_k = x_k^3 - x_k =$$

$$= \left(\frac{5k}{n} - 1 \right)^3 - \left(\frac{5k}{n} - 1 \right)$$

$$x_k = -1 + k \Delta_n = -1 + k \frac{5}{n} = \frac{5k}{n} - 1$$

$$x_0 = -1$$

$$x_1 = -1 + \Delta_n$$

$$x_2 = -1 + 2\Delta_n$$

$$S'_n = \Delta_n \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{5k}{n} - 1 \right)^3 - \frac{5k}{n} + 1 \right] =$$

הסכום האינסופי

$$= \frac{5}{n} \sum_{k=1}^n \left[\frac{125k^3}{n^3} - \frac{3 \cdot 25k^2}{n^2} + \frac{3 \cdot 5k}{n} - \cancel{1} - \frac{5k}{n} + \cancel{1} \right] =$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$= \frac{25}{n^2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{25k^3}{n^2} - \frac{15k^2}{n} + 2k \right) = \frac{25}{n^2} \left(\frac{25}{n^2} \sum_{k=1}^n k^3 - \frac{15}{n} \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k \right) =$$

$$= \frac{25}{n^2} \left(\frac{25}{\cancel{n^2}} \cdot \frac{\cancel{n^2}(n+1)^2}{4} - \frac{15}{\cancel{n}} \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6} + \cancel{2} \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} \right) =$$

$$= 25 \left(\frac{25}{4} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 - \frac{5}{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} + \frac{n(n+1)}{n^2} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 25 \left(\frac{25}{4} - \frac{5}{2} \cdot 2 + 1 \right) = 25 \left(\frac{25}{4} - 4 \right) =$$

File Edit View Page Tools Options Help

ניתן להשתמש בנוסחאות לסכום סדרה חשבונית וסדרה הנדסית ובנוסף בנוסחאות:

$$\sum_{i=1}^k i^4 = \frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{30} \quad \sum_{i=1}^k i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \quad \sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Page 1 of 6 Layer: Layer 1

$$= 25 \cdot \frac{9}{4} = \frac{225}{4}$$

$$\int_{-1}^4 (x^3 - x) dx = \left. \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right|_{-1}^4 = \frac{256}{4} - \frac{1}{4} - \frac{16}{2} + \frac{1}{2} = 64 + \frac{1}{4} - 8 = 56 + \frac{1}{4} = \frac{113}{4}$$

112

: N-L 11011 112

```
File Edit View Search Terminal Help
ostap@ostap-desktop:~$ maxima
Maxima 5.43.2 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.12
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) integrate(x^3-x,x,-1,4);

              4      2
             x      x
(%o1)  -----
              4      2

(%i2) integrate(x^3-x,x,-1,4);

              225
             ---
              4

(%i3) clear;
(%o3)  clear
(%i4) integrate(x^3-x,x,-1,4);

              225
             ---
              4

(%i5) █
```



$$\int_1^3 \frac{dx}{x-2} = \int_1^2 \frac{dx}{x-2} + \int_2^3 \frac{dx}{x-2}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x-2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{x-2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\ln|x-2| \Big|_1^{2-\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\ln|2-\varepsilon-2| - \ln|1-2| \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\ln \varepsilon - \ln 1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \varepsilon = -\infty$$

Not a number

