

חשבו | א'נ'ו'ס'ו' 2

אזר ת'ש"ז

<http://vzostapenko.org/academia.html>

$$S = 1 \quad : n(e)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots = 1$$

הסכום של כל המינורס הוא 1

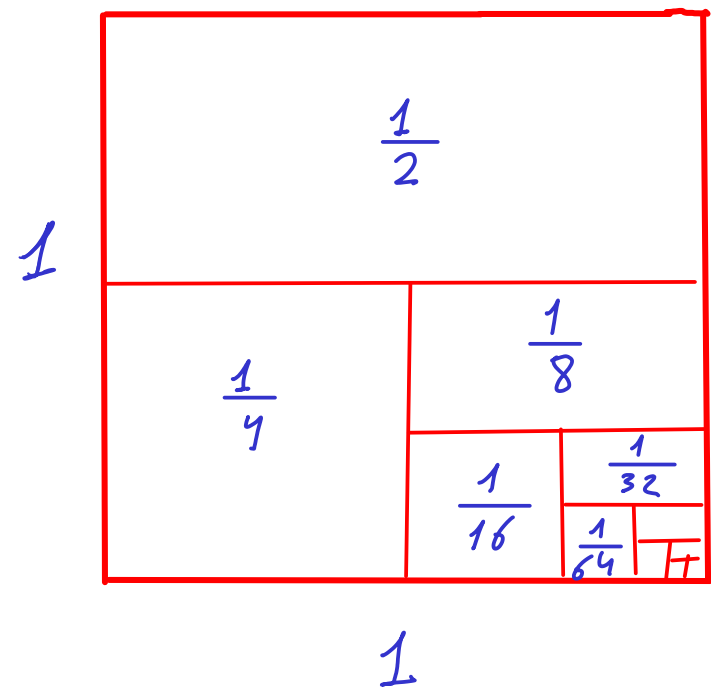
$$1 + 1 + 1 + \dots$$

הסכום אינו סופי

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

הסכום אינו קבוע

הסכום אינו קבוע



הסכום של כל המינורס הוא  $10^{50}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

האם זה?

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

$q^0$

יוני נוח לנגד קוסם

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + \dots \quad q \in \mathbb{R}$$

נקח "דג" על הלאר - אר הסכום על  $k$  גלים כוללים:

$s_k$  ק'ג'ל וסו  $s_k$

$$s_k := \sum_{n=0}^k q^n$$

$$s_{k+1} = s_k + q^{k+1}$$

לכן יש כול 2 סכומים:

$$(1) \quad 1, q, q^2, q^3, \dots \rightarrow \text{מסומם}$$

$$(2) \quad s_1, s_2, s_3, \dots \rightarrow \text{לכ יצאד (גזק כלל)}$$

במקרה על הלאר ההנסי, אפא למצוא מסתה פגמה (מסומם):

$$s_1 = 1 + q$$

$$s_2 = 1 + q + q^2$$

$$s_3 = 1 + q + q^2 + q^3$$

.....

כולל  
 $\swarrow$   
 $x(1-q)$

לכ'ר אר הסכום הכולל'ס'ר "ד"ל מסומם:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n := \lim_{k \rightarrow \infty} s_k$$

$$(1+q)(1-q) = 1-q^2$$

$$(1+q+q^2)(1-q) = 1-q^3$$

.....

$$\underbrace{(1+q+q^2+\dots+q^k)}_{s_k}(1-q) = 1-q^{k+1}$$

$$q \neq 1$$

$$s_k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$$

: | > δ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1-q^{k+1}}{1-q} = \frac{1 - \lim_{k \rightarrow \infty} q^{k+1}}{1-q}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q^{k+1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q^{k+1}$$

Se  $|q| > 1$  ou  $|q| \leq 1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q^k = \begin{cases} \infty, & q > 1 \\ 1, & q = 1 \\ 0, & -1 < q < 1 \\ \nexists, & q \leq -1 \end{cases}$$

$$(1+q+q^2+\dots+q^k)(1-q) = 1 - \cancel{q} + \cancel{q} - \cancel{q^2} + \cancel{q^2} - \cancel{q^3} + \dots + \cancel{q^k} - q^{k+1} = 1 - q^{k+1}$$



$$|q| < 1 \iff \sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ converges}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \frac{1}{1-q} \iff |q| < 1$$

$$|q| < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{! סדרה מתכנסת}$$

$$\left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \quad \text{! סדרה}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

מתואר הסדרה  $a_n$

(1) הסכום הפורמלי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  נקרא כא.

(2)  $s_k = \sum_{n=1}^k a_n$  "הסכום החלקי ה-k" הוא  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(3) האור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  נאכנס כאשר הסדרה  $s_k$  נאכנסת (כלומר  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k$  קיים)

"נאכנסת" כלומר

הסדרה  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  נקראת האור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  הכפוף על האור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

למשל נניח שהסדר  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  מתכנס.

כל  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

הנכנסת:  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  מתכנס, נסמן את הסכום  $S$ :

כל  $S_k := \sum_{n=1}^k u_n$  וכן  $S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ .

כל  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_k - S_{k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k - \lim_{k \rightarrow \infty} S_{k-1} = S - S = 0$  כל  $S_k - S_{k-1} = u_k$   
ל.ל.נ.

הצגה הקלאסית אינה נכונה:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  מתכנס (נראה לאמת)

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

כל  $u_n = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0$  מתכנס כל  $u_n$ .

$$u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + u_3 + v_3 + \dots$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \text{ סדרות } \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ סדרות } \underline{\text{קונברגנט}} \\ \text{'שיל}$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

$$a + b = b + a$$

סדרות קונברגנטות

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ סדרת סדרות } \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) \text{ קונברגנט } \textcircled{1}$$

$$\lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ סדרת סדרות } \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda u_n) \text{ קונברגנט } \textcircled{2}$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \left( \frac{3^{h-1}}{6^{h-1}} - \frac{1}{6^{h-1}} \right) = \sum_{h=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{h-1} - \sum_{h=1}^{\infty} \left( \frac{1}{6} \right)^{h-1} = \left\| \begin{array}{l} m := h-1 \\ m = 0, 1, \dots \end{array} \right\| =$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{3^{h-1} - 1}{6^{h-1}} = \boxed{5}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^m - \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{1}{6} \right)^m = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$q = \frac{1}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \boxed{6}$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} \quad A, B, C = ?$$

$$A(n+1)(n+2) + B(n^2+2n) + C(n^2+n) = 1$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2}$$

$$\textcircled{n^2} \quad A + B + C = 0$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{n} \quad 3A + 2B + C = 0$$

$$\begin{cases} B + C = -\frac{1}{2} \\ 2B + C = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$B = -1$$

$$C = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{1} \quad 2A = 1$$

$$S_n = \underbrace{\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right)}_{n=1} + \underbrace{\left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right)}_{n=2} + \underbrace{\left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) - \left( \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \right)}_{n=3} + \dots$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2}$$

$$\dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+2} =$$

$n = k-2 \qquad n = k-1 \qquad n = k$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k+2)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4}$$

$$s_k = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k+2)}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

:= 70 N

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5}{1000n^2} = 0.002 \neq 0$$

לכן  $\sum$  מתבדר.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 5}{1000n^2} = ?$$

# לוריס חיובי. מקדמי ההכנסות

כחול לכל  $n$ :  $u_n > 0$ .

משפט  $N$  נניח  $u_n$  סדרה יורדת חיובית,  
( $0 < u_{n+1} < u_n$  לכל  $n$ )

$f(x)$  פונקציה מתקיימת את הגבולות הבאים:

(א)  $f(x)$  חציפה בקלר  $[N, \infty)$  עבור מספר  $N$  מסוים.

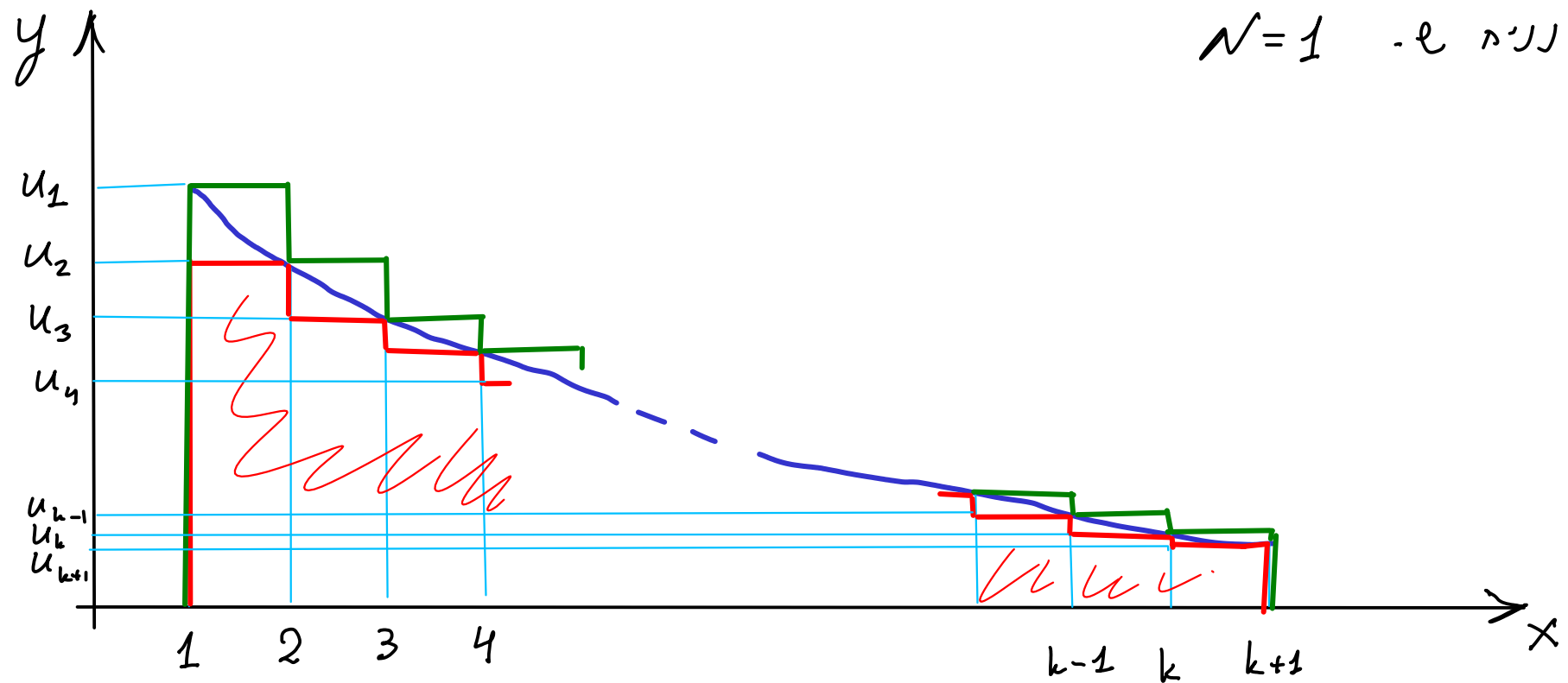
(ב)  $f(x)$  יורדת בקלר  $[N, \infty)$ .

(ג)  $f(n) = u_n$  לכל  $n$ .

אז' (ה) ור  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  מתכנס  $\Leftrightarrow \int_N^{\infty} f(x) dx$  מתכנס.



הוכחה:  $N=1$  - ע"י



נניח  $S$

$$S\left(\text{red step function}\right) < S\left(\text{blue curve}\right) < S\left(\text{green step function}\right)$$

$$u_2 + u_3 + \dots + u_{k+1} = S_{k+1} - u_1 < \int_1^{k+1} f(x) dx < u_1 + u_2 + \dots + u_k = S_k$$

$\Leftarrow$  (2)

$$\int_1^{k+1} f(x) dx \leq s_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} s$$

נתון שכל  $s_k$  מתכנס, כל  $\epsilon > 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s$

$$s_k \leq s \Leftarrow u_n > 0$$

$$\int_1^{k+1} f(x) dx \leq s$$

$$\int_1^{k+1} f(x) dx$$

אם  $\int_1^{k+1} f(x) dx$  מתכנס  $\Leftarrow$   $\int_1^{\infty} f(x) dx$  מתכנס

$$\exists \int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx$$

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \text{ מתכנס (נשקף)}$$

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^{k+1} f(x) dx$$

כל  $f$  יחידה,  $f$  מתכנס,  $f$  מתכנס

אם  $f$  מתכנס,  $f$  מתכנס,  $f$  מתכנס

$$N \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$$

$$; \int^3, \text{ or } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx ; / \mu$$

$$\Rightarrow (3)$$

$$\text{b) } \int_0^1 s_{k+1} < u_1 + L \iff s_{k+1} - u_1 < L \text{ s/o, } L := \int_N f(x) dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Le N

$$\gamma(C) \Leftrightarrow \text{non-increasing } \lambda_k \Leftrightarrow \begin{cases} (f_k) \text{ non-increasing} \\ \lambda_{k+1} = \lambda_k + u_1 > \lambda_k \end{cases} \quad / \gamma \delta$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \boxed{8}$$

כל הדרגות.

הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x}$  נקראת "הפונקציה ההפוכה"

כל  $N > 0$  נבחר.

$$[8.327, \infty)$$

$$: N = 8.327$$

$$\int_N^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_N^M \frac{dx}{x} = \lim_{M \rightarrow \infty} (\ln |M| - \ln |N|) = \infty$$

כלומר, האינטגרל מתפוצץ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \boxed{9}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M x^{-2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{M} + 1 \right) = 1$$

כלומר, האינטגרל收斂.

הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  נקראת "הפונקציה ההפוכה הריבועית"

## מבחן ההשוואה

לשם נניח  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n, \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  מתכנסים:  $0 < u_n \leq v_n$  במרחב אבסולוטי.

לפיכך

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ מתכנס } \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} v_n \text{ מתכנס} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n \text{ מתכנס } \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ מתכנס} \quad (2)$$

הוכחה: נניח  $0 < u_n < v_n$  לכל  $n$ .

$$s_k := \sum_{n=1}^k u_n \quad | \quad s_k$$

$$S_k := \sum_{n=1}^k v_n$$

$$0 < s_k \leq S_k \quad \forall k$$

$$s_k \leq \sigma_k < \sigma \quad \text{if} \quad \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \right) \quad \sigma_k \leq \sigma \quad \text{if} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k =: \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^k \sigma_n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \Leftrightarrow \quad \text{if} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{if} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{if} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{if} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

$$s_k > M \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \infty \quad \Leftrightarrow \quad u_n > 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (2)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = \infty \quad \text{if} \quad \sigma_k \geq s_k > M \quad \text{if} \quad \sigma_k > M \quad \text{if} \quad \sigma_k > M \quad \text{if} \quad \sigma_k > M$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{if} \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{if} \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{if} \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{if} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{if} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{if} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{if} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{if} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{if} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h^n} \quad \boxed{3}$$

$$. n \int \Gamma n > 0 < \frac{1}{h^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

1 } 3

$$. o j > n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h^n} \Leftrightarrow o j > n \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$. o j > n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h^n} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n \int \Gamma n > 0 < \frac{1}{h^n} \leq \frac{1}{n^2} \\ o j > n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} \end{array} \right.$$

2 } 3

# ד'Alembert ב'הנחה

Coen נ"ח  $u_n > 0$  כל  $n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} =: L$  (ז"ל אומדן ממוצע של  $u_n$ )

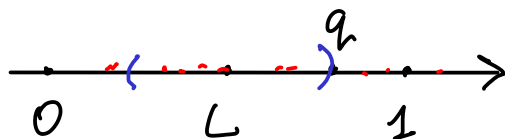
סדרה  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$   $\Leftarrow L < 1$  (כ)

סדרה  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$   $\Leftarrow L > 1$  (ב)

הוכחה:

$0 < L < 1$ , קיים  $q$  כזה ש-  $L < q < 1$  (כ)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L \Leftarrow$  נ"ח סדרה  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$   $\Leftarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < q \Leftarrow n > N$  (ז"ל  $u_n$  קטן)





$$u_{n+1} < q u_n \quad \text{for } n \geq N \quad \text{if } u_{n+1} < u_n q \quad \text{for } n \geq N$$

$$u_{n+2} < q u_{n+1} < q^2 u_n$$

$$u_{n+3} < q u_{n+2} < q^3 u_n$$

...

$$u_{n+m} < q^m u_n$$

כאן נרשם  $u_{n+m} < q^m u_n$  במקרה של  $q < 1$  ו- $u_n > 0$ .  
 כאן נרשם  $u_{n+m} < q^m u_n$  במקרה של  $q < 1$  ו- $u_n > 0$ .

$$\left( \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \iff n > N \right) : N \quad \text{if } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \quad L > 1 \quad (*)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n > u_N > 0 \iff u_N < u_{N+1} < u_{N+2} < \dots \quad \text{for } n \geq N$$

ד"ר. ל. נ.

הצגת  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  כסדרה

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

הסדרה מתכנסת.

$$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}, u_n = \frac{1}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \boxed{4}$$

הצגת

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \boxed{5}$$

הצגת

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

המשפט  $L=1$  מתאר

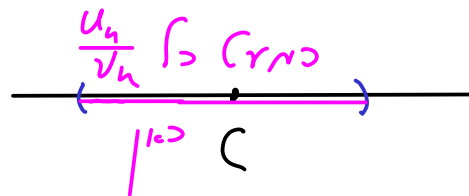
המשפט d'Alembert מתאר

## מבחן ההשוואה הזגזוגי

Coen נתונים  $u_n, v_n$   $\rightarrow$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = C$  :  $u_n, v_n$   $\rightarrow$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = C$   $0 < C < \infty$   $\rightarrow$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = C$

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$   $\Rightarrow$   $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$   $\rightarrow$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = C$

$(\varepsilon = \frac{C}{2})$   $C - \frac{C}{2} < \frac{u_n}{v_n} < C + \frac{C}{2} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = C$  הוכחה: 1



$\left\{ \begin{array}{l} u_n < \frac{3}{2} C v_n \\ v_n < \frac{2 u_n}{C} \end{array} \right. \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} > \frac{C}{2}, \quad \frac{u_n}{v_n} < \frac{3}{2} C$

(2) נניח  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  מתכנס. כלומר  $\int_0^1 f(x) dx$  קיים (גורם 19'18). הכוונה היא  $u_n < v_n$

בזמן  $\int_0^1 f(x) dx$  מתכנס.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} C v_n = \frac{3}{2} C \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad \text{כך} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad \text{מתכנס}$$

(3) נניח  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  מתכנס  $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{C} u_n = \frac{2}{C} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$  מתכנס.

כלל

6

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$v_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

הגורם 'היכנס' ל-0 כל עוד  $n$  גדול מספיק

$$\text{לכן } \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+10)}} = 1$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+10)}}$$

$$v_n = \frac{1}{n}$$

$$\text{לכן } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+10)}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+10)}}$$

7

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \quad : \text{אם } u_n \text{ ו-} v_n \text{ מתקרבים לאותו גודל} \quad \underline{\underline{\text{L'Hôpital}}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (1) \quad \text{אם } u_n < v_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n < \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (2) \quad \text{אם } v_n < u_n$$

אם  $u_n \sim v_n$

$$s_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k$$

$$\sigma_k = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_k$$

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \dots + u_k v_k = \omega_k$$

$$\omega_k \neq s_k \sigma_k$$

$$u_n \sim v_n$$

$$s_k \sigma_k < \omega_k \Leftrightarrow u_n, v_n > 0$$

$$s_3 \sigma_3 = (u_1 + u_2 + u_3)(v_1 + v_2 + v_3) =$$

$$= u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_1 v_3 + u_2 v_1 + u_2 v_2 + u_2 v_3 + u_3 v_1 + u_3 v_2 + u_3 v_3$$

$$\omega_3 = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$s_k \rightarrow s$$

$$u_1 + u_2 + u_3$$

$$\sigma_k \rightarrow \sigma$$

$$\Downarrow ?$$

$$s_k \sigma_k \rightarrow s \sigma$$

# סדרת טור

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad -1 < q < 1$$

$$(-1)^n \text{ זוגי}$$

סדרת טור  $u_n$  (G.W.v. Leibniz) קריטריון  
 חיובית, יחסית,  $u_n > 0$

$$u_{n+1} < u_n \quad (k)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \text{ מתכנס} \quad (1)$$

$$|s - s_k| < u_{k+1} \text{ , } s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \quad (2)$$

$$1_2, 1_4, 1_6, \dots$$

הוכחה: (1) נקח  $\delta_k$  ונבחר  $k$  כזה ש- $\delta_{2m} : \sigma_{215}$  ו- $\delta_{2m} - 1/e$  סגורים. אז 2-א. נרצה:

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}) > 0 \quad (1)$$

$$\Delta_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-1}) - u_{2m} < u_1$$

$$u_n \subset \mathbb{N} \quad \text{אין } \mathbb{N} \quad \text{כאן } \leq \quad \text{כאן } \leq \quad \text{כאן } \leq$$

$$\tau_m := \delta_{2m}$$

$$0 < s_{2m} < u_1 \quad \therefore \underline{\text{מיון } s_{2m} \text{ בסדר}} \quad \text{כפוף}$$

$$s_{2(m+1)} = s_{2m} + \underbrace{(u_{2m+1} - u_{2m+2})}_{>0} > s_{2m} \quad \therefore \underbrace{u_{2m+1} - u_{2m+2}}_{>0} > 0 \quad \text{so} \quad s_{2m} < s_{2(m+1)}$$

$$z_{k+1} > z_k$$

סכך | גרר - גרר  $\Delta_{2m}$  נוסחה



$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}$$

$$: s_{2m+1} \quad (2)$$

$$: \text{כך}, \text{נ"ך} \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} \text{ קיים} : \text{נניח}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m}$$

$\Rightarrow 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{נניח: } s_{2m+1} \text{ קיים} \\ \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m+1} \end{cases}$$

תרגיל (2)

s.e.n

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} s_k \text{ כל } n \text{ קיים}$$

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \\ u_{n+1} < u_n \end{cases}$$

לכן  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  1

לכן  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  :  $\infty$

כיצד נבדוק

נניח  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  :  $\infty$  לכן  $u_n$  converges  
לכן  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  :  $\infty$

$$(1 \leq n \leq k) \quad u_n > 0 \quad \text{הסכום : } \Delta'_k$$

$$(1 \leq n \leq k) \quad u_n < 0 \quad \text{הסכום : } \Delta''_k$$

$$\Delta_k = \Delta'_k - \Delta''_k$$

ה

15/6

$$\sigma_k = \Delta'_k + \Delta''_k$$

$$0 \leq \Delta'_k \leq \sigma_k$$

$$0 \leq \Delta''_k \leq \sigma_k$$

הסכום  $\Delta'_k, \Delta''_k$  - e הסכום

$$\sigma_5 = 2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{4}{7} + \frac{3}{11}$$

הסכום :  $\Delta'_k$   $u_n \neq 0$   $\Delta_k$

$$\Delta_k := \sum_{n=1}^k u_n$$

הסכום :  $\Delta''_k$  (1

$$\sigma_k := \sum_{n=1}^k |u_n|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 2 - \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{4}{7} - \frac{3}{11} + \frac{128}{19} + \dots$$

$$\Delta_5 = 2 - \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{4}{7} - \frac{3}{11}$$

15/6

$$\Delta'_5 = 2 + \frac{4}{7}$$

$$\Delta''_5 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{11}$$

$$\Delta'_3 < \Delta'_4$$

$$\Delta'_4 = \Delta'_5$$

$$\delta'_k \leq \delta'_{k+1} \quad \text{בסדרה} \quad \delta'_k \quad \text{עולה (עולה)}.$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k =: \sigma$$

$$(2) \quad \delta'_k : \text{הסדרה } \delta'_k \text{ חסומה מלמעלה} \quad \text{בסדרה } \sigma \text{ חסומה מלמעלה} \\ \sigma_{k+1} = \sigma_k + |u_{k+1}| > \sigma_k \Leftrightarrow \sigma_k \leq \sigma \quad \text{עבור } k.$$

$$\delta'_k \leq \sigma \leq \sigma$$

$$\text{הסדרה } \delta'_k \text{ חסומה מלמעלה}.$$

$$(3) \quad \delta''_k \text{ חסומה מלמעלה}.$$

$$(4) \quad \delta_k = \delta'_k - \delta''_k \quad \text{בסדרה } \delta_k \text{ חסומה מלמעלה} \quad \text{בסדרה } \delta_k \text{ חסומה מלמעלה}.$$

$$\underline{\sigma_{k+1}}$$

5/6 י 3 שאלון 1:

1

| $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ | הטור  | $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ | $\sum_{n=0}^{\infty}  u_n $ |
|---------------------------|-------|---------------------------|-----------------------------|
| מתכנס                     | מתכנס | מתכנס בהחלט               |                             |
| מתבדר                     | מתכנס | בתנאי מתכנס               |                             |
| מתכנס                     | מתבדר | לפי המשפט, המצב אינו קיים |                             |
| מתבדר                     | מתבדר | מתבדר                     |                             |

2  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$  מתכנס בהחלט.

3  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$  מתכנס בתנאי.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} \text{ converges } \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converges} \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} \text{ converges} \quad \boxed{4}$$

File Edit View Search Terminal Help

```
ans = 1.2500000000000000
octave:6> sum(1 ./ [1:3] .^ 2)
ans = 1.3611111111111111
octave:7> sum(1 ./ [1:10] .^ 2)
ans = 1.549767731166541
octave:8> sum(1 ./ [1:20] .^ 2)
ans = 1.596163243913023
octave:9> sum(1 ./ [1:50] .^ 2)
ans = 1.625132733621529
octave:10> sum(1 ./ [1:100] .^ 2)
ans = 1.634983900184892
octave:11> sum(1 ./ [1:200] .^ 2)
ans = 1.639946546014997
octave:12> sum(1 ./ [1:500] .^ 2)
ans = 1.642936065514894
octave:13> sum(1 ./ [1:1000] .^ 2)
ans = 1.643934566681561
octave:14> sum(1 ./ [1:10000] .^ 2)
ans = 1.644834071848065
octave:15> sum(1 ./ [1:100000] .^ 2)
ans = 1.644924066898242
octave:16> sum(1 ./ [1:1000000] .^ 2)
ans = 1.644933066848770
octave:17>
```

$\approx 1.645$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} \quad \boxed{5}$$

הערות, חלקי

```
File Edit View Search Terminal Help
octave:3> x=sum(1 ./ factorial([1:2]))
x = 1.5000000000000000
octave:4> x=sum(1 ./ factorial([1:3]))
x = 1.6666666666666667
octave:5> x=sum(1 ./ factorial([0:1]))
x = 2
octave:6> x=sum(1 ./ factorial([0:2]))
x = 2.5000000000000000 s2
octave:7> x=sum(1 ./ factorial([0:3]))
x = 2.6666666666666667
octave:8> x=sum(1 ./ factorial([0:4]))
x = 2.7083333333333333
octave:9> x=sum(1 ./ factorial([0:5]))
x = 2.7166666666666666
octave:10> x=sum(1 ./ factorial([0:6]))
x = 2.7180555555555555
octave:11> x=sum(1 ./ factorial([0:7]))
x = 2.718253968253968
octave:12> x=sum(1 ./ factorial([0:8]))
x = 2.718278769841270 s8
octave:13> x=sum(1 ./ factorial([0:9]))
x = 2.718281525573192 s9
octave:14> x=sum(1 ./ factorial([0:10]))
x = 2.718281801146385 s10
octave:15> x=sum(1 ./ factorial([0:20]))
x = 2.718281828459046 s20
octave:16> x=sum(1 ./ factorial([0:50]))
x = 2.718281828459046 s50
octave:17> e
ans = 2.718281828459045
octave:18> █
```

הערות למעלה נכונה.

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!}$$

6.

$$s_k = \sum_{h=0}^k \frac{1}{h!}$$

$$|s - s_k| = ? \quad \because \sqrt{e}$$

s אינו קטן.

$$\text{נדרש } \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \\ & \text{נדרש } \sum \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\text{נדרש } \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \boxed{1}$$

$\therefore$  גורם  $\sin$  קטן מ-1



## סדרת טיורינג

סדרת טיורינג  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$   $x$  משתנה

שאלה: עם להצטרף  $x = x_0$ , האם  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_0)$  מתכנס? נניח

$$u_n(x) = c_n \cos(nx) \quad \text{למשל} \quad (c_n \in \mathbb{R})$$

$$|x| < 1 \quad \text{עבור} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad u_n(x) := x^n \quad \boxed{1}$$

מסקנה: ק"מ"ם ערכי  $x$  כאלו שהאר (גמסברי) מתכנס  
ק"מ"ם ערכי  $x$  כאלו שהאר (גמסברי) מתכנס

I. Newton - 1669

כל חזקה:  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  סדרה מסתכמת

$\sum c_n x^n$  מתכנס  $= \{x \in \mathbb{R} : \text{ההתכנסות של } \}$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  כל גזס  $c_n = 1 (\forall n)$  2

$R = 1$

$\mathcal{D} = (-1, 1)$

תחום ההתכנסות:

כל:  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$   
 $a$  "מרכז" של הסדרה

Caen (N.H. Abel) כל  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  י 3 אפשרויות:

א) ה"מרכז" עבור  $x=0$  בלבד.

ב) ק"מ מספר  $R > 0$  כך שהסדרה מתכנסת בהחלט עבור כל  $-R < x < R$  ומתבדר עבור  $|x| > R$ .

ג) הסדרה מתכנסת עבור כל  $x$ .

$R = 0$  "רדיוס ההתכנסות"

$(-R, R)$

$0 < R < \infty$

$(-\infty, \infty)$

$R = \infty$

המשפט של ד'אלמברט  $C_n \neq 0$  - e

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|$$

(d'Alembert) צור

הוכחה: ד'אלמברט  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1} X^{n+1}}{C_n X^n} \right| < 1$   $\Leftrightarrow$   $|C_n| > |C_{n+1}|$   $\Rightarrow$   $|C_n| > |C_{n+1}|$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1} X^{n+1}}{C_n X^n} \right| > 1 \Leftrightarrow |C_n| < |C_{n+1}|$$

$$|C_n| > |C_{n+1}| \Leftrightarrow |X| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| \Leftrightarrow |X| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| \cdot |X| < 1$$

$$|X| > \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| \Rightarrow |C_n| < |C_{n+1}|$$

ד.ל.נ  $\left( - \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|, \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| \right)$  :  $|C_n| > |C_{n+1}|$

$$\mathcal{D} = (-1, 1) \quad \Leftarrow R = 1 \quad \Leftarrow \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = 1$$

$$C_n = (-1)^{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n \quad \boxed{3}$$

$$-1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots$$

$$\left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\mathcal{D} = (-1, 1), \quad R = 1$$

$$C_n = n^2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n \quad \boxed{4}$$

$$x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^n}{n} \quad \boxed{5}$$

$$C_n = (-1)^n \frac{2^n}{n}$$

$$\left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \frac{2^n}{n} \cdot \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{D} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad R = \frac{1}{2}$$

$$\left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$D = (-\infty, \infty)$$

$$R = \infty$$

הכללת  $x$  לכל  $n$  וכל  $x$

$$C_n = \frac{1}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \boxed{6}$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

$$\left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$R = 0$$

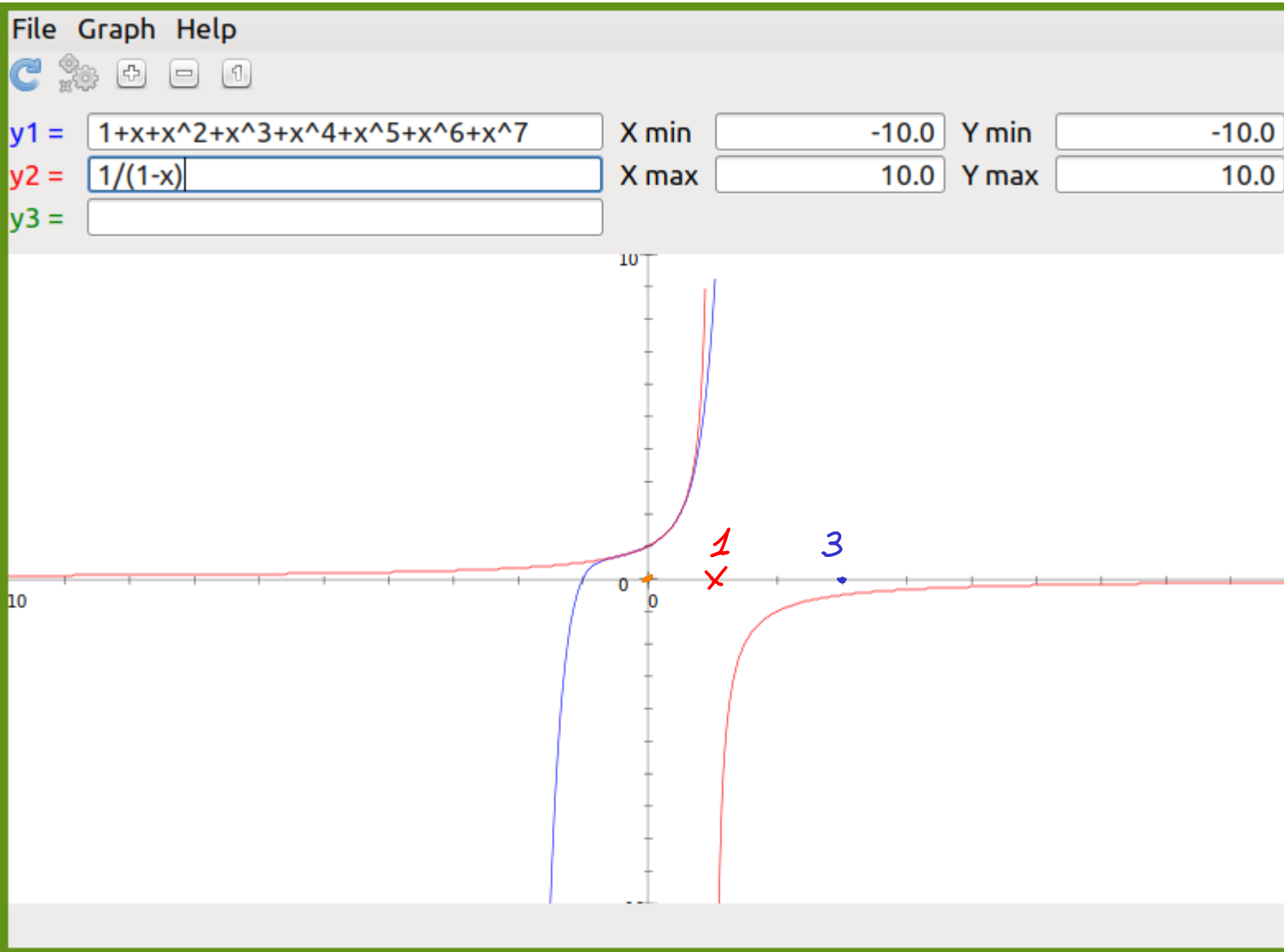
הכללת  $x$  לכל  $x$  וכל  $n$   $f(x) = \frac{1}{1-x}$

$a=0$  הכללת  $x$  לכל  $x$  וכל  $n$

הכללת  $x$  לכל  $x$  וכל  $n$   $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n \quad \boxed{7}$$

$$1 + x + 2x^2 + 6x^3 + 24x^4 + 120x^5 + \dots$$



$$|q| = \left| -\frac{t}{2} \right| = \left| \frac{x-3}{2} \right| < 1 \quad \text{נדרש} \quad 0 < x-3 < 2$$

$$D = (1, 5) \quad 1 < x < 5 \quad |x-3| < 2$$

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad !a=3 \quad g(t) := f(t+3) \quad \text{נדרש} \quad 0 < t < 2 \quad \boxed{8}$$

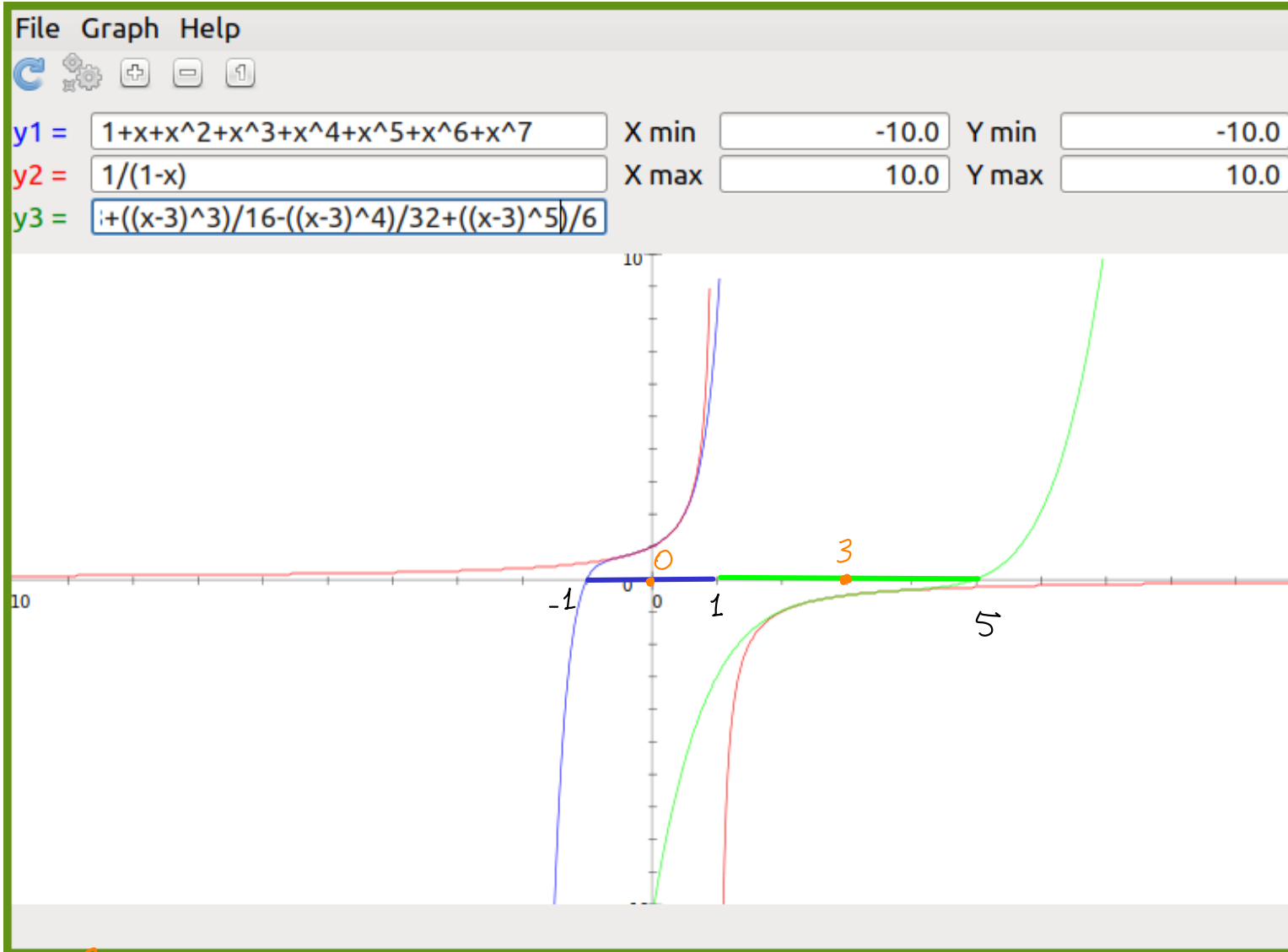
$$t := x-3 \quad x = t+3$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-(t+3)} = \frac{1}{-2-t} = -\frac{1}{2+t}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{t}{2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{t}{2}\right)^n = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} (x-3)^n$$



$$f(x) = 1/(1-x)$$

$$x \neq 1$$

$\int_{x=0}^{\infty} n! \cdot x^n \cdot f(x)$   $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7 + \dots$

$(-1, 1)$   $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$f(x) \int_{x=3}^{\infty} n! \cdot (x-3)^n \cdot f(x)$   $-1/2+(x-3)/4-((x-3)^2)/8+((x-3)^3)/16-((x-3)^4)/32+((x-3)^5)/64 + \dots$   $(1, 5)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} (x-3)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n : \text{סדרת טור}$$

$$C_n \text{ מקדם } (x-a)^n$$

$$a \text{ הנקודה } x$$

הקוטר  $R$  של הסדרה  
 (הקוטר של הסדרה)  $(a-R, a+R)$   
 והנקודה  $a$  נקראת הנקודה

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|$$

תוצאה  $R > 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$  מתכנסת לכל  $x$  המקיים  $|x-a| < R$ , והוא מתכנסת גם בנקודה  $x=a$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n \quad \boxed{9}$$

$$R=1 \Leftrightarrow C_n=1, a=2 \text{ הנקודה}$$

$$(a-R, a+R) = (2-1, 2+1) = (1, 3)$$



$$\left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

$$R = \frac{1}{2}$$

$$c_n = 2^n, \quad a = \frac{3}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2x-3)^n$$

10

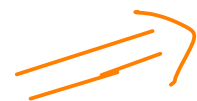
$$(a-R, a+R) = \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) = (1, 2)$$

ה' בנים גשם"

3"ס

זנירה ואינצבזית א'אר-א'נר ג ארי תיקור

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$



$$(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3)' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2$$

!! ע"ק

1N ג/ס

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right)' \neq \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)$$

למשל, כל אר חקור יגכונה: אסהא מחכנס, הו מחכנס ב"נ'זה לוה"  $\left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n x^n)'$

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)C_n}{(n+2)C_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{C_{n+1}} = R$$

$f(x)$   $\rightarrow$   $\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n$   $\Rightarrow$   $R > 0$   $\Rightarrow$   $\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n$   $\Rightarrow$  converges

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_n X^n \quad \text{converges} \quad \text{for } |x| < R$$

$R$   $\Rightarrow$   $\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n$   $\Rightarrow$   $R$   $\Rightarrow$   $\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n$   $\Rightarrow$   $R$

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n X^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n n X^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n n X^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1} (k+1) X^k$$

$$\left( C_0 + C_1 X + C_2 X^2 + C_3 X^3 + \dots \right)' = (C_0)' + (C_1 X)' + (C_2 X^2)' + (C_3 X^3)' + \dots =$$

$$= 0 + C_1 + 2C_2 X + 3C_3 X^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} (n+1) X^n$$

$$(-1, 1) \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' \overset{\text{לפי ההנחה}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \quad \boxed{1}$$

לפי ההנחה. נניח  $C_n$  ו/או  $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$  מתכנסים ב  $(-R, R)$  עבור  $R > 0$ .

נניח כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{n-1}}{n} x^n$  מתכנס ב  $(-R, R)$  ו/או  $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$  מתכנס ב  $(-R, R)$  ו/או  $F(x) = \int s(x) dx$  מתכנס ב  $(-R, R)$ .  
 $F'(x) = s(x)$   
 $F(0) = 0$  : נניח  
 $= C_0 x + \frac{C_1}{2} x^2 + \frac{C_2}{3} x^3 + \dots$

$$\frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1, 1) \quad s(x) = \frac{1}{1+x} \quad \boxed{2}$$

$$q = -x \quad \frac{1}{1+x} \quad \int_{(-1, 1)} \dots \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \quad C_n = (-1)^n$$

$C_0 = 0 \quad C_1 = 1 \quad C_2 = -\frac{1}{2} \quad C_3 = \frac{1}{3} \dots$

$$F(x) \in \int \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x| + C \quad \Rightarrow \quad F(0) = \ln 1 + C = C = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \ln|1+x|$$

$F(0) = 0$

$$|1+x| = 1+x$$

$$\Leftrightarrow (-1, 1) \rightarrow \text{domain}$$

$$\ln|1+x| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

$$F(0) = C_0 \quad \begin{cases} F(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots \\ x = 0 \end{cases}$$

$$(-1, 1) \rightarrow \text{domain} \quad \ln(1+x) \quad \text{for } x = -\frac{1}{2}$$

$$\ln 2 = -\ln \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} \quad \Leftrightarrow \quad \ln \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n \cdot 2^n} \quad x = -\frac{1}{2} \quad \boxed{3}$$

# Taylor series expansion

$$C_0 = f(0) \quad \Leftrightarrow \quad -R < x < R, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$$

$$C_n = ?$$

$$f'(x) = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \dots$$

$$f'(0) = C_1$$

$$C_1 = f'(0)$$

$$f''(x) = 2C_2 + 2 \cdot 3 C_3 x + \dots$$

$$f''(0) = 2C_2$$

$$C_2 = \frac{1}{2} f''(0)$$

$$C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

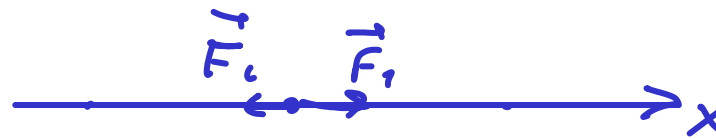
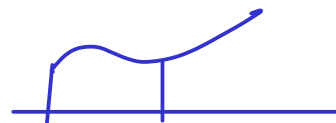
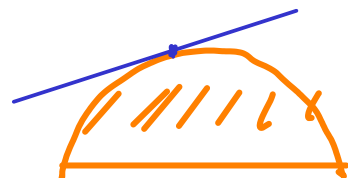
Conclusion

$$C_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} f'''(0)$$

$$f^{(n)}(0) = n! C_n$$

$x(t) = ?$

$$m \ddot{x} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{F}_i}{|x(t)|^{1/3}}$$



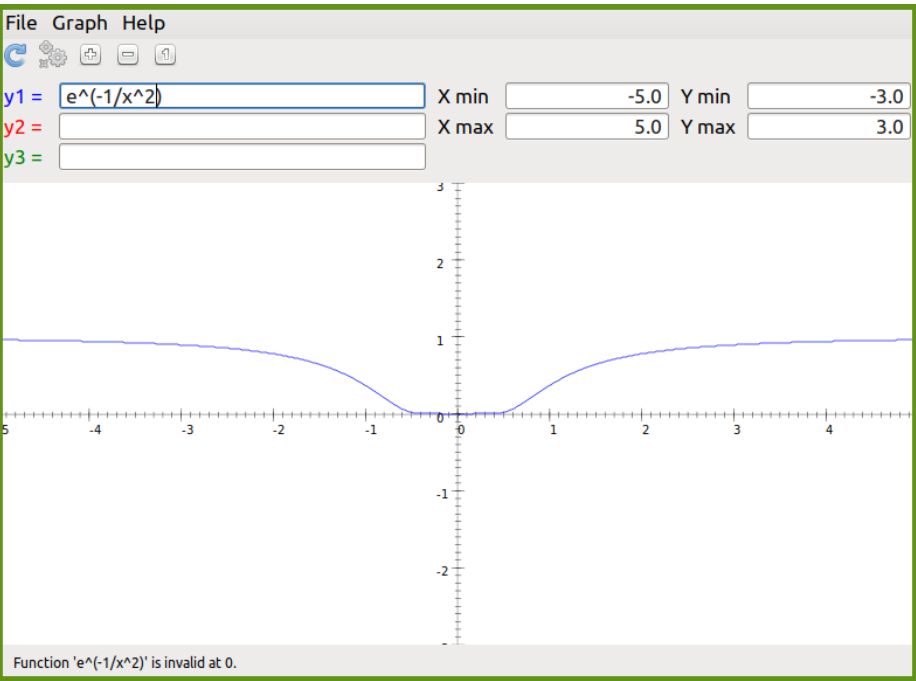
א' בא"ר תשפ"א

הצורה נניח  $f(x)$  נימך פונקציה כאלו פסקנו בקצת  $(-R, R)$  מיליון.  
אם  $f(x)$  זכירה  $\infty$  פונקציה סגורה  $x=0$ .

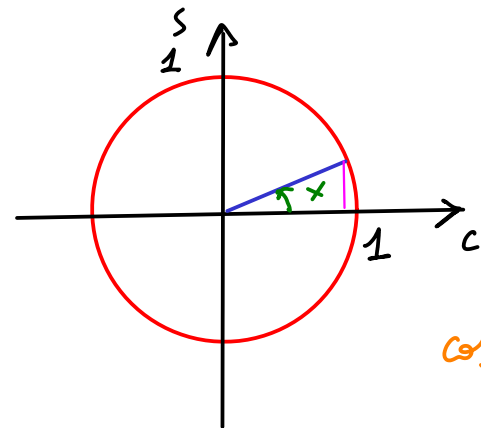
הכאן  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$  נגזרים  $-R < x < R$  אולי לא באנו שבונו מנגנון  $f(x) - \delta$

$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$  זכירה  $\infty$  פונקציה סגורה  $x=0$ ,  $f^{(n)}(0) = 0 \forall n$  1

אינו יכול Taylor  $f(x)$  הונו לא  $0 \neq f$ .



$$\underline{f(x) = \cos(x) \quad \text{הכלור ש}}$$



הכזיבה א/תרה ל  $\cos(x)$

$$\begin{cases} f'' = -f \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

$$C_n = ?$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{2 זרז'ס :} \quad (1)$$

$$(2) \quad \text{הסימול ש } \text{גנ'ל'ס :}$$

$$f''(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} C_n n x^{n-1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n-1) n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} C_n (n-1) n x^{n-2} = \left\{ \begin{array}{l} k := n-2 \\ n = k+2 \\ k = 0, 1, \dots \end{array} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+2} (k+1)(k+2) x^k$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} C_{h+2} (h+1)(h+2) x^h$$

$$f'' = -f$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} C_{h+2} (h+1)(h+2) x^h = \sum_{h=0}^{\infty} -C_h x^h$$



$$C_{h+2} (h+1)(h+2) = -C_h$$

$$h = 0, 1, 2, \dots$$

קיבלנו נוסחה שמסדר גורם  $C_n$  מסדר  $n+2$

$$C_{n+2} = - \frac{C_n}{(n+1)(n+2)}$$



$$C_3 = - \frac{C_1}{2 \cdot 3}$$

$n=1$

$$C_2 = - \frac{C_0}{1 \cdot 2}$$

$n=0$

$$C_5 = - \frac{C_3}{4 \cdot 5} = \frac{C_1}{5!}$$

$n=3$

$$C_4 = - \frac{C_2}{3 \cdot 4} = \frac{C_0}{4!}$$

$n=2$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \\ \forall k \end{cases}$$

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

$\Leftrightarrow$

$$C_0 = 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$$

$$C_{2k+1} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$C_1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$$

תסביר לי איך זה

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}$$

$R = ?$

$\cos(x)$  הוא פונקציה זוגית  
 $\cos(-x) = \cos x$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = ??$$

!!! סתם

$$C_0 = 1 \quad C_1 = 0 \quad C_2 = \frac{x^2}{2} \quad C_3 = 0$$

$$\frac{C_n}{C_{n+1}}$$

$$\frac{C_0}{C_1} = \frac{1}{0} = ?$$

מה פירוט !!

כך נקראת טור 0-1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+2}} \right| = ?$$

הנחה:  $C_n \neq 0$  לכל  $n$ .

$$\left| \frac{C_n}{C_{n+2}} \right| = \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| \cdot \left| \frac{C_{n+1}}{C_{n+2}} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} R \cdot R = R^2$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+2}} \right| = R^2$$

$$\frac{C_{2m}}{C_{2(m+1)}} \rightarrow R^2$$

כך נקראת טור 2-1.

$$R^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{2m}}{C_{2(m+1)}} \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(2m+2)!}{(2m)!} = \lim_{m \rightarrow \infty} [(2m+1)(2m+2)] = \infty$$

$$\frac{(2m+2)!}{(2m)!} = (2m+1)(2m+2)$$

$$\begin{aligned} n &= 2m \\ 2(m+1) &= 2m+2 = n+2 \end{aligned}$$

# I. Newton $\int$ $\text{סדרה}$ $\text{סדרה}$

$$a \neq 0$$

$$ab = ba$$

$$(a+b)^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} a^n b^{k-n}$$

$\text{סדרה}$   $\text{סדרה}$

$$(a+b)^k = a^k \left(1 + \frac{b}{a}\right)^k$$

$$x := \frac{b}{a}$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n$$

$k$   $\text{גורם}$   $\text{סדרה}$   $\int$   $\text{סדרה}$   $\text{סדרה}$   $\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!} = \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}$

$$(a+b)(a+b)\dots(a+b)$$

$\text{סדרה}$   $k$

$a^n$

$\text{סדרה}$   $k$   $\text{סדרה}$   $\int$

$$(1+x)^\lambda = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!} x^n$$

$\lambda \in \mathbb{R}$   $\int$   $\text{סדרה}$   $\text{סדרה}$

$(-1, 1)$

$\text{סדרה}$   $\text{סדרה}$   $\int$

$$f'(x) = \lambda (1+x)^{\lambda-1}$$

$$(1+x) f' = \lambda (1+x)^{\lambda} = \lambda f$$

$$\begin{cases} (1+x) f' = \lambda f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = (1+x)^{\lambda}$$

$$f(0) = 1$$

(a) להוכיח

$$\Leftrightarrow f(x) = (1+x)^{\lambda}$$

$$C_n = ?$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$f' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_{n+1} x^n$$

$$\lambda f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda C_n x^n$$

$$(1+x)f' = f' + xf' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_{n+1} X^n + X \sum_{n=1}^{\infty} n C_n X^{n-1} = \quad (1+x) f' = \lambda f$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_{n+1} X^n + \sum_{n=0}^{\infty} n C_n X^n = \lambda f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda C_n X^n$$



$$(n+1) C_{n+1} + n C_n = \lambda C_n$$

$$\forall n = 0, 1, \dots$$

$$(n+1) C_{n+1} = (\lambda - n) C_n$$

$$C_{n+1} = \frac{\lambda - n}{n+1} C_n$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow C_0 = 1$$

$$n=0$$

$$C_1 = \lambda$$

$$n=1$$

$$C_2 = \frac{\lambda - 1}{2} C_1 = \frac{\lambda(\lambda - 1)}{2}$$

$$n=2 \quad C_3 = \frac{\lambda-2}{3} C_2 = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}$$

$$C_n = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)}{n!} \int_0^3$$

$$C_3 = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}$$

$$C_n = \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!}$$

$$C_{n+1} = \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n)}{(n+1)!}$$

הנני מניח כי  $\lambda$  הוא מספר טבעי 6

הנני מניח כי  $\lambda$  הוא מספר טבעי 1

הנני מניח כי  $\lambda$  הוא מספר טבעי 2

$\int_0^3$

הנני מניח כי  $\lambda$  הוא מספר טבעי 3

$$C_{n+1} = \frac{\lambda - n}{n+1} = \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)(\lambda-n)}{(n+1)n!} = \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n)}{(n+1)!}$$

مقدار  $\beta_n$  را در  $n=0$  قرار دهیم  $\textcircled{c}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)} \cdot \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)(\lambda-n)}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda-n}{n+1} \rightarrow 1$$

$$R=1$$

پس

س.ع.ن

$$x=0 \quad \text{z.B.} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

2

$$f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lambda = -1$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}$$

$$x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{1}{(-\frac{1}{2})}\overset{2}{(-\frac{3}{2})}\overset{3}{(-\frac{5}{2})}\dots\overset{n}{(-\frac{2n+1}{2})}}{n!}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \overbrace{(1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1))}^{(2n+1)!!}}{2^n n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!!}{2^n \cdot n!}$$

$$5!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$$

$$6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$$



## Euler's Identity

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$x = i\varphi$$

$$\varphi \in \mathbb{R}$$

$$i^2 = -1$$

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \varphi^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m}}{(2m)!} \varphi^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m+1}}{(2m+1)!} \varphi^{2m+1} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \varphi^{2m} + i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \varphi^{2m+1} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$\cos(\varphi)$

$\sin(\varphi)$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$i^{2m} = (i^2)^m = (-1)^m$$

$$i^{2m+1} = i \cdot i^{2m} = i (-1)^m$$

(L. Euler)

Corollary

ביטול  $\int$   $\arctan(x)$   $\int$   $\frac{1}{1+x^2}$   $\int$   $\frac{dx}{1+x^2}$

$$\arctan(x) \in \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$-1 < x < 1$$

$$C_n = \begin{cases} (-1)^m, & n = 2m \\ 0, & n = 2m+1 \end{cases}$$

$$\arctan(0) = 0 \Rightarrow C_0 = 0$$

$$\Rightarrow \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

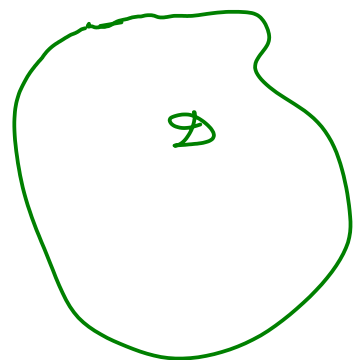
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{n-1}}{n} x^n$$

$$\int x^{2n} dx = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$$

$$\arctan(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

# תחום הקורס

נימק למה  $n=2$



$$D \subset \mathbb{R}^n \text{ תחום (ס'נ'ס)}$$

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ נמצא } f(x) \in \mathbb{R}^m$$

הערה:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ נקרא "פונקציה"}$$

מ  $n$  ו  $m$  יכולים להיות שונים

$$f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$$

המשתנים  $x_1, \dots, x_n$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

סך

④ קבוצה  $X$  "תחום"  
 ⑤ קבוצה  $Y$  "טווח"  
 ②  $x \in X$  נקרא "בנקודה"  $y \in Y$

בכלל לא: הערה זה

1 3 מקרים נוספים:

$$f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{פונקציה אחת על n משתנים})$$

$$m=1 \quad \text{פונקציה}$$

$$f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{קטע פתוח ב-}\mathbb{R} \quad \text{ערסם בצורה פרמטרית}$$

$$n=1$$

התאמת משתנים באמצעות  
עזר וקטורי

$$f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$m=n$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2y^3 \\ \sin(2x + 2y) \end{pmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$n=2$$

$$m=2$$

2

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$$

תחום ההגדרה:

$$f_1(x,y) = x^2 + 2y^3$$

$$f_2(x,y) = \sin(2x + 2y)$$

אם  $f$  היא נגזרת ראשונה של פונקציה וקטורית על גבי  $\mathbb{R}^2$ :

עצם בתחום  $\emptyset \subset \mathbb{R}^n$  - נקודה  $x \in \emptyset$  ניתן משהו.

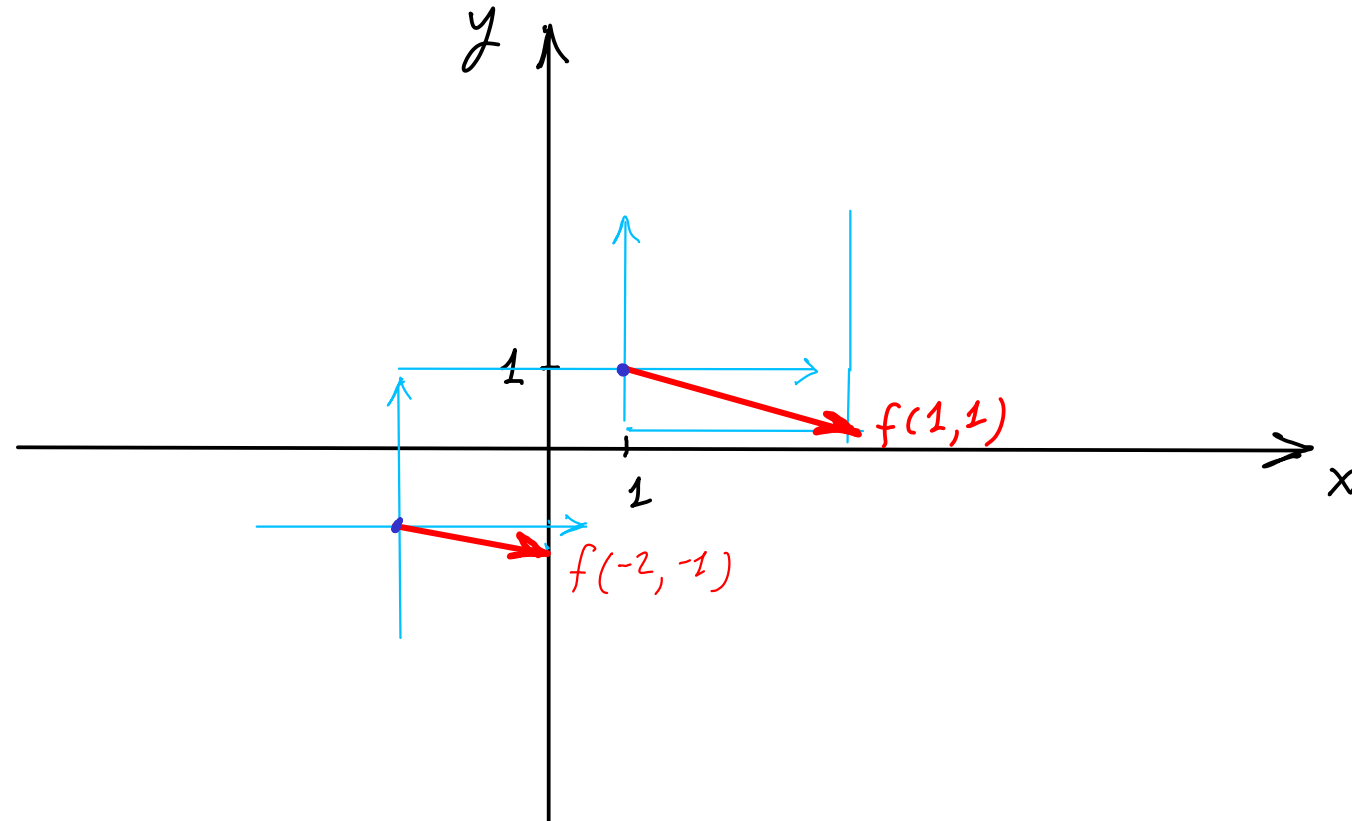
$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2y^3 \\ \sin(2x + 2y) \end{pmatrix}$$

למשל: ערך כוח משיכה.

למשל: ערך אמפלטודות

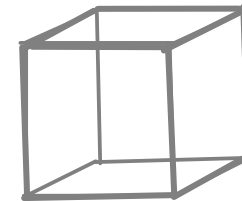
מלבד ה/ו אקטור  $\leftarrow$  ערך וקטורי

מלבד ה/ו סקלר  $\leftarrow$  ערך סקלרי (במקרים)

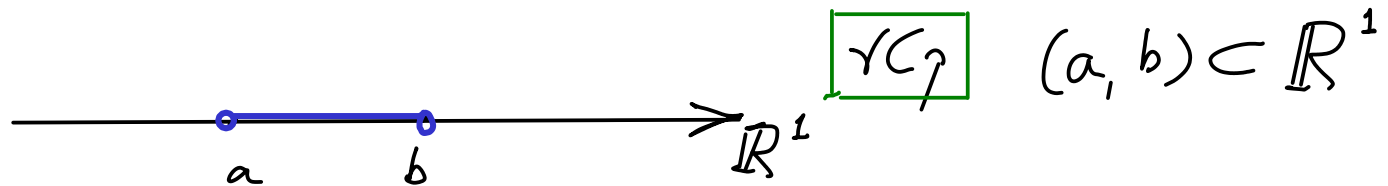


$$(x, y) = (1, 1) \quad f(1, 1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -0.76... \end{pmatrix}$$

$$f(-2, -1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sin(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -0.28... \end{pmatrix}$$



"אנליזה וקטורית"



$t$  - הזמן

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{matrix} h=1 \\ m=2 \end{matrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$x: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

פירוש זימאסר - הדרך בה אנחנו עובדים ב-  $\mathbb{R}^2$

נניח שהפונקציות  $x(t), y(t)$  זכורות בקצב  $(a, b)$ .

3] הציבה פרמטריות ממשל היחידה:

$$x(t) = \cos t$$

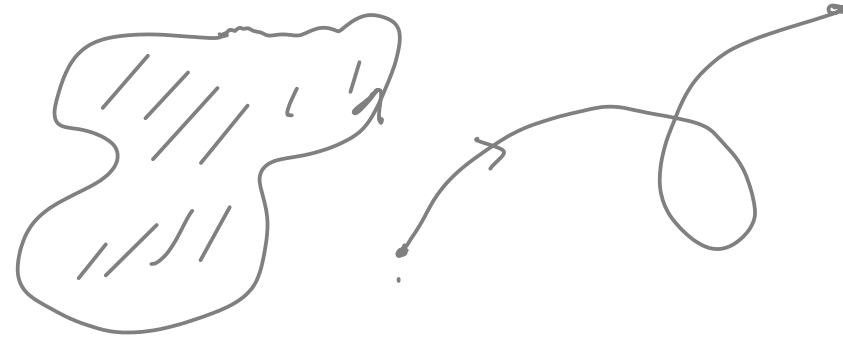
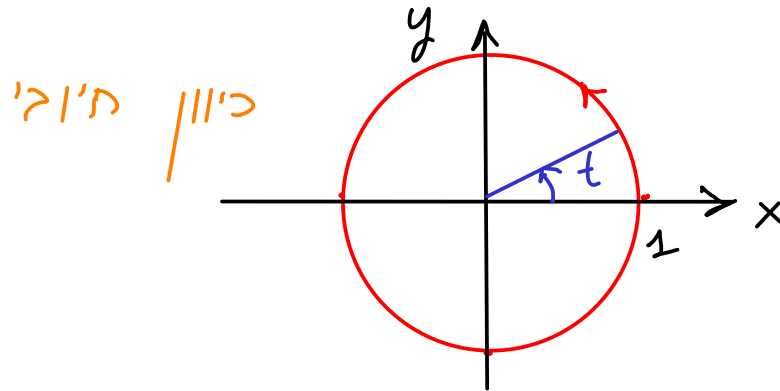
$$y(t) = \sin t$$

ההצגה העקויה א  $\cos$ ,  $\sin$ : פרמטריזציה של מעגל היחידה

$\text{Im } f =$  תחום

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$



$$\int_a^b = - \int_b^a$$

נניח  $\gamma(t)$  עקום בצורה פרמטרית.  
 $t = t_0$  ערך מסביב  $t$  ("זרע  $t_0$ ")

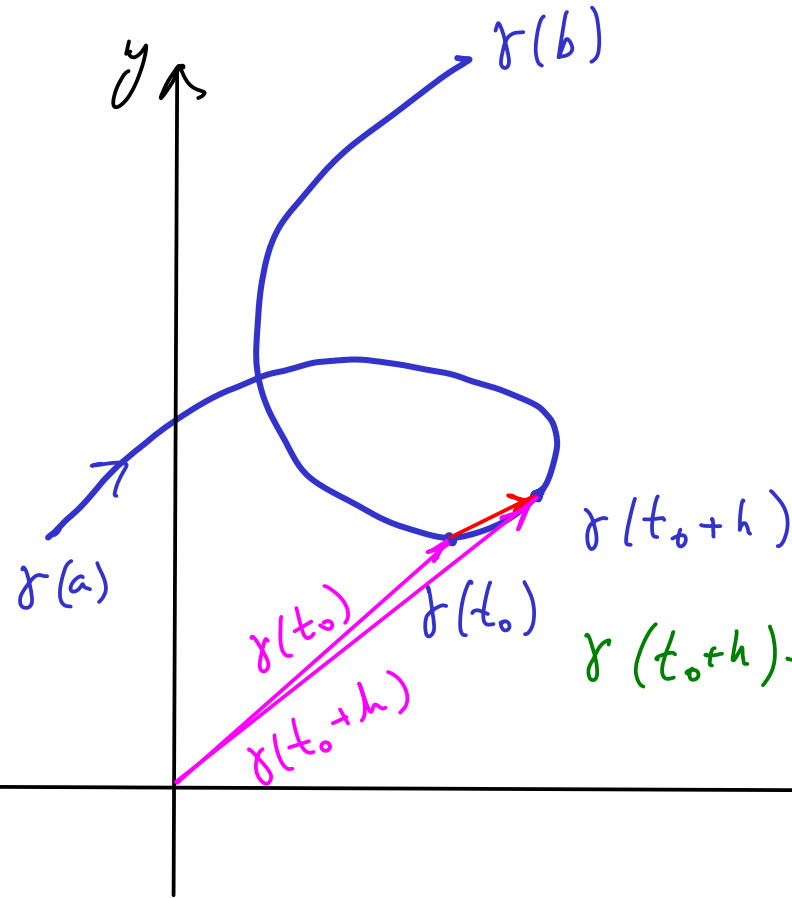
מהירות בזמן  $t_0$   $\frac{d}{dt} \gamma \big|_{t=t_0} = \dot{\gamma}(t_0)$

הסבר:  $t$  "זמן"

$\gamma(t)$  הנקודה עוברת את העקום  $Im(\gamma)$  לפי "כיוון" מסוים.

הבה נראה  
ש ההערכה  
 $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$

המהירות = שינוי במיקום  
הפרש הזמן

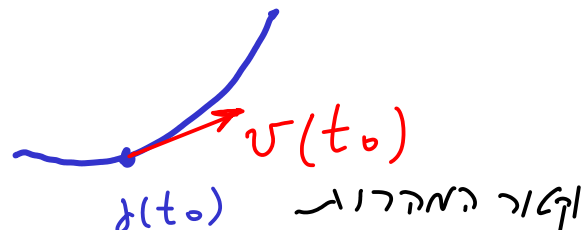


$$\frac{\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{h}$$

$$\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0) = \begin{pmatrix} \gamma(t_0) \\ \gamma(t_0+h) \end{pmatrix} \text{ "הוקטור"}$$

המהירות בזמן  $t_0$ :

$$v(t_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} [\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)] \right)$$



הכיוון של  $v =$  הכיוון של המסלול  
וקטור המהירות

$$v(t_0) = \dot{\gamma}(t_0)$$

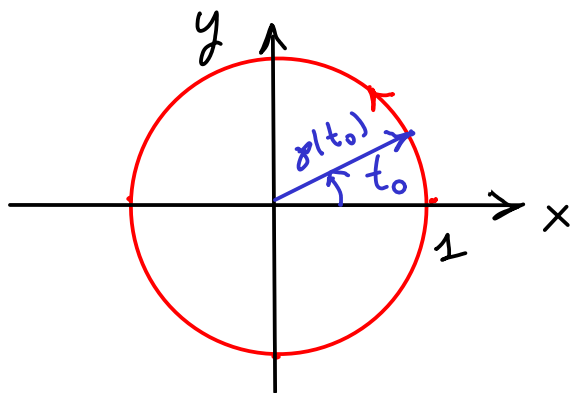
המסקנה:



$$\dot{\gamma}(t_0) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t_0) \\ \ddot{y}(t_0) \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$



אלו הן הנורמות  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

הנורמה  $\gamma(t)$  4

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\langle \gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0) \rangle = \cos t_0 \cdot (-\sin t_0) + \sin t_0 \cdot \cos t_0 = 0$$

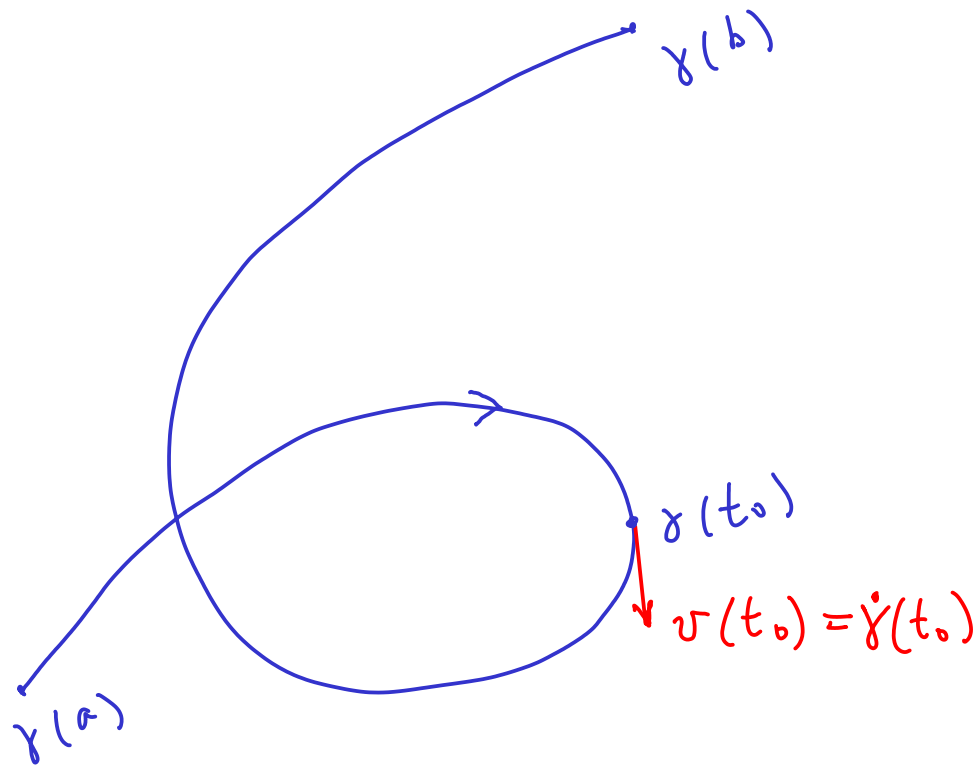
הנורמה  $\gamma(t_0)$   $\perp$   $\dot{\gamma}(t_0)$

הנורמה  $\dot{\gamma}(t_0)$   $\perp$   $\gamma(t_0)$

הנורמה  $\gamma(t_0)$   $\perp$   $\dot{\gamma}(t_0)$

ה"ס  $t$  משתנה

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$



$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

ה"ס  $t$  משתנה  
תצורה  
("כמה")

ה"ס  $t$  משתנה  $\gamma(t) \Leftarrow$   $x(t), y(t)$   
על קו זה

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$$

# פונקציות בעלות שני משתנים

$g(x)$

$$\frac{dg}{dx}(a) = g'(a) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{g(a+dx) - g(a)}{dx}$$

כאשר  $g$  היא פונקציה של  $x$  בלבד  
 $x=a$  - נקודה

אזור  $D \subset \mathbb{R}^2$

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

" $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ "

$$f(x, y)$$

נניח "משטח"  $z = f(x, y)$

נקודה  $y=b$ , כלומר  $f(x, b)$  פונקציה של  $x$  בלבד. ①

$$f_x(a, b) = f'_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) := \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(a+dx, b) - f(a, b)}{dx}$$

:  $y$  הן  $x$  הן  $y$   $f(a, y)$   $x=a$   $y=b$  2

$$f_y(a, b) = f'_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{f(a, b + dy) - f(a, b)}{dy}$$

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$(x, y) = (0, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(xy)'_x \cdot (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)'_x \cdot xy}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{y(x^2 + y^2) - 2x \cdot xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2y + y^3 - 2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = x^2 + 3xy^3 + x^2y^8$$

$$f'_x(x, y) = 2x + 3y^3 + 2xy^8$$

$$f'_y(x, y) = 9xy^2 + 8x^2y^7$$

# פונקציות סקלריות

דוגמה  $n=2$



כאן יש "נקודות פנימיות"  
 $a$  נק' השפה  
 $b$  נק' פנימית

כאן אין "נקודות פנימיות"  
 דא "נקודות פנימיות"

"תחום"  $\emptyset \subset \mathbb{R}^n$   
 פונקציה  $f: \emptyset \rightarrow \mathbb{R}$



"המרחב"  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$   
 $r > 0$

כדור (פתיח)  $B(a; r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$

$$\|x - a\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2}$$

$$\partial B := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = r\} \quad \text{העבר של } B$$

$$B = B(a; r)$$



$$\bar{B} := B \cup \partial B$$

עבור קבוצה  $X \subset \mathbb{R}^n$

(1)  $x \in X$  נקודה פנימית אם קיים  $r > 0$  :  $X \supset B(x; r)$

(2)  $y \in X$  נקודה גבול (edge) אם עבור כל  $r > 0$  קיימת  $B(y; r)$  כזו שיש בה נקודות שייכות ל- $X$  ונקודות שאינן שייכות ל- $X$

$$\overset{\circ}{X} = \{x \in X : x \text{ פנימי}\} \quad (1)$$

$$\partial X = \{x \in X : x \text{ גבול}\} \quad (2)$$

$$\bar{X} := X \cup \partial X \quad \text{הסגור של } X \quad (3)$$

$\bar{X}$



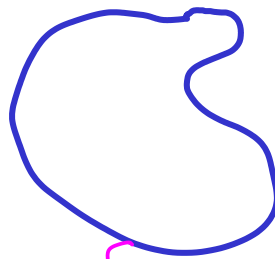
הסגור של X

$\overset{\circ}{X}$



הפנים של X

$\partial X$

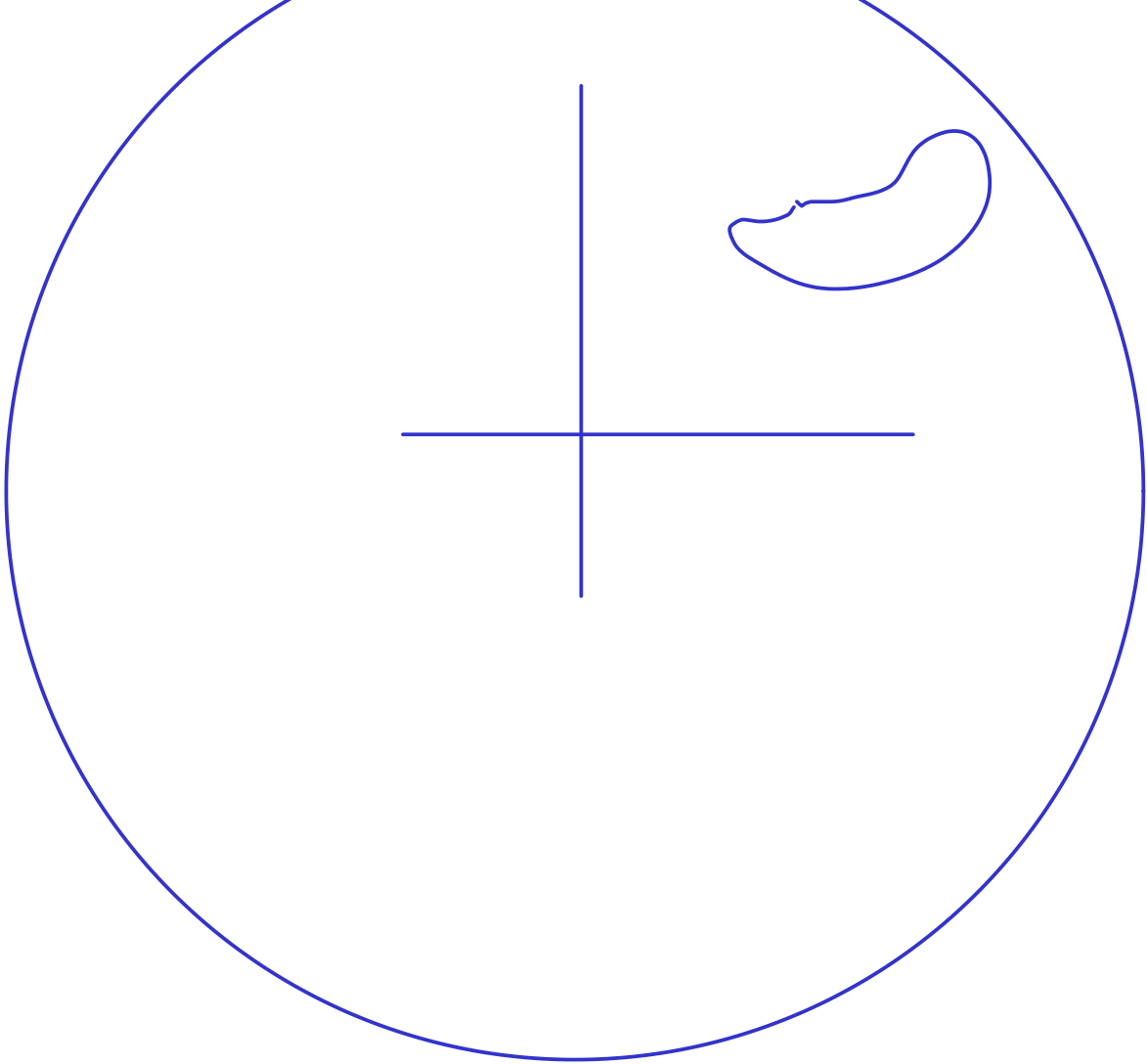


הגבול של X

X



הקבוצה X



$$(B(0;R) \supset X)$$

$$X = \overset{\circ}{X} \quad \text{if } X \text{ is open}$$

$$X = \overline{X} \quad \text{if } X \text{ is closed}$$

$$: R > 0 \text{ if } X \text{ is compact}$$



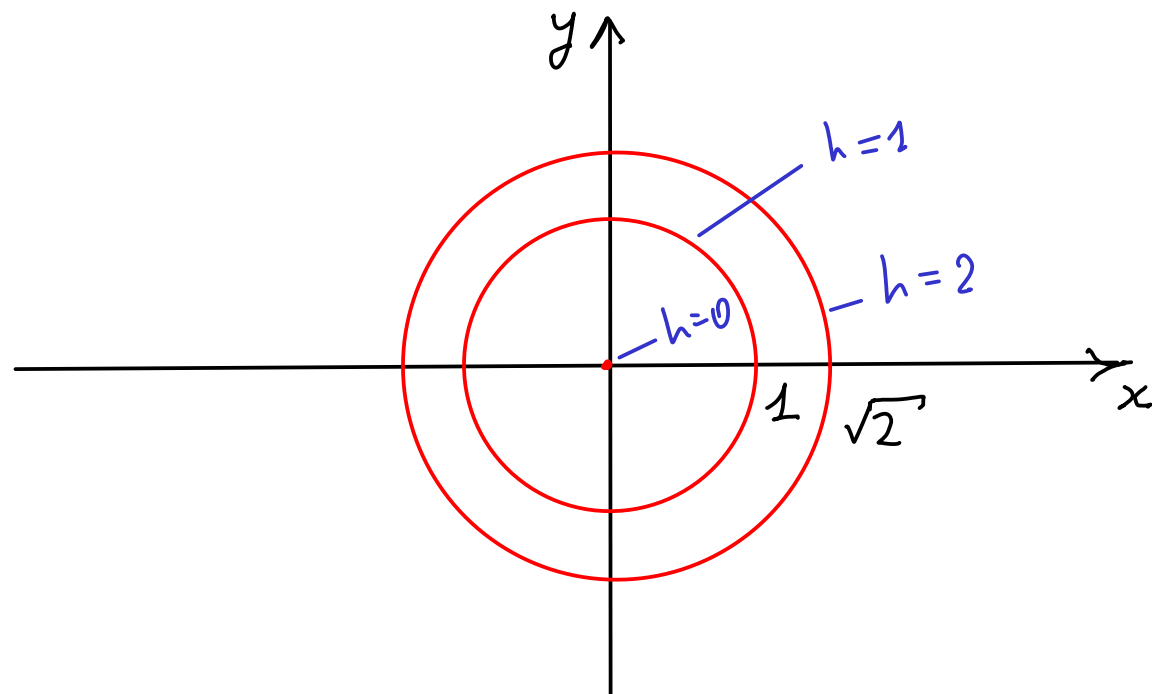
# קווי הרום (קווי זובה)

הזרף  $\mathbb{R}^3$  במרחב  $\mathbb{R}^3$   $z = f(x, y)$   $(\mathbb{R}^3 \text{ תת-} \mathbb{R}^3)$

$$(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$$

קו הזובה  $h$

$$C_h := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = h\}$$



$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \boxed{1}$$

$$C_1: x^2 + y^2 = 1$$

$$C_0: x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

$$C_{-1}: x^2 + y^2 = -1 \Rightarrow C_{-1} = \emptyset$$

$$C_h \neq \emptyset \Leftrightarrow h \geq 0$$

עגור  $h > 0$ ,  $C_h =$  המרחק מרציוס  $\sqrt{h}$

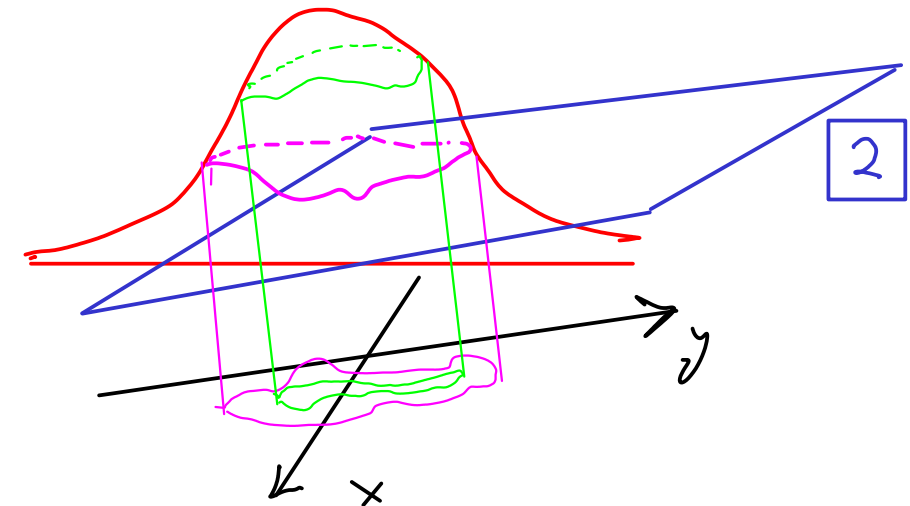
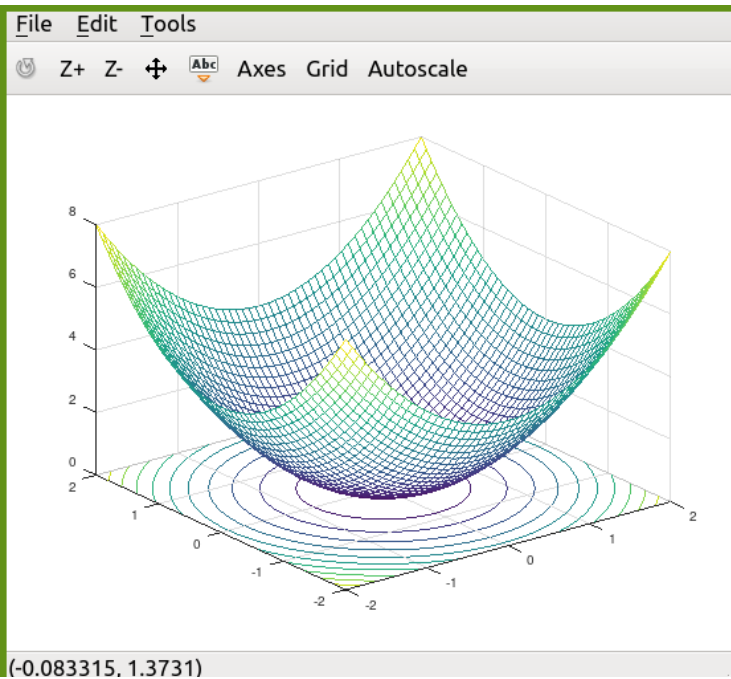
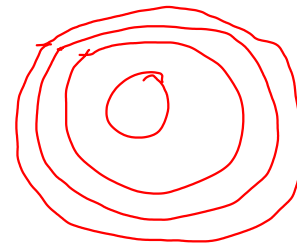
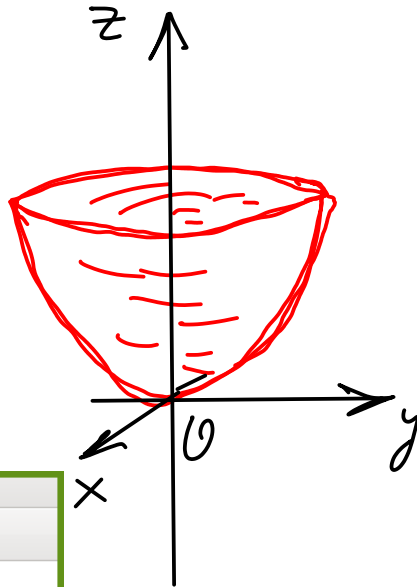
עם המרכז ב-0.

$$C_2: x^2 + y^2 = 2$$

תיאור ע"י משור שמקבלת  $(x, y)$  - מעצב (משור המשור  $(x, y)$ )

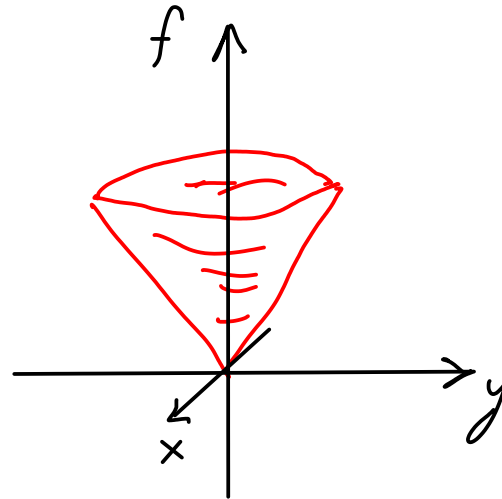
התיאור ע"י משור שמוגדר  $z$  - הליכי  $z$ : המשור  $(y, z)$ :

$$z = y^2$$



$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$$

$$h \geq 0$$

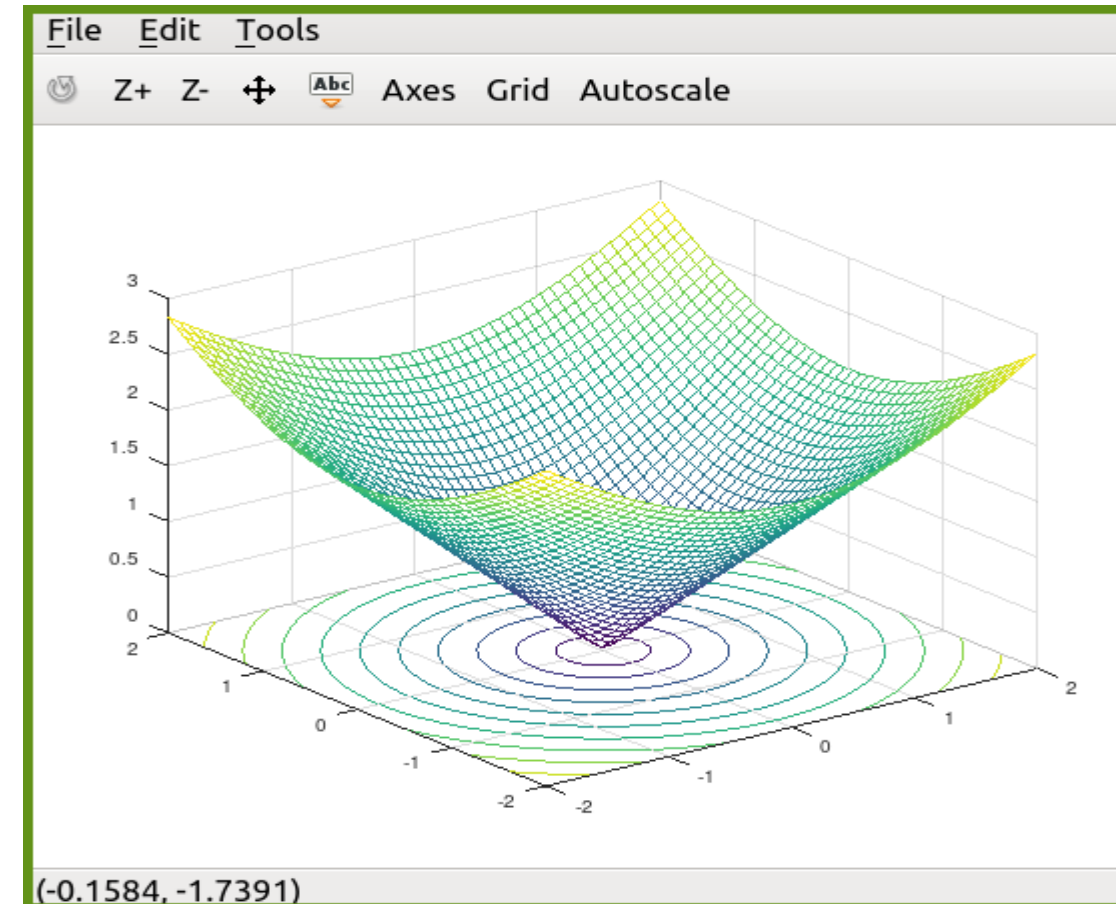


$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

3

$$C_h = \{ x^2 + y^2 = h^2 \}$$

$$z = \sqrt{x^2 + 0} = |x| \quad \text{for } y=0$$



$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2} = \|x - a\| \quad \text{"} x \text{" } \in \mathbb{R}^n \quad \text{גודל נורמה}$$

$$\left( |f(x) - A| < \varepsilon \iff x \in B(a; \delta) \right) \quad \delta > 0 \text{ for } \varepsilon > 0 \quad \text{ok} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

$$\varepsilon > 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 < \delta^2$$

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = xy \left( \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\frac{2xy}{x^2 + y^2} \leq 1 \Leftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{2xy}{x^2 + y^2} \geq -1 \Leftrightarrow -\frac{2xy}{x^2 + y^2} \leq 1 \quad (*) \quad \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq -2xy \Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 0$$

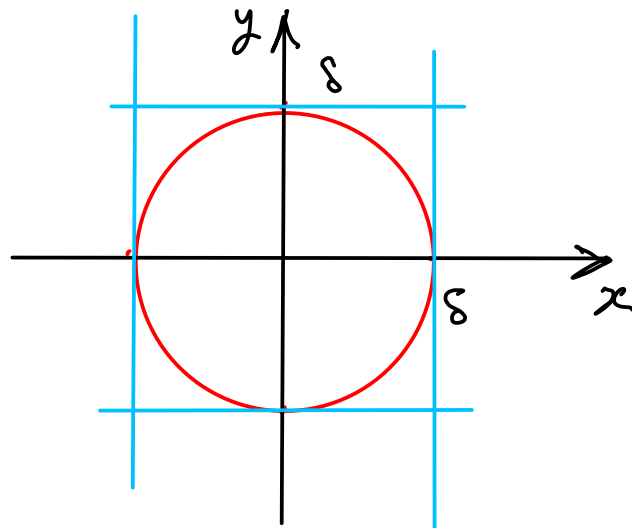
$$\left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$$

! 1/2 > 0

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{xy}{x^2+y^2}$$



$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = |xy| \cdot \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \stackrel{!}{\leq} \frac{1}{2} |xy|$$

! delta > 0

$$|xy| < 2\varepsilon \quad ! \text{ 1/2 > 0}$$

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} < \varepsilon \quad ! \text{ 1/2 > 0}$$

$$\frac{1}{2} |xy| < \frac{1}{2} \delta^2$$

$$|xy| < \delta^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < \delta^2$$

$$|f(x,y)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \delta^2 \leq \varepsilon \quad ! \delta > 0$$

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} < \frac{1}{2} \delta^2 \Leftrightarrow (x,y) \in B(0,\delta) \quad ! \delta > 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

$$! \delta \quad |f(x,y)| < \varepsilon \Leftrightarrow (x,y) \in B(0; \sqrt{2\varepsilon}) \quad ! \delta > 0$$

נ"ך ו'  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

נגד אר זגול ל' כח "מסוליס עוליס"

$$f(0,y) = 0 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

$$\therefore (x=0)$$

(1) הזגול ל' י'ז' y

$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{2} \neq 0$$

(2) הזגול ל' י'ש y=x

מסוליס: הזגול ו'ע ו'ע

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = ?$$

$$f(x,y) = \frac{x^2 \sin^2 y}{x^2 + 2y^2}$$

$$\sin y \sim y, \text{ since } y \text{ is small} \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

(1) הוכחה:

$$\frac{x^2 y^4}{x^2 + 2y^2}$$

$$: \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2} \quad \text{||הערה - 1/2 זה המקסימום||}$$

$$\sqrt{2} \left| \frac{xy}{x^2 + 2y^2} \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{x\sqrt{2}y}{x^2 + 2y^2} \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{uv}{u^2 + v^2} \right| \leq \frac{1}{2} \quad \text{'s/c}$$

$$\begin{aligned} u &:= x \\ v &:= \sqrt{2}y \end{aligned} \quad \text{||נניח||}$$

$$\left| \frac{xy}{x^2 + 2y^2} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$\Leftrightarrow$



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = ?$$

$$f(x,y) = \frac{x^2 \sin^2 y}{x^2 + 2y^2}$$

$$\sin y \sim y, \text{ s'ic } y \text{ יורד } \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

(1) הנחה:

$$\frac{x^2 y^4}{x^2 + 2y^2}$$

$$: \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2} \quad \text{||ו||ע - 1/2 א סוגר}$$

$$\sqrt{2} \left| \frac{xy}{x^2 + 2y^2} \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{x\sqrt{2}y}{x^2 + 2y^2} \right| \leq \frac{1}{2}$$

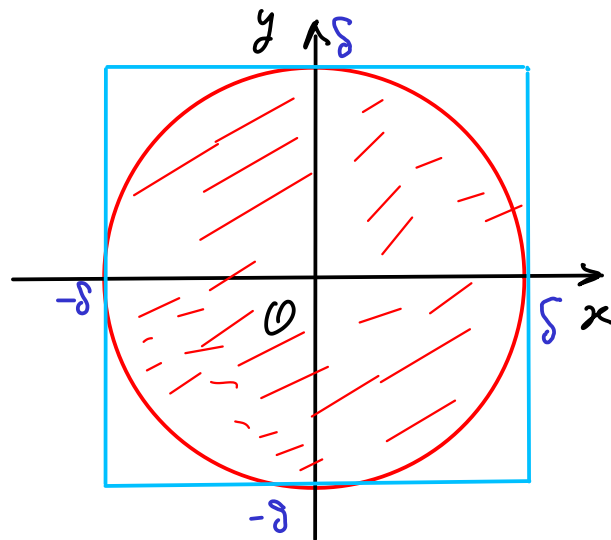
$$\Leftrightarrow \left| \frac{uv}{u^2 + v^2} \right| \leq \frac{1}{2} \quad \text{'s/c}$$

$$\begin{aligned} u &:= x \\ v &:= \sqrt{2}y \end{aligned} \quad \text{||נ||ו}$$

$$\left| \frac{xy}{x^2 + 2y^2} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$\Leftrightarrow$

$$\left| \frac{x^2 \sin^2 y}{x^2 + 2y^2} \right| \leq \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + 2y^2} \right| = \left| \frac{xy}{x^2 + 2y^2} \right| \cdot |xy| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |x| \cdot |y|$$



$$\begin{aligned} |x| < \delta \\ |y| < \delta \end{aligned} \quad \Leftrightarrow (x, y) \in B((0, 0), \delta)$$

$$x^2 + y^2 < \delta^2 \Leftrightarrow (x, y) \in B((0, 0), \delta)$$

$$|x| < \delta \Leftrightarrow x^2 < \delta^2 \Leftrightarrow x^2 \leq x^2 + y^2 < \delta^2$$

$$|y| < \delta \Leftrightarrow y^2 < \delta^2 \Leftrightarrow y^2 \leq x^2 + y^2 < \delta^2$$

$$\delta \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}} \quad \frac{\delta^2}{2\sqrt{2}} < \varepsilon \quad : \text{no}'3 \text{an}$$

$$\left| \frac{x^2 \sin^2 y}{x^2 + 2y^2} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |x| \cdot |y| < \frac{1}{2\sqrt{2}} \delta \cdot \delta = \frac{\delta^2}{2\sqrt{2}}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin^2(y)}{x^2 + 2y^2} = 0$$

/:s

$$\left| \frac{x^2 \sin^2(y)}{x^2 + 2y^2} \right| < \varepsilon \quad \text{s/k} \quad \delta \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \quad \text{no/k} \quad : \text{no}'0$$

למשל נניח שפונקציה  $f(x)$  יש לה גבול במקרה  $a$  :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

כלומר  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  מתקיים  $a \in \mathbb{R}$  ו- $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x)$$

כל  $x = a$  נניח  $f(x)$

אם  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  אז

למשל כל פונקציה רציפה  $f$  :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$



ז"ס

$a \in \mathcal{D}_f$  ה"ל מקוצר נקס'מ'ס (נקומ')  $\rho_k$

ק"ס  $z > 0$  כ  $\epsilon$   $f(x) < f(a) - \epsilon$

וא  $B(a, z) \ni x$

Coen (K. Weierstraß)

$f(x)$  חזב, גמ'ס חס'ס וסז'ר  $F$ ,

כ  $f(x) - \delta$  ו מקוצר מ'נ'מ'ס וק'מקס'מ'ס  $F - \delta$ .



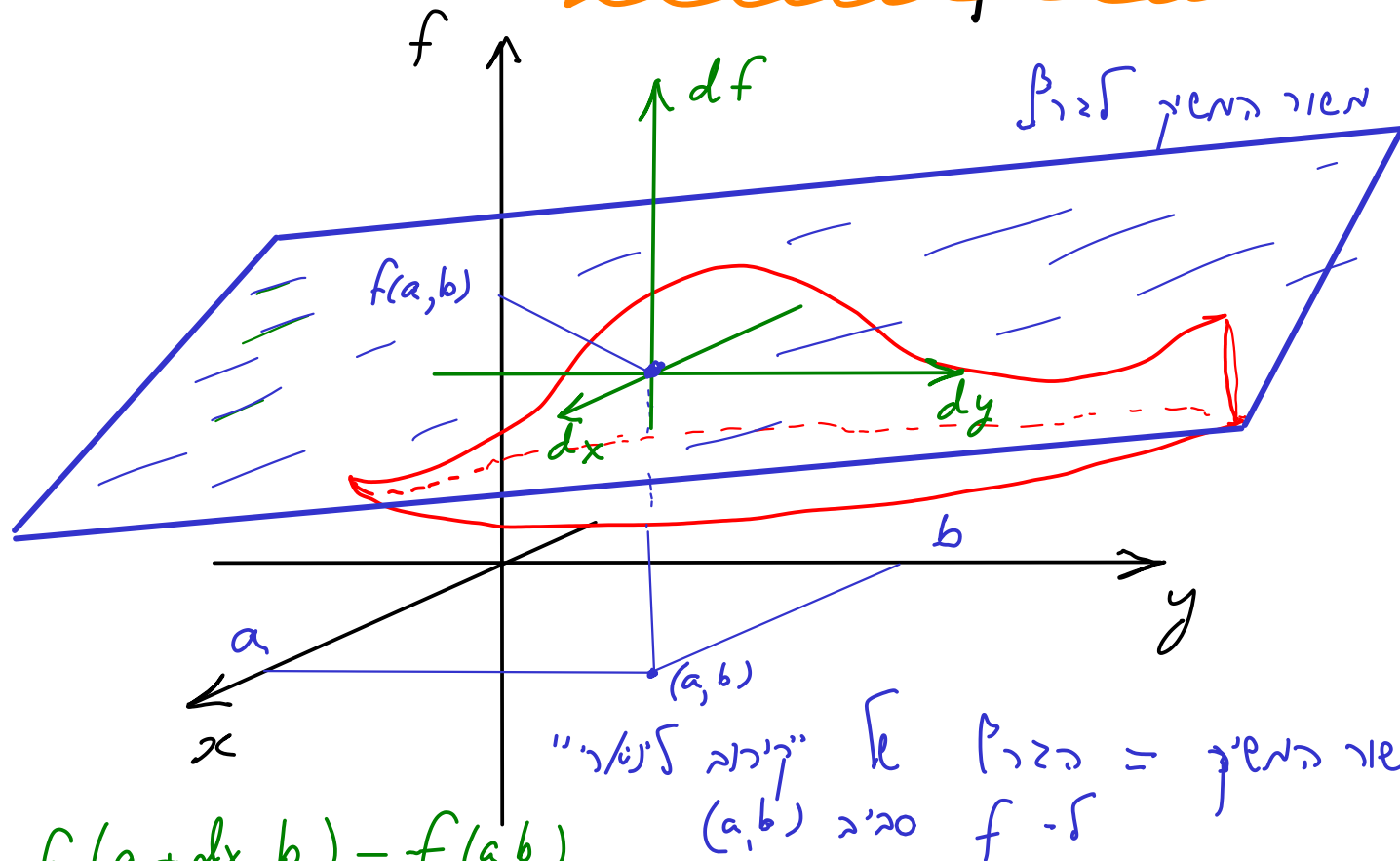
$\varphi(x)$  נקודה על המישור

משוואת המישור

$f(x, y)$

$$dx := x - a$$

$$dy := y - b$$



$$df(dx, dy) = A dx + B dy$$

$$df: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f'_x(a, b) \quad f'_y(a, b)$$

$$A =: \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

$$B =: \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(a+dx, b) - f(a, b)}{dx}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{f(a, b+dy) - f(a, b)}{dy}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) dy$$

הצגה  
כפונקציה

"הצגה"  
"הפונקציה"

המשוואה = המישור  
לנקודה  $(a, b)$  נקראת "נקודה"

$$\exists \lim_{(dx, dy) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+dx, b+dy) - f(a,b)}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}$$

$$dx := x - a$$

$$dy := y - b$$

$$: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow f(x,y)$$

הזכור כי  $x = a \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow f(x)$

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(a+dx) - f(a)}{\|dx\|}$$

$$f(x) \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$a \in \mathbb{R}^n$$

$$dx := x - a = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(a + e_i dt) - f(a)}{dt}$$

הזכור כי  $f$  היא פונקציה מ- $\mathbb{R}^n$  ל- $\mathbb{R}$ ,  $x = a \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow f(x)$

הזכור כי  $(e_1, \dots, e_n)$  היא בסיס של  $\mathbb{R}^n$ .



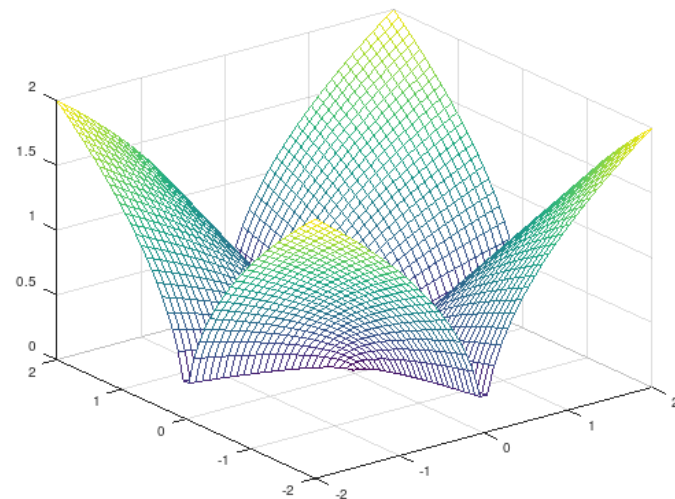
:  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\|(x,y)\|}$

$$\lim_{(dx,dy) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0+dx, 0+dy) - f(0,0)}{\|(dx,dy)\|} = \lim_{(dx,dy) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|dx \cdot dy|} - 0}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \lim_{(dx,dy) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|dx \cdot dy|}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \sqrt{\lim_{(dx,dy) \rightarrow (0,0)} \frac{|dx \cdot dy|}{dx^2 + dy^2}}$$

$$\lim_{\substack{(dx,dy) \rightarrow (0,0) \\ dy=dx}} \frac{|dx \cdot dy|}{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{2} \quad \Leftarrow dy = dx$$

$$\lim_{\substack{(dx,dy) \rightarrow (0,0) \\ dy=0}} \frac{|dx \cdot dy|}{dx^2 + dy^2} = 0 \quad \Leftarrow dy = 0$$

File Edit Tools  
Z+ Z- Axes Grid Autoscale



(-0.73838, 1.5171)

:  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|dx \cdot dy|}{dx^2 + dy^2}$   $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|dx \cdot dy|}{dx^2 + dy^2}$

,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f'_y(0,0)$ ,  $f'_x(0,0)$  is not on  
 $(0,0) \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

octave code:

```
x=linspace(-2,2,50);
y=linspace(-2,2,50);
[xx,yy]=meshgrid(x,y);
mesh(xx,yy,sqrt(abs(xx.*yy)))
```



Coen נ"ח  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$  צריך להיות 0,  $x=a$

אם  $f(x)$  נגזרת ב  $x=a$

Coen נ"ח  $f(x)$  נגזרת ב  $x=a$ , ונ"ח  $x=a$  ה'א' / קצת קצת | (מקור)  $f(x)$  נגזרת ב  $x=a$   $d_a f = 0$  'א'

הזרה ב"מקרה כזה,  $d_a f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i = 0$  כלומר  $dx_1, \dots, dx_n$  קצת

אם  $f(x)$  נגזרת ב נק' קצת |  $x=a$  'א'  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$  נגזרת ב  $i=1, \dots, n$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f'(x, b) = \left( \sqrt{|bx|} \right)' = \left( \sqrt{\sqrt{b^2 x^2}} \right)' = \left( (b^2 x^2)^{\frac{1}{4}} \right)' = \frac{1}{4} (b^2 x^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot b^2 2x =$$

$$= \frac{b^2}{2} \frac{x}{(\sqrt[4]{b^2 x^2})^3}$$

אם  $x=0$  נגזרת ב

$\frac{\partial f}{\partial x}$  נגזרת ב  $(0, 0)$

The gradient

הזרז'ס'ס

$$a \in \mathcal{D}_f$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$a \in \mathbb{R}^n \quad f(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$a \in \mathcal{D}_f \quad f(x) \text{ is } \underline{\text{הזרז'ס'ס}} \text{ at } a \quad \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \text{ "הזרז'ס'ס"}$$

$$\text{grad}_a f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

$i/k$

"הזרז'ס'ס"

$$\nabla_a f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

$$\vec{\nabla}_f \ni (a, b) \text{ ו-} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$$

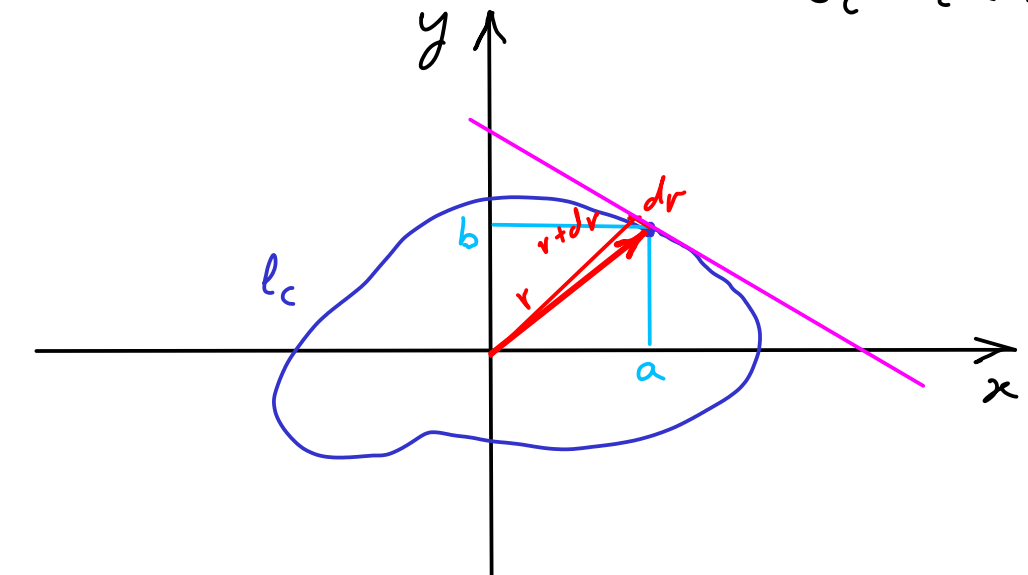
$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) \quad \underline{n=2}$$

C קבוע

$$\mathcal{L}_c := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = C \}$$

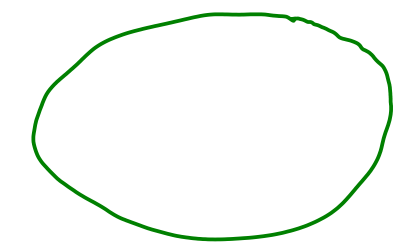
ו-  $\mathcal{L}_c : C$  נקודה

$$f(x, y) = C$$



$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 \quad C=1$$

$$\mathcal{L}_c : 2x^2 + y^2 = 1$$



$$f(x, y) = C$$

$$df = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) dy = 0$$

$$d_{(a,b)} f$$

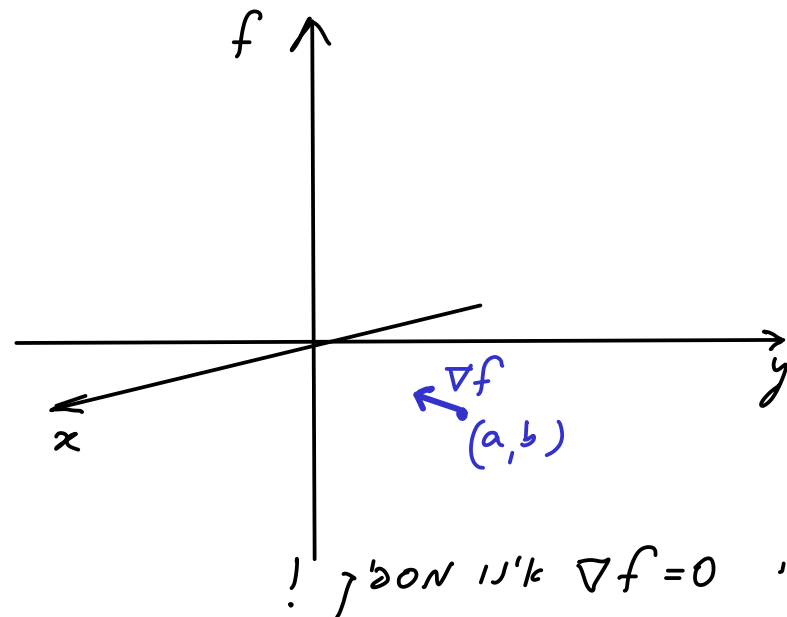
כל נקודה  $(x, y)$  נקודה

$$\int_C \gamma' \cdot dr = \int_C (dx, dy)$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (dx, dy) = 0 \quad \text{המש'}$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \perp d\vec{r} \quad \text{המש'}$$

$$\text{grad}_{(a,b)} f \perp d\vec{r}$$

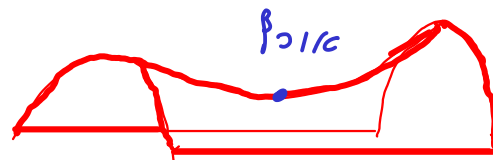


זכור ה"וקטור"  $\nabla_a f$  מאונך למסל  $\gamma$  בנק'  $(a,b)$

חשוב: ה"וקטור"  $\text{grad } f$  נמצא במישור  $(x,y)$

הוא נורה לאג הכיוון העל'י הקצה ביותר של מסל הזרף ב-  $(a,b)$

המש'  $\nabla f = 0$  א'נו מסל'!



כבר,  $\nabla f = 0$  בנקודות חשודות לקיצון.

$P(1,0)$

$$g(x,y) = \frac{x-y^2}{x^2}$$

$$g'_x(1,0) = \frac{x^2 - (x-y^2) \cdot 2x}{x^4} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = \frac{x^2 - 2x^2 - 2y}{x^3} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = \frac{-x^2 - 2y}{x^3} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = -1$$

(1)

$$g'_y(1,0) = \frac{1}{x^2} \cdot (-2y) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = 0$$

$$\nabla_{(1,0)} g = (-1, 0)$$

$$g'_y(x,y) = \frac{1}{x^2} (x-y^2)'_y = \frac{1}{x^2} (0-2y)$$

$x = \text{const}$

$$g(1,0) = 1$$

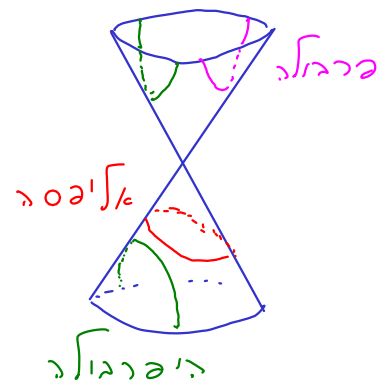
$C = ?$

$l_c$  (2)

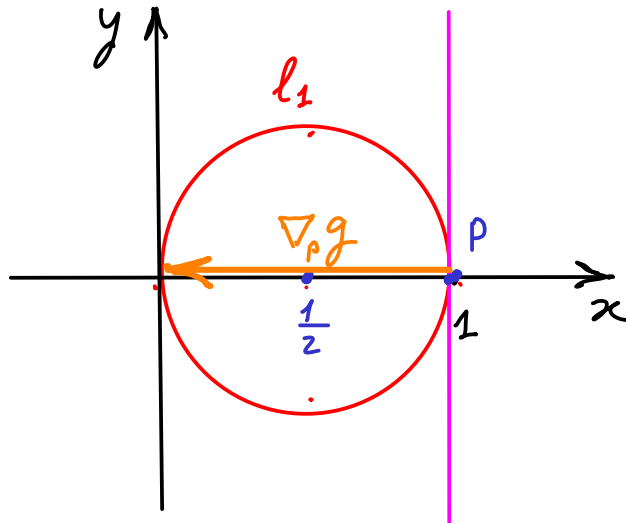
$$C = \frac{1-0^2}{1^2} = 1$$

כך,  $P(1,0)$  יהיו הערכים  $l_c$ :  $\frac{x-y^2}{x^2} = C$

$$l_1: x - y^2 = x^2$$



3 אפשרויות  
 $l_1 - 5$



$$x^2 - x + y^2 = 0$$

$$(x^2 - x + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} + y^2 = 0$$

$$\boxed{(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2}$$

(3) נוקטות  $\text{grad}_p g$  נאונות ל $l_1$



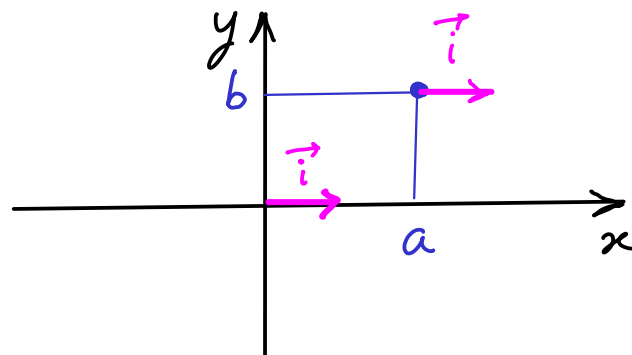
# הנגזרת לפי כיוון

$$a \in \mathcal{D}_f$$

$$\|u\| = 1 \quad u \in \mathbb{R}^n$$

"כיוון" =  $|C|$  ו'ח'דה

$$u = \vec{i} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(a,b)$$



$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) := \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(a + u dt) - f(a)}{dt}$$

$\frac{\partial f}{\partial u}(a) \iff x=a \rightarrow f(x)$  Caen

$$\|u\| = 1$$

$$u = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (a,b) = (2,-1) \quad f(x,y) = x^2 y$$

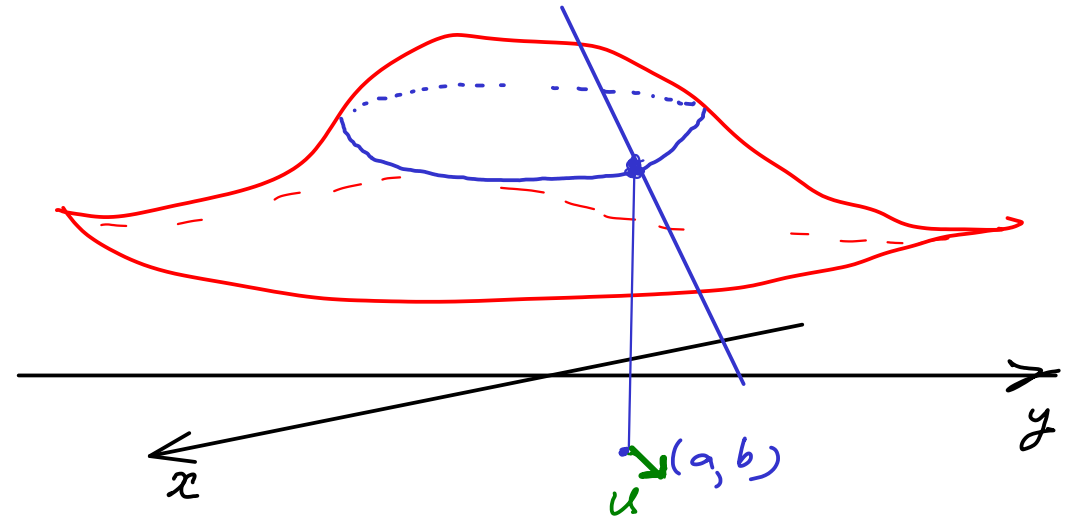
$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2} dt, -1 + \frac{1}{2} dt\right) - f(2,-1)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2} dt\right)^2 \left(-1 + \frac{1}{2} dt\right) - 2^2 \cdot (-1)}{dt} =$$

$$= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{(2^2 + \frac{3}{4}(dt)^2 + 2\sqrt{3}dt)(-1 + \frac{1}{2}dt) + 4}{dt}$$

$$= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{-4 - \frac{3}{4}(dt)^2 - 2\sqrt{3}dt + 4 \cdot \frac{1}{2}dt + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}(dt)^3 + \frac{2\sqrt{3}}{2}(dt)^2 + 4}{dt} =$$

$$= -2\sqrt{3} + 2 = 2(1 - \sqrt{3})$$

השדה =  $\frac{\partial f}{\partial x}$  הווקטור  $e_1$  כיוון  $x$



קבוצת פונקציה  $t$  (משנה אחת)  $\frac{\partial f}{\partial u}(a, b) = f(a + t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, b + t \cdot \frac{1}{2})$

כל מה שיש בו הווקטור



הנגזרת של  $f$  בנקודה  $(2, -1)$

$$f \circ g$$

$$f(x, y) = x^2 y$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a, b) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f\left(a + t \frac{\sqrt{3}}{2}, b + t \frac{1}{2}\right)$$

$$f(x, y) = x^2 y$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}t + 2 \\ \frac{1}{2}t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & & x, y & & \\ & \searrow & \text{f} \circ \text{g} & \nearrow & \end{array}$$

הנגזרת של  $f$  בנקודה  $(2, -1)$

$$g(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g(t) = f(v(t), w(t)) = f\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, -1 + \frac{1}{2}t\right) = f\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, -1 + \frac{1}{2}t\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(2, -1) \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(2, -1) \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(-1 + \frac{1}{2}t\right) = 2xy \Big|_{\substack{x=2 \\ y=-1}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + x^2 \Big|_{x=2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= -4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = -2\sqrt{3} + 2 = 2(1 - \sqrt{3})$$

$$f(x,y) = (xy - 1)^2$$

∴ ∴ ∴ ∴ ∴ '2'  $f'_x(a,b)$  ak 1.3 N) (1

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(a+dx, b) - f(a,b)}{dx} =$$

$$= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{((a+dx)b - 1)^2 - (ab - 1)^2}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{((ab - 1) + bdx)^2 - (ab - 1)^2}{dx} =$$

$$= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\cancel{(ab-1)^2} + 2(ab-1)b dx + b^2 dx^2 - \cancel{(ab-1)^2}}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{2(ab-1)b \cancel{dx} - b^2 dx^2}{\cancel{dx}} =$$

$$= \lim_{dx \rightarrow 0} [2(ab-1)b - b^2 dx] = 2(ab-1)b$$

$$f(x, b) = (bx - 1)^2$$

$$f'_x(a, b) = \left( (bx - 1)^2 \right)'_{x=a} = 2(bx - 1) \cdot b \Big|_{x=a} = 2(ab - 1)b$$

$$\int_{a,b} \frac{\partial f}{\partial x} = f(a,b) - f(b,a) \quad (2)$$

$$f(x,y) = \ln(x+y)$$

$$a + b > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\ln(a+dx+b) - \ln(a+b)}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{a+b+dx}{a+b}\right)}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{1}{dx} \ln\left(1 + \frac{dx}{a+b}\right)$$

1) סביבה

$$\ln(A) - \ln(B) = \ln\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$\frac{0}{0} \text{ is } 1/2311 - 1/6$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{t}{a+b})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\ln(1 + \frac{t}{a+b}))'}{t'} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{a+b+t}\right)}{1} = \frac{1}{a+b}$$

$$\left(\ln\left(1 + \frac{t}{a+b}\right)\right)' = \frac{1}{1 + \frac{t}{a+b}} \cdot \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a+b+t}$$

∴

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{1}{dx} \ln\left(1 + \frac{dx}{a+b}\right) = \frac{1}{a+b}$$

(2) היזק הקצרה:

$$f(x, b) = \ln(x+b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \left(\ln(x+b)\right)'_{x=a} = \frac{1}{x+b} \Big|_{x=a} = \frac{1}{a+b}$$

הגדרת פונקציה גזירה. כלל השלמה

$$''\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m''$$

$$\mathcal{D} \neq \emptyset \quad \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{תחום מוגדר על פניו.}$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

$$f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f_1(x) = f_1(x_1, \dots, x_n): \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_2(x) = f_2(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{---}}): \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

נניח  $f$  גזירה סביב נק'  $x=a$ . נק'  $x=a$  נקראת נק' גזירה:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a), \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a)$$

גזירה

איגור' אצור

$$J_a(f) := \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \in M_{m \times n} \quad \text{איגור' אצור}$$

$$J_a(f) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$J_a(f)$  איגור' אצור  $f(x)$  אצור  $x = a$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = J_a(f)$$

$a$  אצור  $f$  אצור

אצור  $x = a$  אצור  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$

$$a \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$$

$g \circ f$

אצור אצור

$$J_a(g \circ f) = J_{f(a)}(g) J_a(f)$$

(אצור אצור) אצור

$$g(x, y) = x^2 + 3xy$$

∴ צריך למצוא

$$(a, b) = (2, \pi)$$

$$f(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$f_1(r, \theta) = r \cos \theta$$

$$f_2(r, \theta) = r \sin \theta$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^1$$

$(r, \theta) \qquad (x, y)$

2

$$g \circ f(r, \theta) = g[f(r, \theta)] = g(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^2 \cos^2 \theta + 3 r^2 \cos \theta \sin \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (g \circ f)(2, \pi) = \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cos^2 \theta + 3 r^2 \sin \theta \cos \theta) \Big|_{r=2} = 2r (\cos^2 \theta + 3 \cos \theta \sin \theta) \Big|_{r=2} =$$

$$= 2 \cdot 2 ((-1)^2 + 3 \cdot (-1) \cdot 0) = 4$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (g \circ f)(2, \pi) = \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \cos^2 \theta + 3 r^2 \sin \theta \cos \theta) \Big|_{r=2} = r^2 (2 \cos \theta \cdot (-\sin \theta) + 3 \cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta) \Big|_{r=2} =$$

$$= 4(2(-1) \cdot (-0) + 3(-1)^2 - 3 \cdot 0^2) = 12$$

$$\tilde{J}_{(2,\pi)}(g \circ f) = (4, 12)$$

$$g \circ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d_{(2,\pi)}(g \circ f) = 4dr + 12d\theta$$

$$\overset{1 \times 2}{\tilde{J}_{(2,\pi)}}(g \circ f) = \overset{1 \times 2}{\tilde{J}_{(-3,0)}}(g) \overset{2 \times 2}{\tilde{J}_{(2,\pi)}}(f)$$

$$f(2,\pi) = \begin{pmatrix} 2 \cos \pi \\ 2 \sin \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{J}_{(2,\pi)}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r}(2,\pi) & \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(2,\pi) \\ \frac{\partial f_2}{\partial r}(2,\pi) & \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(2,\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad : \tilde{J}_{(2,\pi)}(f) \text{ is } 2 \times 2 \text{ matrix}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(r \cos \theta) = \cos \theta$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(r \cos \theta) = r \cdot (-\sin \theta) = -r \sin \theta$$



$$\frac{\partial f_2}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta) = \sin \theta$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta) = r \cos \theta = -2$$

$$\nabla_{(-2,0)} g = \left( \frac{\partial g}{\partial x}(-2,0), \frac{\partial g}{\partial y}(-2,0) \right) = (-4, -6)$$

$$\nabla_{(-2,0)} g \quad \text{3, 7, 12, 13, 14}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(-2,0) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + 3xy) \Big|_{\substack{x=-2 \\ y=0}} = 2x + 3y \Big|_{\substack{x=-2 \\ y=0}} = -4$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(-2,0) = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + 3xy) \Big|_{\substack{x=-2 \\ y=0}} = 3x \Big|_{x=-2} = -6$$

$$(-4, -6) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = (4, 12) \quad \text{10, 15, 16}$$

השלב אחר הנגזרת  $\frac{dz}{dt}$  עבור  $z = \sqrt{x^2 y}$  בקווא  $t=2$

$$x = t^2$$

$$y = \frac{1}{t}$$

$\frac{dz}{dt}$   $z(x(t), y(t))$  נמצא  $t$ ,  $t$  ו-1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}^{-1} z(x, y) \text{ נבחר } \text{הרכבה}$$

$$z: \mathbb{R}^2_{y \geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left( (x^2 y)^{1/2} \right)'_x = \sqrt{y} \cdot \frac{1}{2} (x^2)^{1/2-1} \cdot 2x = \sqrt{y} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x\sqrt{y}}{|x|} \quad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x^2} \cdot \left( y^{1/2} \right)'_y = |x| \cdot \frac{1}{2} \cdot y^{1/2-1} = \frac{|x|}{2\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \left(4, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} x(2) &= 4 \\ y(2) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \left(4, \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} x &= t^2 \\ y &= \frac{1}{t} \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} = (t^2)' = 2t$$

$$\frac{dx}{dt}(2) = 4$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2}$$

$$\frac{dy}{dt}(2) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} \left(4, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 4 + 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{2}}{2}}}$$

(3)

(4)

$$f(t) = \sqrt{t^4 \cdot \frac{1}{t}} = \sqrt{t^3}$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \dot{f}(t) = \left(t^{3/2}\right)' = \frac{3}{2} t^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3\sqrt{t}}{2}$$

$$\frac{df}{dt}(2) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

insgesamt ist das eine Kfz

$$\begin{aligned}
 x &= \ln(u \cos v) \quad \text{כאשר} \quad (2, \frac{\pi}{4}) \quad \text{הנקודה} \quad \frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{הערך} \\
 y &= u \sin v \\
 z &= 4e^x \ln y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}^2 &\xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{z} \mathbb{R} \\
 g &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 u \cos v &> 0 \quad y > 0
 \end{aligned}$$

$$z(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \rightsquigarrow \left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \nabla z$$

$$dg_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(a) & \frac{\partial x}{\partial v}(a) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(a) & \frac{\partial y}{\partial v}(a) \end{pmatrix}$$

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{הפונקציה}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{הקטע} \\
 &\text{'הקטע'}
 \end{aligned}$$

$$T: U \rightarrow V$$

$$e_1, \dots, e_n \quad f_1, \dots, f_n$$

$$[T] \quad \text{הקטע}$$

כאן,  $N$  היא

$$a = \left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$d_a(z \circ g) = \overbrace{d_{g(a)} z}^{d_a z} d_a g$$

כל  $z \in N$ !

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow[d_a g]{d_a g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow[d_{g(a)} z]{d_a z} \mathbb{R}$$

$a \mapsto g(a)$

$$dz = \left( \frac{\partial z}{\partial x}(g(a)), \frac{\partial z}{\partial y}(g(a)) \right)$$

$$dg = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(a) & \frac{\partial x}{\partial v}(a) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(a) & \frac{\partial y}{\partial v}(a) \end{pmatrix}$$

$$dz dg = \underbrace{\left( \frac{\partial z}{\partial x}(g(a)), \frac{\partial z}{\partial y}(g(a)) \right)}_{1 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(a) & \frac{\partial x}{\partial v}(a) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(a) & \frac{\partial y}{\partial v}(a) \end{pmatrix}}_{2 \times 2} = \left( \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right)$$

$$x = \ln(u \cos v) \quad \text{we have} \quad \begin{pmatrix} u & v \\ 2 & \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

$$y = u \sin v$$

$$z = 4e^x \ln y$$

$$\frac{\partial(z \circ g)}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

(1)

$$\frac{\partial(z \circ g)}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$g(2, \frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} \ln(2 \cos \frac{\pi}{4}) \\ 2 \sin \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \ln 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\ln 2}{2}$$

$$y = \sqrt{2}$$

(2)

$$\frac{\partial z}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \ln 2, \sqrt{2} \right) = \ln y \cdot 4 \cdot e^x \Big|_{\left( \frac{\ln 2}{2}, \sqrt{2} \right)} = \ln \sqrt{2} \cdot 4 \cdot e^{\frac{\ln 2}{2}} = \frac{1}{2} \ln 2 \cdot 4 \cdot \left( e^{\ln 2} \right)^{\frac{1}{2}} = 2 \ln 2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \ln 2$$

$$d_{\left( \frac{1}{2} \ln 2, \sqrt{2} \right)} z = (2\sqrt{2} \ln 2, 4)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \ln 2, \sqrt{2} \right) = 4e^x \cdot \frac{1}{y} \Big|_{\left( \frac{\ln 2}{2}, \sqrt{2} \right)} = 4 \left( e^{\ln 2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$$

$$x = \ln(u \cos v) \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} u & v \\ 2 & \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

$$y = u \sin v$$

$$z = 4e^x \ln y$$

$$dg = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cancel{u \cos v}} \cdot \cancel{\cos v} & \frac{1}{\cancel{u \cos v}} \cdot \cancel{u} (-\sin v) \\ \sin v & u \cos v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{tg} v \\ \sin v & u \cos v \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$d_{\left(2, \frac{\pi}{4}\right)} g = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$d_{\left(2, \frac{\pi}{4}\right)} (z \circ g) = (2\sqrt{2} \ln 2, 4) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \left( 2\sqrt{2} \ln 2 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2} \ln 2 \cdot (-1) + 4\sqrt{2} \right) = \quad (4)$$

$$= (2\sqrt{2} \ln 2 + 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2} \ln 2 + 4\sqrt{2}) = \underline{\underline{(2\sqrt{2} (\ln 2 + 1), 2\sqrt{2} (2 - \ln 2))}}$$



# גרדיינט

$$m=1$$

$$\mathbb{R}^n \ni \phi \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad \text{הגרדיינט } \nabla = \text{גרדיינט 'עקב'}$$

$\mathbb{R}^n$  גרדיינט "ע"ק  $\text{grad}_a f$   
 על הנשענים

$$\nabla_a(f) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

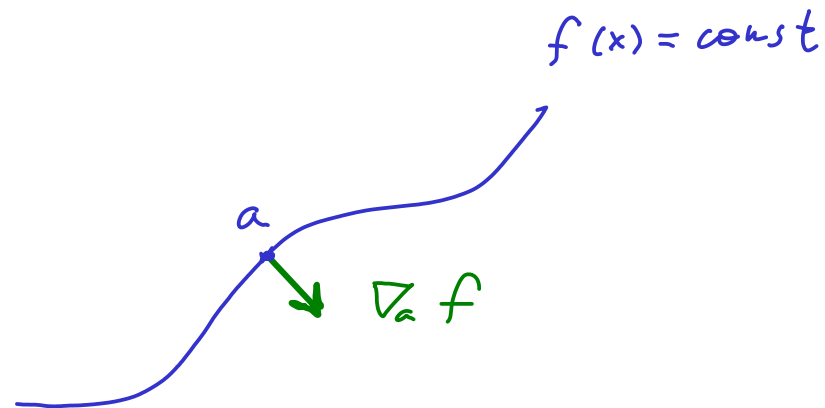
"גרדיינט"

$$\text{grad}_a(f) = \nabla_a f$$

לענ הכיוון על הקטלור  $\text{grad}_a(f) =$  הכיוון על שפי' חזק ביותר בזו' על  $f(x)$  בז'  $\mathbb{R}^{n+1} \ni (a, f(a))$

$$\|u\|=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \langle u, \text{grad}_a f \rangle \quad \underline{\underline{\text{לענ}}}$$



צדע הוקר  $\text{grad}_a(f)$  מוקד קרן

יוס  $\text{grad}_a f$  וק'  $d_a f$

כפס,  $a$  מוקד פנימי עגור  $\mathcal{D}_f$

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{D}_f^0$$

$$d_a f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) dx_n$$

$$dx_i = x_i - a_i$$

$$\nabla_a f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

$$\text{15/6}, dx = (dx_1, \dots, dx_n) \quad \text{170}$$

$$d_a f(dx) = \langle \nabla_a f, dx \rangle \quad \underline{\underline{\text{Caen}}}$$

$$d_a f = 0 \Leftrightarrow \nabla_a f = 0 \quad \text{170}$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$$

$$(a, b) = (1, 2)$$

$$\text{if } \rightarrow \text{170}$$

$$f(1, 2) = \sqrt{1^3 + 2^3} = 3$$

$$dx = 0.01$$

$$dy = -0.03$$

$$\sqrt{(1.01)^3 + (1.97)^3} = ?$$

```
File Edit View Search Terminal Help
>stap@ostap-desktop:~$ octave
GNU Octave, version 5.2.0
Copyright (C) 2020 John W. Eaton and others.
This is free software; see the source code for copying conditions.
There is ABSOLUTELY NO WARRANTY; not even for MERCHANTABILITY or
FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. For details, type 'warranty'.

Octave was configured for "x86_64-pc-linux-gnu".

Additional information about Octave is available at https://www.octave.org.

Please contribute if you find this software useful.
For more information, visit https://www.octave.org/get-involved.html

Read https://www.octave.org/bugs.html to learn how to submit bug reports.
For information about changes from previous versions, type 'news'.

octave:1> sqrt(1.01^3+1.97^3)
ans = 2.9454
octave:2>
```

$$\nabla_{(1,2)} f = \left( \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}, \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}} \right) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \left( \frac{1}{2}, 2 \right)$$

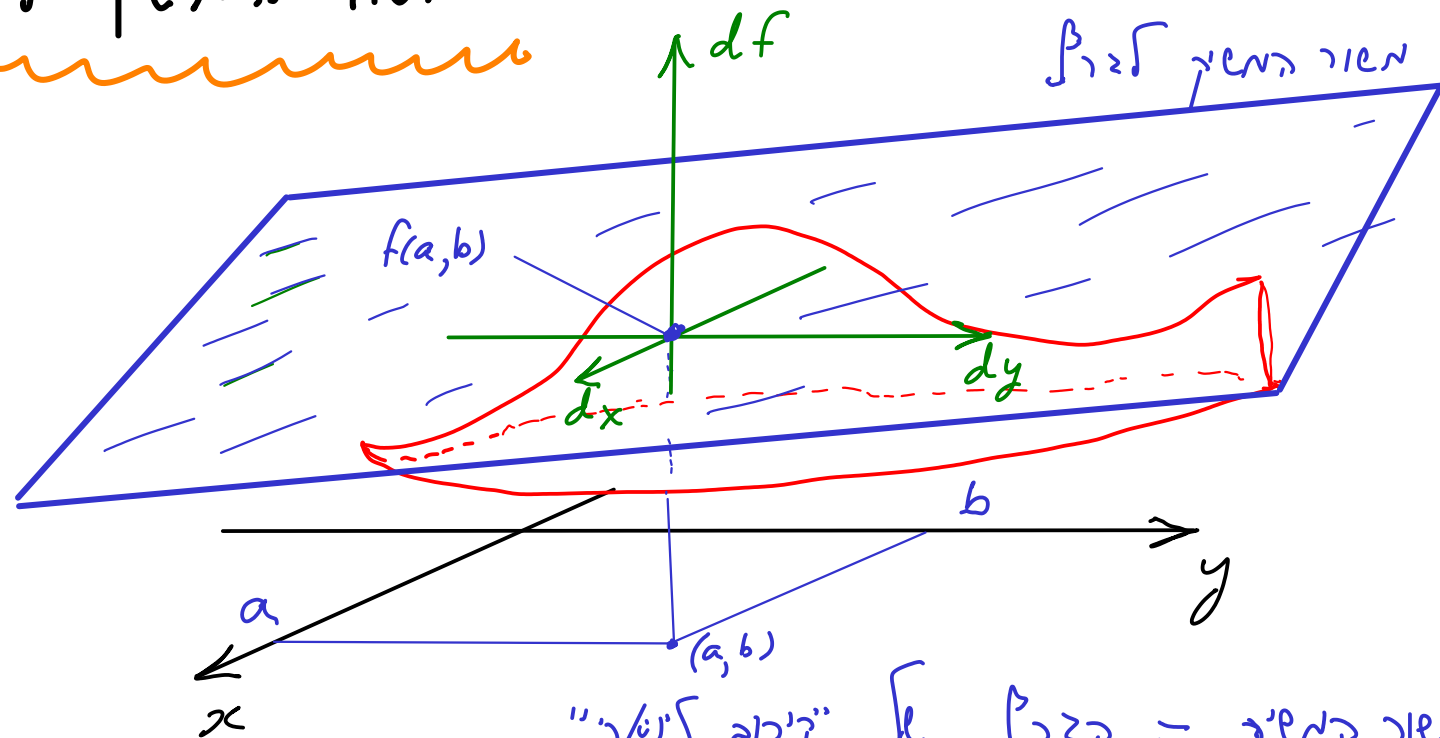
$$d_{(1,2)} f(0.01, -0.03) = \frac{1}{2} \cdot 0.01 - 2 \cdot 0.03 = 0.005 - 0.06 = -0.055$$

$$d_{(1,2)} f = \frac{1}{2} dx + 2 dy$$

קיבולת אינרציה  
f סביב (1,2)

$$f(1.01, 1.93) \approx f(1, 2) + d_{(1,2)} f(0.01, -0.03) = 3 - 0.055 = 2.945$$

משור המשיק למשטח



רשום את משוואת המישור  
 $z\sqrt{y-1} = \sqrt{x}$  במשטח  
 בנקודה  $(1, 2, 1)$

משור המשיק = המישור אל "קירוב ליניארי"

נבדוק שהנקודה  $(1, 2, 1)$  ע"י-א למשטח:

$$1 \cdot \sqrt{2-1} \stackrel{?}{=} \sqrt{1}$$

$$1 = 1 \quad \text{ע"י-א}$$

1) נסמן  $f(x, y) := \sqrt{\frac{x}{y-1}}$ , אז המישור ברצמ המישור אל  $df$  בקי  $(1, 2)$

$$dz = df = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) dy$$

$$\underline{x, y, z \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R} \quad dz = f_x(1,2) dx + f_y(1,2) dy \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R} \quad (2)}$$

$$z-1 = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) \cdot (x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \cdot (y-2)$$

$\Leftrightarrow$

$$dx = x-1$$

$$dy = y-2$$

$$dz = z-1$$

$$f(x,y) := \sqrt{\frac{x}{y-1}}$$

$$f(x,y) = \left( \frac{x}{y-1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\underline{:f'_x(1,2), f'_y(1,2) \text{ mit } x, y \in \mathbb{R} \quad (3)}$$

$$f_x(1,2) = \frac{1}{\sqrt{y-1}} \cdot \left( x^{\frac{1}{2}} \right)' \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{\sqrt{2-1}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \Big|_1 = \frac{1}{2}$$

$$f_y(1,2) = \sqrt{x} \cdot \left( (y-1)^{-\frac{1}{2}} \right)' \Big|_{(1,2)} = \sqrt{1} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot (y-1)^{-\frac{3}{2}} \Big|_2 = -\frac{1}{2} (2-1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$z-1 = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-2)$$

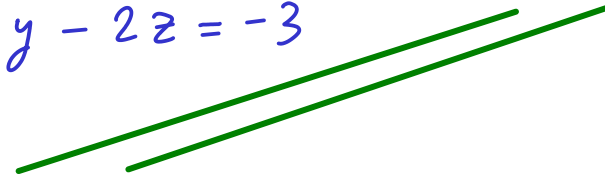
(4)

$$2(z-1) = (x-1) - (y-2)$$

$$2z-2 = x-1-y+2$$

$$2z-2 = x-y+1$$

$$x-y-2z = -3$$



בה נקטו מרחבי  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$  ,  $\text{גרע}$   $\text{נלע}$

ג' סיון גרש"ל

3"0

$n=1$

$f(x)$

$f'(a) = 0$    
 מינימום   
 מקסימום

$f'(a)$    
 $>0 \rightarrow$  מיני   
 $<0 \rightarrow$  מקסי   
 $=0$  יציף

נקודת קיצון

$\cup$    
 מיני   
 $\Rightarrow$    
 $f(x) = (x-x_0)^2 f''(x_0)$

$n > 1$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$$f(x) = f(a) + d_a f + \frac{1}{2} d_a^2 f + \dots$$

$f(x) \approx c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-a)^2 + \dots = f(a) + \underbrace{f'(a) \cdot (x-a)}_{df} + \frac{1}{2} f''(a) (x-a)^2 + \dots$

$f(x_0) + df + \frac{1}{2} d^2 f + \dots$

$>0 \quad <0 \quad =0$    
 $\cap \quad \cup \quad \cup$

$$d_a f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) (x_i - a_i)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$$

$$\nabla_a f = 0 \iff f(x) \text{ has a local extremum at } x=a \quad \text{Gen}$$

$n=2$

נניח כי  $f$  היא פונקציה

$f(x,y)$

$(dx)^2, dx dy = dy dx, (dy)^2$  הם נכנסים

$$d^2 f = f_{xx}''(a,b)(dx)^2 + \underbrace{f_{xy}''(a,b) dx dy + f_{yx}''(a,b) dy dx}_{f_{xy}''(a,b) dx dy + f_{yx}''(a,b) dy dx} + f_{yy}''(a,b)(dy)^2 = f_{xx}''(a,b)(dx)^2 + 2 f_{xy}''(a,b) dx dy + f_{yy}''(a,b)(dy)^2$$

$$f_{xy}'' = f_{yx}'' \iff \text{נכנסים } f_{xy}'', f_{yx}''$$



$$f(x,y) = x^2 + y^2 = 0 \cdot x + 0 \cdot y + \underbrace{1 \cdot dx^2 + 1 \cdot dy^2}_{d^2 f}$$

Taylor

$(a,b) = (0,0)$

$$d_a^2 f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)}_{n^2 \text{ מספרים}} dx_i dx_j$$

דף n:

$$d_a^2 f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (dx_i)^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) dx_i dx_j$$

מספרים כפולים וסימטריה

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 > 0 \quad (x,y) \neq (0,0)$$

מה זה  $d^2 f > 0$  ???

$$0 \neq dx, dy \Rightarrow \exists \delta > 0 \quad df^2(dx, dy) > 0 \Leftrightarrow df^2 > 0$$

הערה: נאמר - e

2x2 מטריצה

$$n=2 \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad 2 \times 2 \quad \begin{matrix} \text{מטריצה} \\ \text{סימטרית} \end{matrix}$$

מטריצה סימטרית  
יש בהם ערכים  $\leq$  לא סיימ

$$A \in M_n$$

$$u, v \in \mathbb{R}^n$$

$$\varphi(u, v) = u^T A v$$

$$df(dx, dy) = (dx)^T H dy$$

$$H = H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_n = \det A \quad \dots \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \alpha_{11}$$

$\alpha''_{11} \dots \alpha''_{nn}$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$$u, v \neq 0 \quad \text{and} \quad u^T A v > 0 \quad (\text{J. Sylvester}) \quad \underline{\underline{\text{CœN}}}$$

$$\alpha'_{11} \dots \alpha'_{nn} \quad x = a \rightarrow$$

$$\varphi(u, v) = u^T A v > 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \quad \text{and} \quad \Delta_k > 0 \quad (k)$$

לכ"ע נ"ל

מכאן  $x=a$  ->

$$\varphi(u,v) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{2m} > 0 & \textcircled{2} \\ \Delta_{2m+1} < 0 \end{cases}$$

ב"כ  $x=a$  ->

$$u,v \text{ נ"ל } \varphi(u,v) < 0 \text{ ו- } \varphi(u,v) > 0 \Leftrightarrow \text{מכאן } \Delta_{2m} < 0 \textcircled{3}$$

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$$

1

$$f'_x = 2x + 2$$

$$f'_y = 2y + 4$$

$$f'_z = 2z - 6$$

$$(a,b,c) = (-1, -2, 3)$$

נ"ל נ"ל

$$f''_{xx} = 2 \quad f''_{xy} = 0 \quad f''_{xz} = 0$$

$$f''_{yy} = 2 \quad f''_{yz} = 0$$

$$f''_{zz} = 2$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$\Delta_1 = 2 > 0 \quad \Delta_3 = 8 > 0$$

$$(-1, -2, 3) \rightarrow \text{מכאן } f \text{ נ"ל}$$

2

$$f_y' = 2y + 6x$$

$$f'_z = 2z - 2$$

$$12/11/2019 \int \int^3$$

1

$$\hookrightarrow y = -3x$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 2$$

$$a = (0, 0, 1) \quad \therefore 13/10 \quad \rightarrow 13/12 \quad 2$$

$$b = (2, -6, 1)$$

$$f''_{xx} = 18x$$

$$f_{yy}'' = 2$$

$$f''_{xy} = 6$$

$$f''_{yz} = 0$$

$$f''_{xz} = 0$$

$$f''_{zz} = 2$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 18x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2

$$H_a(f) = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} < 0$$

$$a = (0, 0, 1) \quad (3)$$

$\therefore a \rightarrow$  local :  $\lambda_{\min}$

$$H_b(f) = \begin{pmatrix} 36 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = (2, -6, 1) \quad (4)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 36 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 36 \cdot 2 - 36 > 0$$

:  $\lambda_{\min}$   $\lambda_{\max}$   $\lambda_{\min}$   $\lambda_{\max}$

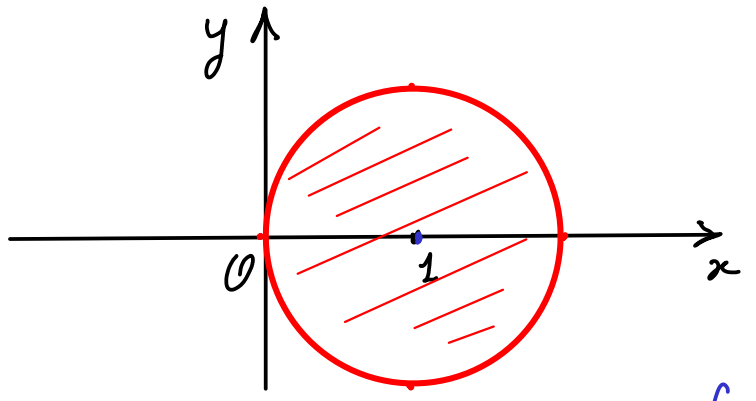
$$\Delta_1 = 36 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 36 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 36 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} > 0$$

min  $\lambda_{\min}$   $\lambda_{\max}$   $\lambda_{\min}$   $\lambda_{\max}$   $\lambda_{\min}$   $\lambda_{\max}$   $\lambda_{\min}$   $\lambda_{\max}$

קיצון מוגבל

|| נמצא את מקסימום ומינימום מוגבל על הבורגיה  $f(x,y) = x+y$  בגומס  $\mathcal{D}: (x-1)^2 + y^2 \leq 1$



(1) נמצא את נקודות קריטיות ב-D

$\mathcal{D}^{\circ}: (x-1)^2 + y^2 < 1$

$\nabla_{(x,y)} f = 0 \iff (a,b)$  קריטית ב  $\mathbb{R}^2$ ,  $f(x,y)$  מוגדרת

$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \neq 0 \implies f$  אינה קריטית-אמצעית

(2) נקודות חוליה ב-D

$\partial \mathcal{D}: (x-1)^2 + y^2 = 1$

הגדרנו  $g(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 1$  על  $\partial \mathcal{D}$  כדי למצוא קיצוניים של  $f$  על  $\partial \mathcal{D}$

לפי Lagrange:  $L_{\lambda}(x,y) := f(x,y) + \lambda g(x,y)$

$g(x,y) = 0$  :  $\partial \mathcal{D}$

$L_{\lambda}(x,y) := f(x,y) + \lambda g(x,y)$  : מסתמך

$L_{\lambda}(x,y) = x+y + \lambda[(x-1)^2 + y^2 - 1]$

נמצא את נקודות קיצ'ור של  $L_\lambda$  כפונקציה של  $x, y, \lambda$  : עזרה 1.1

$$\begin{cases} \frac{\partial L_\lambda}{\partial x} = 1 + 2\lambda(x-1) \\ \frac{\partial L_\lambda}{\partial y} = 1 + 2\lambda y \\ \frac{\partial L_\lambda}{\partial \lambda} = (x-1)^2 + y^2 - 1 \end{cases}$$

$$\nabla L_\lambda(x, y) = 0$$

הזענו למערכת משוואות ליניאריות:

$$y = x - 1$$

$$2(x-1)^2 - 1 = 0$$

$$x - 1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda(x-1) = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$f(x_1, y_1) = x_1 + y_1 = 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

$$f(x_2, y_2) = x_2 + y_2 = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\min_{(x-1)^2 + y^2 \leq 1} f(x, y) = 1 - \sqrt{2}$$

$$\max_{(x-1)^2 + y^2 \leq 1} f(x, y) = 1 + \sqrt{2}$$

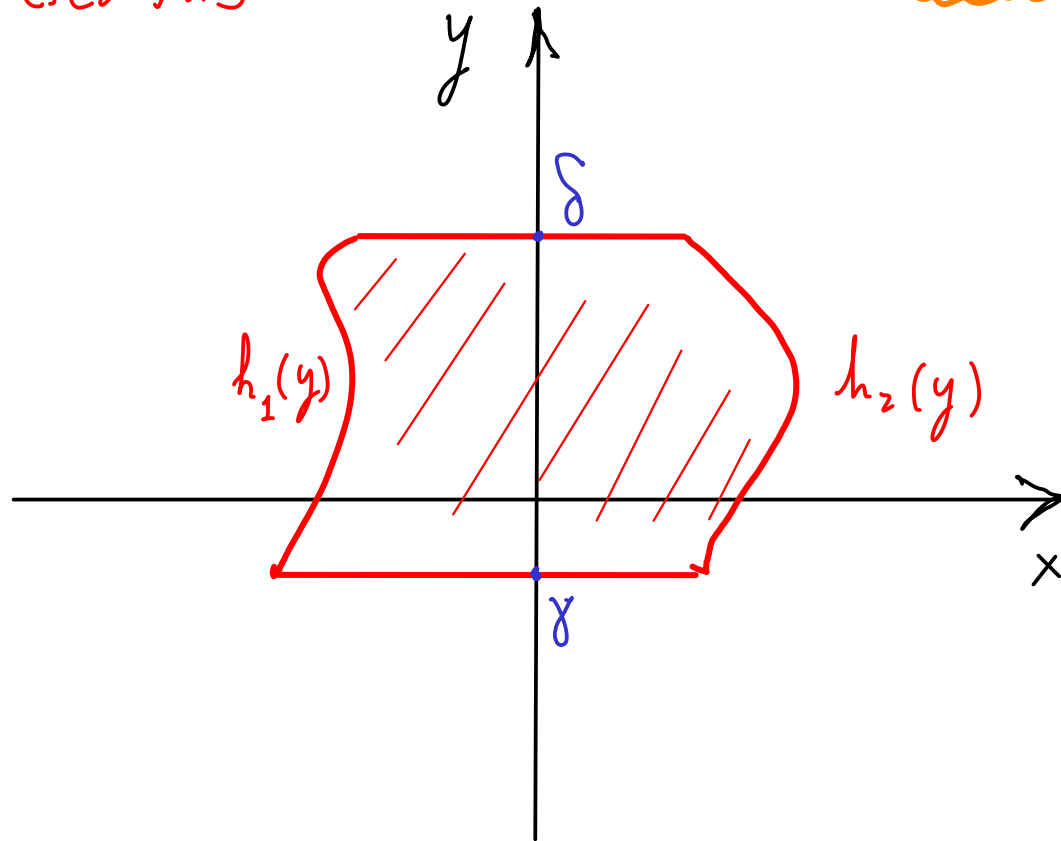
תוצאה

הערות נוספות (3)

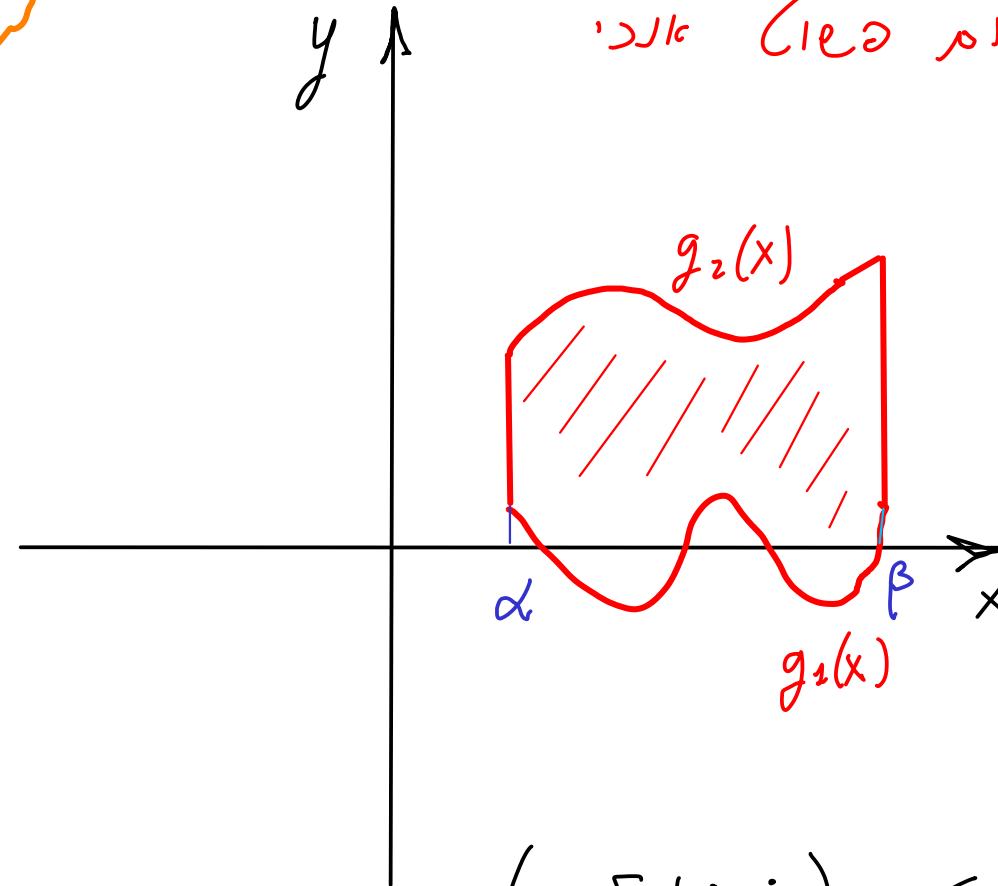


תחום פשוט אופקי

אינטגרלים כפולים



תחום פשוט אנכי



משפט (Fubini)

נניח  $f(x,y)$  אינטגרלית בתחום (חסום וסגור)  $D$  של  $\mathbb{R}^2$ . אז:

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

כאשר  $\alpha, \beta$  הם קצוות של  $D$  על ציר ה- $x$ , ו- $g_1(x), g_2(x)$  הן פונקציות המגדירות את גבולות התחום  $D$  בציר ה- $y$ .

(?) אם  $D$  פשוט אנכי, אז ...



$\mathcal{D}: \begin{cases} x=y^2 \\ y=x-2 \end{cases} \quad \text{זכור} \quad \iint_{\mathcal{D}} y^2 dx dy$

(1)

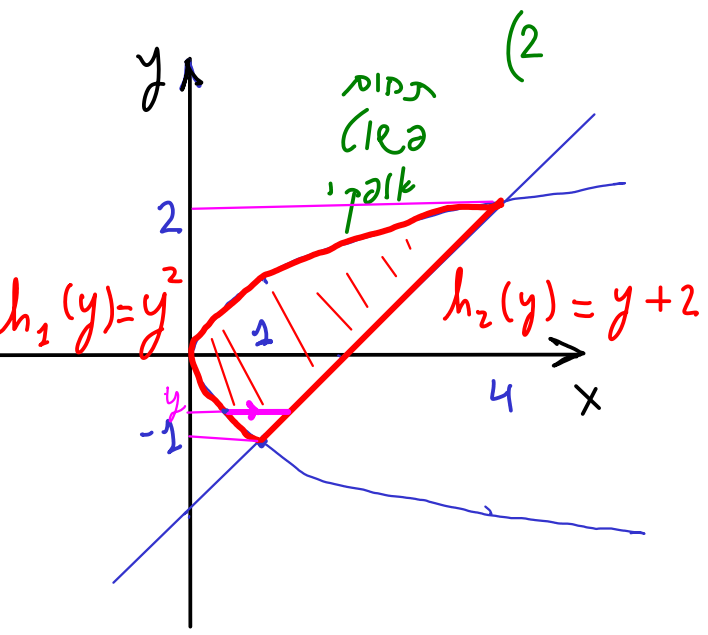
ק' דחיתון :

$$\begin{cases} x=y^2 \\ y=x-2 \end{cases}$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$(y-2)(y+1) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} y=2 \\ x=4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} y=-1 \\ x=-1 \end{matrix}$$

(3) אזור שבו  $\iint$  2-ו זכור (א' זכור וס' זכור) א' זכור וס' זכור



$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} y^2 dx dy &= \int_{-1}^2 \left( \int_{y^2}^{y+2} y^2 dx \right) dy = \int_{-1}^2 y^2 \left( \int_{y^2}^{y+2} dx \right) dy = \int_{-1}^2 y^2 x \Big|_{x=y^2}^{x=y+2} dy = \int_{-1}^2 y^2 (y+2-y^2) dy = \\ &= \int_{-1}^2 (y^3 + 2y^2 - y^4) dy = \left( \frac{y^4}{4} + \frac{2y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{15}{4} + 6 - \frac{33}{5} = \frac{63}{20} \end{aligned}$$

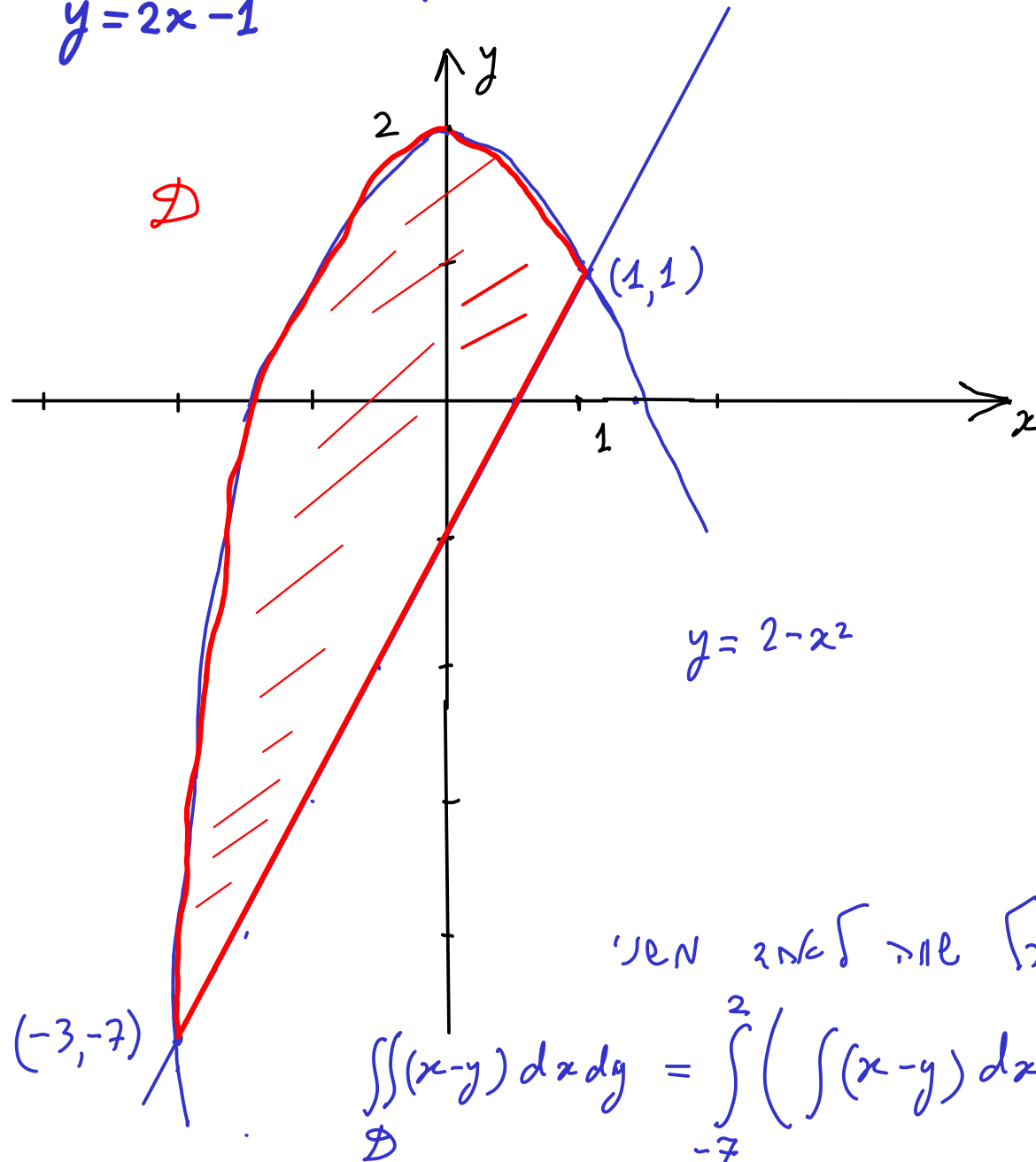
כתבנו את א' זכור וס' זכור  
 ה' זכור וס' זכור  
 א' זכור וס' זכור  
 Fubini

$$y = 2 - x^2$$

$$y = 2x - 1$$

כאשר  $\mathcal{D}$  התחום החסום על ידי הקווים

$$\iint_{\mathcal{D}} (x-y) dx dy$$



נקודות החיתוך בין הקווים:

$$2 - x^2 = 2x - 1$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)^2 = 4$$

$$x+1 = \pm 2$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -3$$

$$(1, 1)$$

$$(-3, -7)$$

על פי Fubini, ניתן לחשב את האינטגרל כהיגור

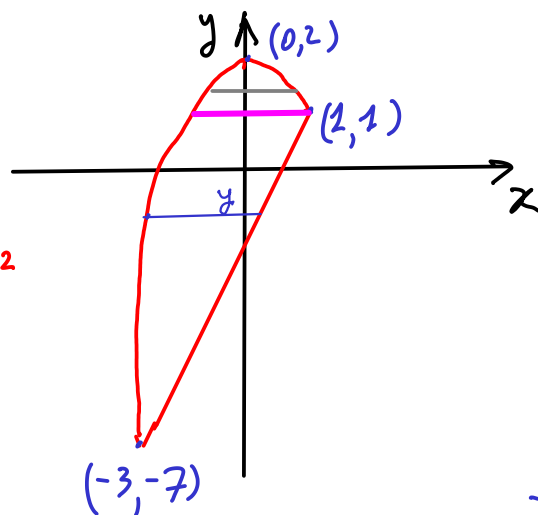
$$\iint_{\mathcal{D}} (x-y) dx dy = \int_{-7}^2 \left( \int (x-y) dx \right) dy$$

①

התחום

$$\iint_D (x-y) dx dy = \int_{-3}^1 \left( \int (x-y) dy \right) dx \quad (2)$$

$$D = D_1 \cup D_2$$



$$\int_{-7}^1 \left( \int_{-\sqrt{2-y}}^{\frac{1}{2}(y+1)} (x-y) dx \right) dy + \int_1^2 \left( \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} (x-y) dx \right) dy \quad (1)$$

התחום אינו פשוט! אפשר לכתוב  
לכן ציינתי את שני חלקי התחום  
האפשריים להם תחומים פשוטים אפשריים.

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$x = -\sqrt{2-y}$$

$$\begin{aligned} y &= 2x - 1 \\ \Downarrow \\ x &= \frac{y+1}{2} \end{aligned}$$

$$-7 \leq y \leq 1 \quad \text{עבור}$$

האינטגרל לא כולל סימנים של 0.

$$\begin{aligned} & \int_{-7}^1 \left( \frac{x^2}{2} - yx \right) \Big|_{-\sqrt{2-y}}^{\frac{1}{2}(y+1)} dy + \int_1^2 \left( \frac{x^2}{2} - yx \right) \Big|_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} dy = \end{aligned}$$

$$= \int_{-7}^1 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}(y+1) \right)^2 - y \cdot \frac{1}{2}(y+1) - \frac{1}{2} \left( -\sqrt{2-y} \right)^2 + y \left( -\sqrt{2-y} \right) \right] dy +$$

$$+ \int_1^2 \left[ -y \left( \sqrt{2-y} \right) + y \left( -\sqrt{2-y} \right) \right] dy =$$

$$\begin{aligned} \int y(2-y)^{\frac{1}{2}} &= \left\{ \begin{array}{l} t = 2-y \\ dt = -dy \\ y = 2-t \end{array} \right\} = - \int (2-t) t^{\frac{1}{2}} dt = \\ &= -2 \int t^{\frac{1}{2}} dt + \int t^{\frac{3}{2}} dt = -2 \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \cdot 2 + \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \cdot 2 \end{aligned}$$

$$= \int_{-7}^1 \left[ \frac{1}{8} (y+1)^2 - \frac{1}{2} (y^2+y) - \frac{1}{2} (2-y) - y(2-y)^{\frac{1}{2}} \right] dy - 2 \int_1^2 y(2-y)^{\frac{1}{2}} dy =$$

$$= \left( \frac{(y+1)^3}{24} - \frac{1}{2} \left( \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( 2y - \frac{y^2}{2} \right) \right) \Big|_{-7}^1 - \left( -\frac{4}{3} (2-y)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} (2-y)^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_{-7}^1 - 2 \left( -\frac{4}{3} (2-y)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} (2-y)^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_1^2$$

$$= \left( \frac{1}{3} - \frac{5}{12} - \frac{3}{4} \right) - \left[ -9 - \frac{49}{2} \left( \frac{-7}{3} + \frac{1}{2} \right) - \frac{7}{2} \left( -2 - \frac{7}{2} \right) \right] - \left[ -\frac{4}{3} + \frac{2}{5} - 18 \left( -2 + \frac{3^3}{5} \right) \right] + 4 \left( -\frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) =$$

$$= \frac{-5}{6} - \left[ -9 - \frac{49}{2} \left( -\frac{11}{6} \right) + \frac{7}{2} \cdot \frac{11}{2} \right] - \left[ \frac{-14}{15} - 9 \left( \frac{17}{5} \right) \right] + 4 \cdot \frac{-7}{15} = -120$$

$$-\frac{5}{6} + 9 - \frac{49 \cdot 11}{12} - \frac{77}{4} + \frac{14}{15} + \frac{17 \cdot 9}{5} - \frac{28}{15}$$

$$\begin{array}{r} 490 \\ 49 \end{array} \quad 539$$

$$-56 - \frac{659}{15} = - \frac{30 \cdot 28 + 659}{15}$$

$$\begin{array}{r} 260 \\ 4 \end{array} \quad 13 \cdot$$

$$-\frac{80}{4} - \frac{180}{4} + 9 - \frac{659}{15} = - \quad 890 \quad \left( - \frac{1499}{15} \right)$$

$$\frac{5}{6} + \frac{539}{12}$$

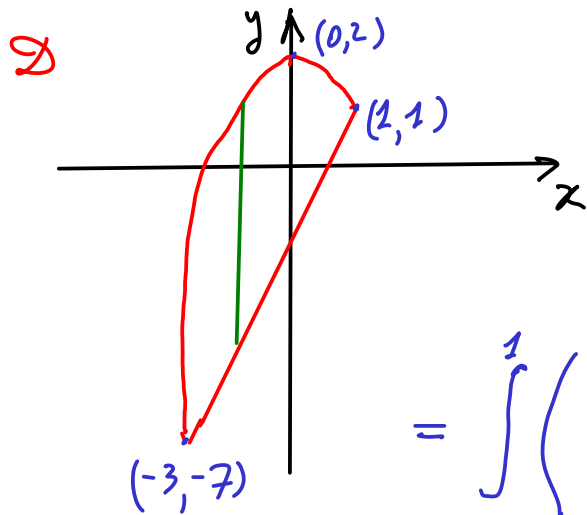
$$\frac{549}{12}$$

2

$$51 \cdot 9 = (50+1)(10-1) = 600 + 10 - 50 - 1$$

$$66 \quad 659$$

$$\frac{183}{4}$$



$$\int_{-3}^1 \left( \int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y) dy \right) dx =$$

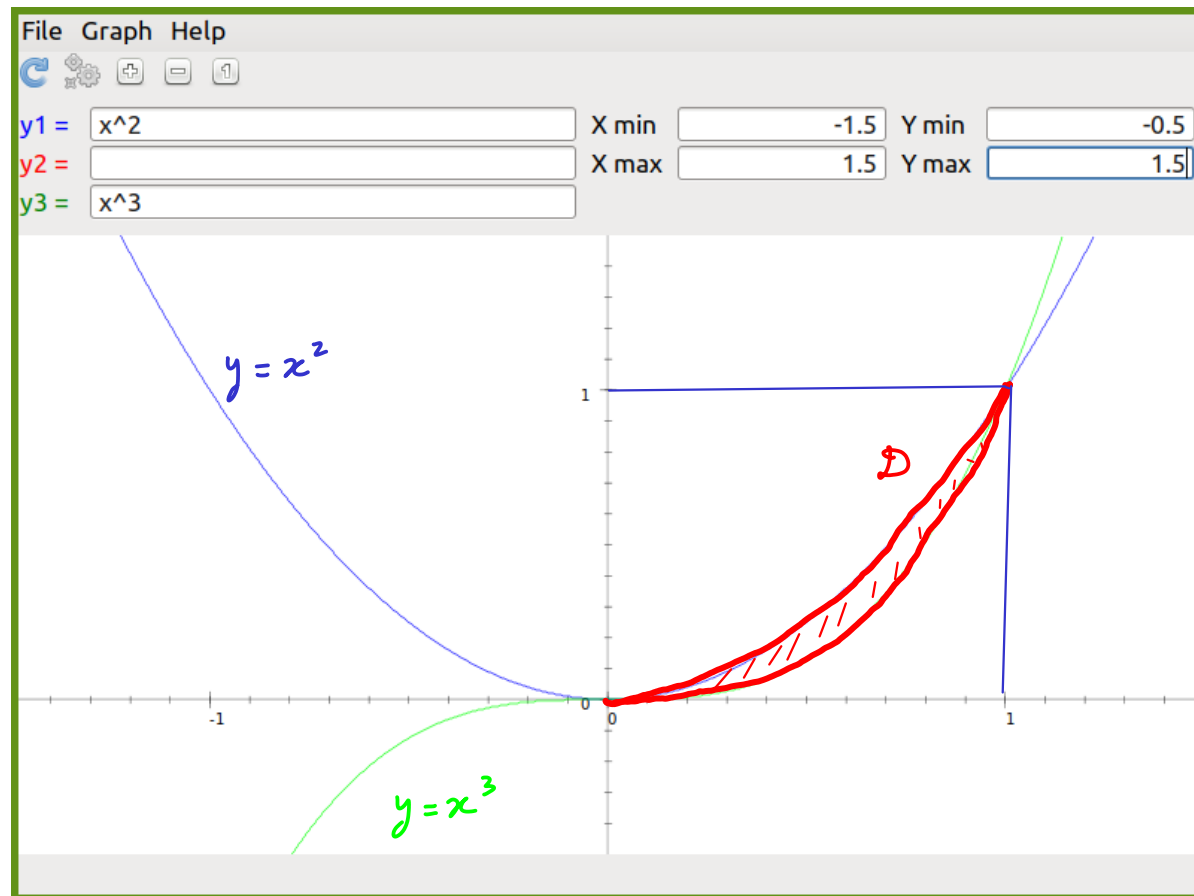
1.7, '516 122 2 015.5. (2)

$$= \int_{-3}^1 \left( xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{2x-1}^{2-x^2} dx = \int_{-3}^1 \left( [x(2-x^2) - x(2x-1)] - \frac{1}{2} [(2-x^2)^2 - (2x-1)^2] \right) dx =$$

$$= \int_{-3}^1 \left( (3x - x^3 - 2x^2) - \frac{1}{2} [4 - 4x^2 + x^4 - (4x^2 - 4x + 1)] \right) dx = \int_{-3}^1 \left[ 3x - x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2} (3 - 8x^2 + x^4 + 4x) \right] dx =$$

$$= \int_{-3}^1 \left( x - x^3 + 2x^2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^4 \right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x - \frac{x^5}{10} \Big|_{-3}^1 =$$

$$= -\frac{8}{2} - \frac{1-81}{4} + \frac{2}{3}(1+27) - \frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{1+3^5}{10} = -4 - 20 + \frac{56}{3} - \frac{122}{5} = \frac{-360 + 56 \cdot 5 - 366}{15} = -\frac{446}{15}$$



$$y = x^2$$

$$y = x^3$$

$$\iint_D \frac{y}{x^2} dx dy$$

כאן D הוא התחום הנ"ל

$$x^3 \leq y \leq x^2$$

תחום הנ"ל D :

$$x \leq \frac{y}{x^2} \leq 1$$

u v

אפשר לבסוס את ההתאמה:

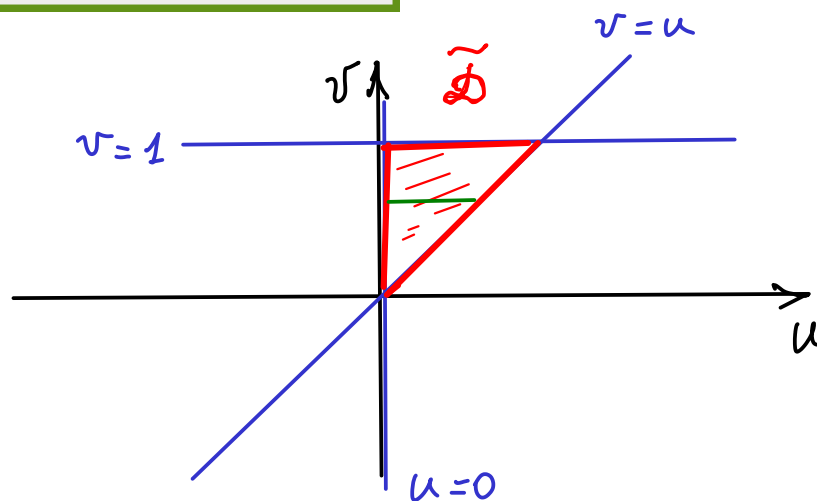
$$(0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq u \leq 1)$$

$$u := x$$

$$v := \frac{y}{x^2}$$

$$u \leq v \leq 1$$

התחום  $\tilde{D}$  בהיקף (u,v) :





$$\iint_D \frac{y}{x^2} dx dy = \iint_{\tilde{D}} v \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv = \iint_{\tilde{D}} v u^2 du dv = \int_0^1 \left( \int_0^v v u^2 du \right) dv = \int_0^1 v \frac{u^3}{3} \Big|_0^v dv = \frac{1}{3} \int_0^1 v^4 dv = \frac{1}{15} //$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left( \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right)^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix}^{-1} = \left( \frac{1}{x^2} \right)^{-1} = x^2 = u^2$$

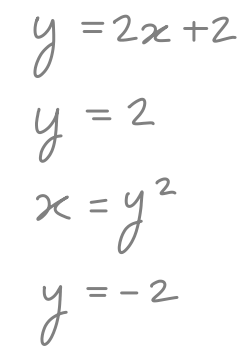
$$y = 2x + 2$$

$$y = 2$$

$$x = y^2$$

$$y = -2$$

$$\text{ה'תת"ג מ"ח סיון ד'תש"ב} \iint_D y dx dy //$$

$$\int (\int y dx) dy \quad \text{הסדר}$$


$$\iint_D y \, dx \, dy = \int_{-2}^2 \left( y \int_{\frac{1}{2}(y-2)}^{y^2} dx \right) dy = \int_{-2}^2 y x \Big|_{x=\frac{y}{2}-1}^{x=y^2} dy = \int_{-2}^2 y \left( y^2 - \frac{y}{2} + 1 \right) dy = -\frac{1}{2} \int_{-2}^2 y^2 dy = -\frac{y^3}{6} \Big|_{-2}^2 = -\frac{8}{3}$$

$$a > 0$$

$$\int_0^a \left( \int_0^{a-\sqrt{a^2-x^2}} \frac{x e^y}{(y-a)^2} dy \right) dx$$

סימטריה מודגלת בגרסה.

לכן ניתן לנסות להשתמש בקואורדינטות קוטביות.

לכן צריך להוסיף את האינטגרל הכפול  $\iint_D \frac{x e^y}{(y-a)^2} dx dy$  על פני Fubini שזה לא נכון, נ"ל להוסיף את  $D$ .

$$(0 \leq x \leq a)$$

$$D \text{ מסומן ע"י עקומות: } y = a - \sqrt{a^2 - x^2}$$

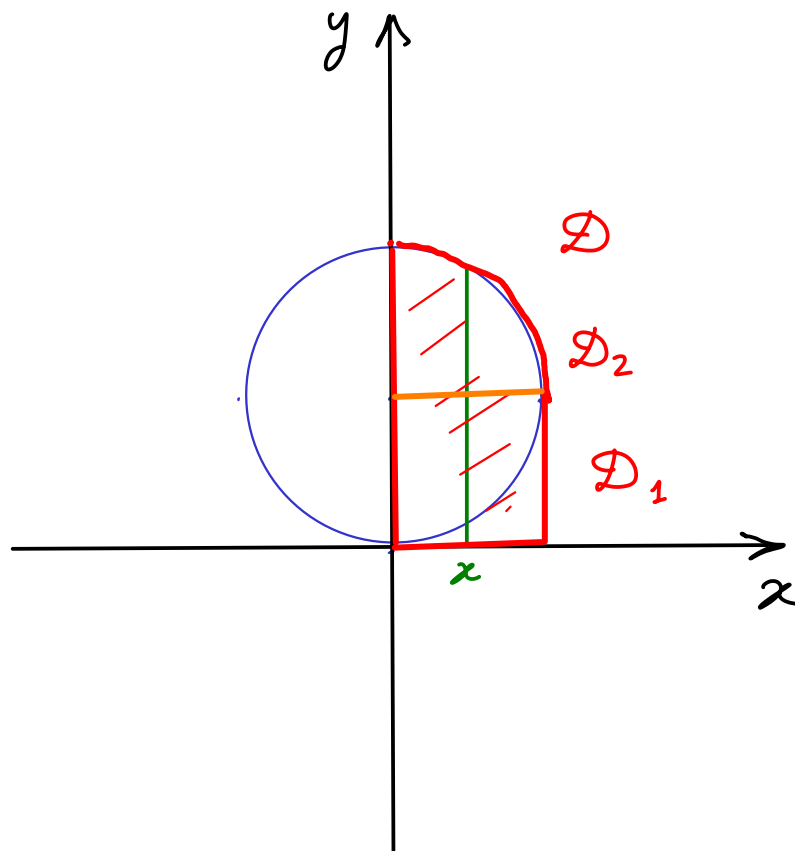
$$y = 0$$

$$\begin{cases} (a-y)^2 = a^2 - x^2 \\ 0 \leq y \leq a \end{cases}$$

$$a - y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$x^2 + y^2 = 2ay$$

$$x^2 + (y-a)^2 = a^2$$



$$\begin{cases} \cancel{a^2} - 2ay + y^2 = \cancel{a^2} - x^2 \\ a - y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$a > 0 \quad \int_0^a \left( \int_0^{a-\sqrt{a^2-x^2}} \frac{x e^y}{(y-a)^2} dy \right) dx$$

$$\iint \frac{r \cos \theta e^{r \sin \theta}}{r^2} r dr d\theta$$

$$\int r(e^t - 1) dr$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = a + r \sin \theta$$

$$\begin{matrix} e^t \\ e^{r \sin \theta} \end{matrix}$$

$$0 \xrightarrow{x} a$$

$$0 \xrightarrow{y}$$

$$\int_0^a \int_0^{a-\sqrt{a^2-x^2}} \frac{x e^y}{(y-a)^2} dy dx$$

$$\int_0^a \left( \frac{e^y}{(y-a)^2} \int_0^{a-\sqrt{a^2-x^2}} x dx \right) dy =$$

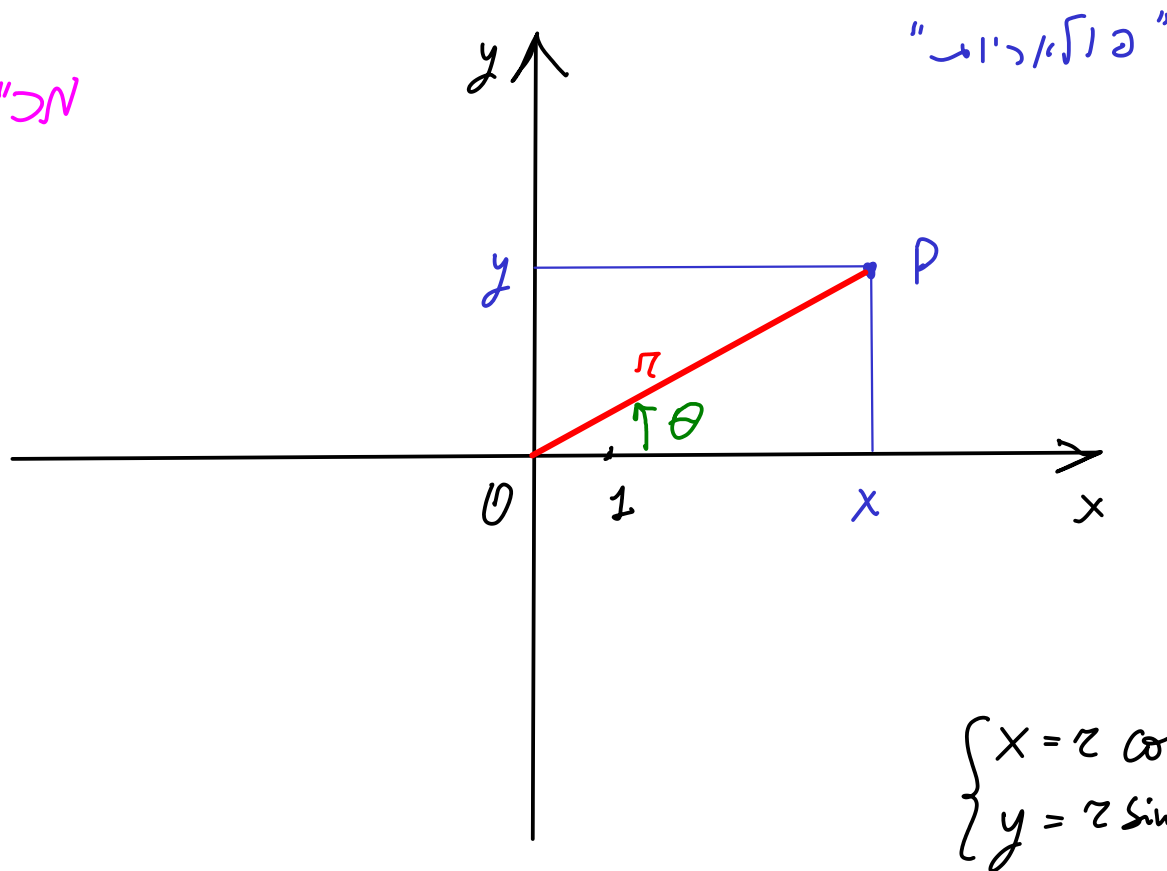
$$\underline{\underline{r \cos \theta e^{r \sin \theta}}}$$

$$t = r \sin \theta$$



# אזכור כפול ב קואורדינטות קוטביות

מכ"מ



$$P(x, y) \leftrightarrow P(r, \theta)$$

גבולות  $\theta$  ו- $r$  הם  $0 \leq r < \infty$  ,  $0 \leq \theta < 2\pi$

0 - "זווית"

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (+ \pi)$$

אם  $f(x, y)$  אינו 0 יש סימטריה מוחלטת,

משתנה  $\rightarrow (z, \theta)$ .

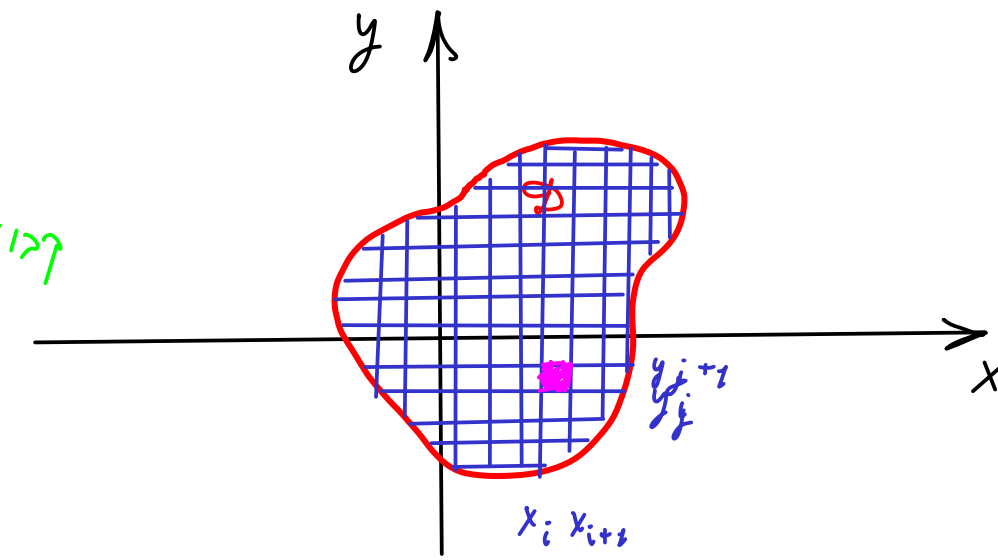
$$\iint_D f(x,y) dx dy$$

$$\underline{S} := \lim_{i,j} \sum m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

$$\overline{S} := \lim_{i,j} \sum M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

הקווים הריבועיים:  
 $x = \text{const}$   
 $y = \text{const}$

קבוצה



נכנסים אל  $\iint_D f(x,y) dx dy$   
 במשתנים  $z, \theta$

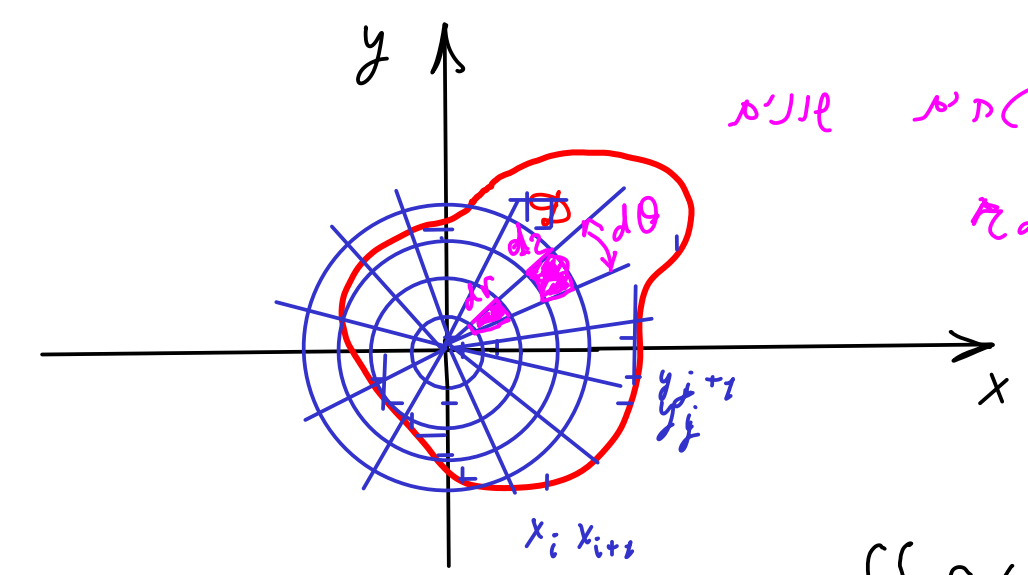
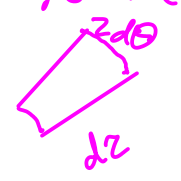
צרכים: קווים  $z = \text{const}$  מעגלים עם מרכז במחצית הראשונה  
 $\theta = \text{const}$  ישרים (קרניים) יוצאים מ-0

משתנה  $z$

האורך של רצף הקוים:  $z d\theta$

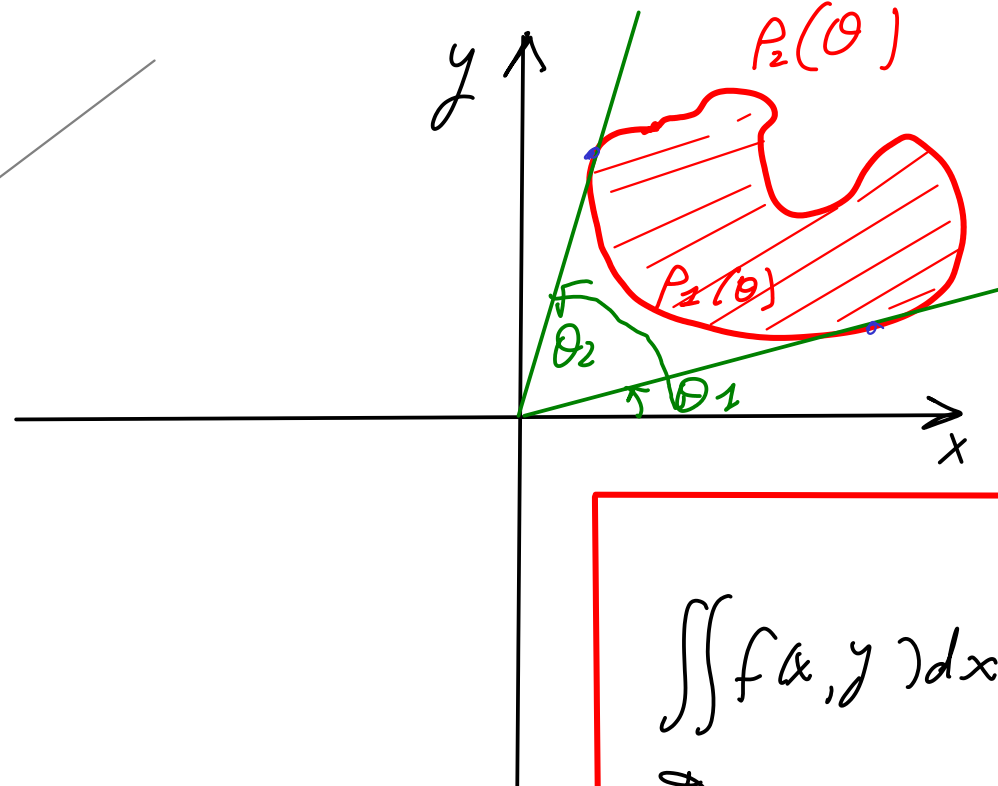
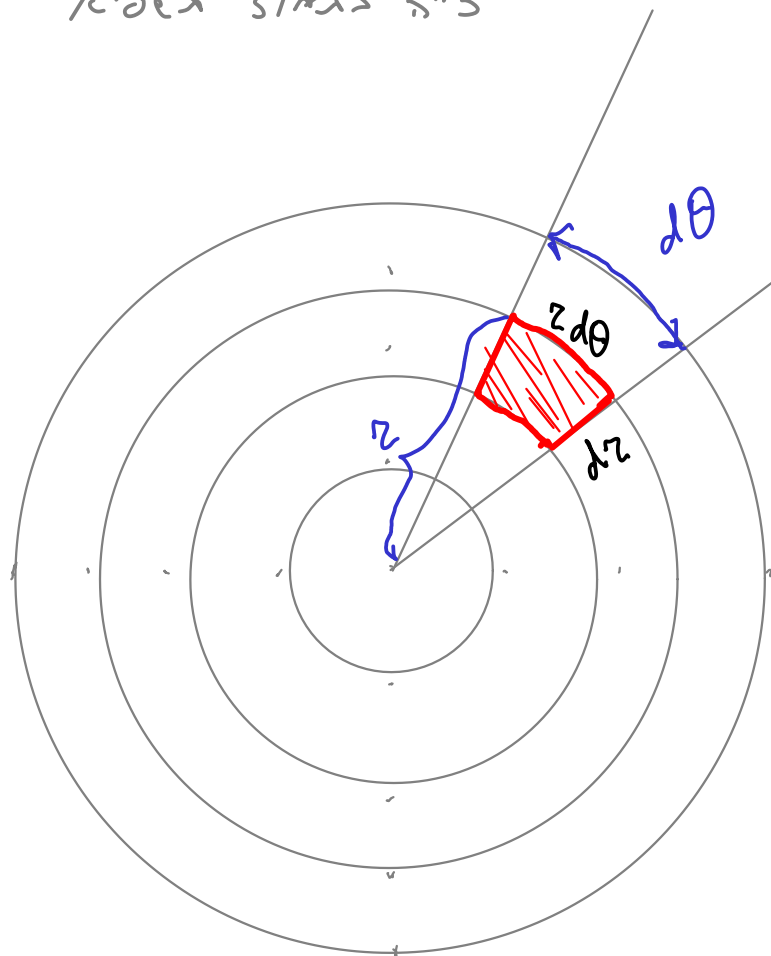
העברת  $z$  אל תוך  $dz$ :

$dz \cdot z d\theta$



$$\iint_D f(z \cos \theta, z \sin \theta) z dz d\theta$$

כ"ה במגן אפרים



הערה:  $z = r e^{i\theta}$

הערה

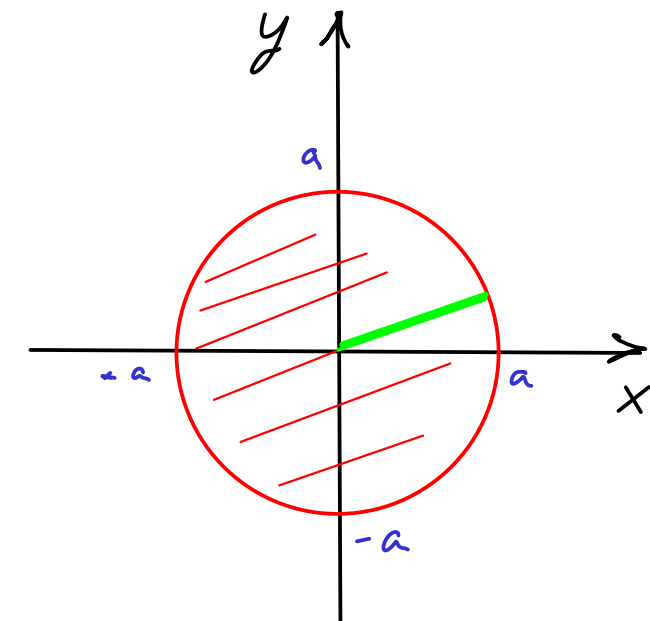
$$dx dy = r dr d\theta$$

האינטגרל  $\int_D f(x,y) dx dy$  הוא האינטגרל של  $f$  על  $D$ .

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left( \int_{P_1(\theta)}^{P_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \right) d\theta$$



1

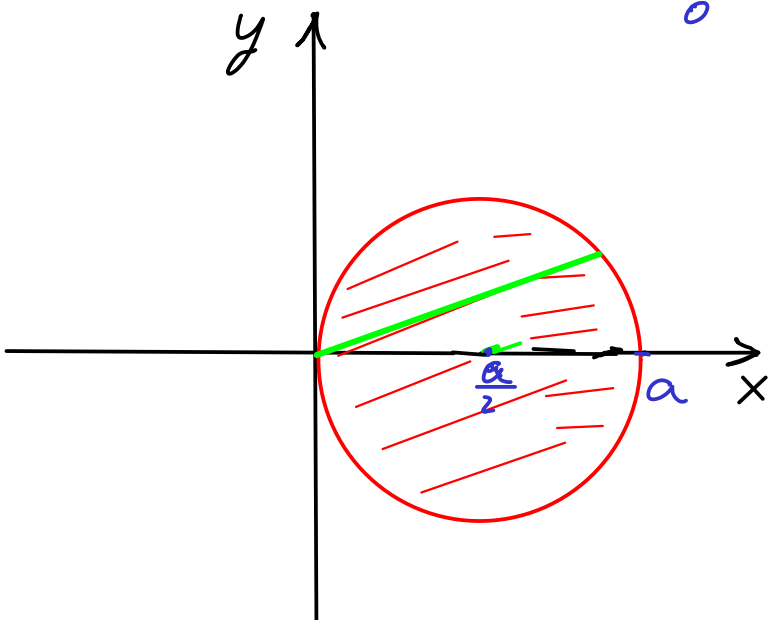


$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \cos(x^2+y^2) dx dy =$$

(a &gt; 0)

$$= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^a \cos(z^2) \cancel{z} dz \right) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^a \cos(z^2) \cancel{z} dz = \left\{ \begin{array}{l} t := z^2 \\ dt = 2z dz \\ 0 \leq t \leq a^2 \end{array} \right\} =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{a^2} \cos t dt = \pi \sin t \Big|_0^{a^2} = \pi \sin(a^2)$$



$$\iint_{x^2+y^2 \leq ax} \frac{x^2}{x^2+y^2} dx dy \quad (\text{=})$$

(a &gt; 0)

2

$$x^2+y^2 = ax \quad \left( x^2 - ax + \frac{a^2}{4} \right) + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\left( x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 = \left( \frac{a}{2} \right)^2$$

$$x = z \cos \theta$$

$$y = z \sin \theta$$

$$\textcircled{11} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{a \cos \theta} \frac{\cancel{z^2} \cos^2 \theta}{\cancel{z^2}} z dz \right) d\theta =$$

$$x^2 + y^2 = a x$$

$$z^2 = a z \cos \theta \Rightarrow z = a \cos \theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \left( \int_0^{a \cos \theta} z dz \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^{a \cos \theta} d\theta =$$

$$d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \cdot \frac{a^2 \cos^2 \theta}{2} d\theta =$$

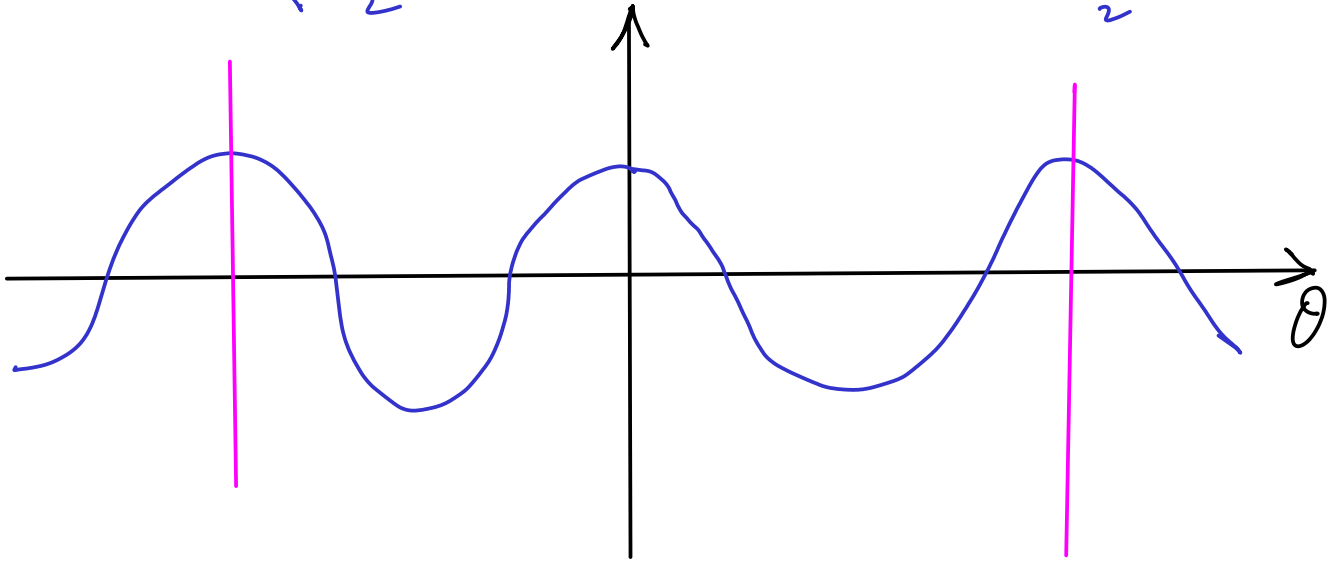
$$= \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \textcircled{=}$$

$$\cos^4 \theta = (\cos^2 \theta)^2 = \left( \frac{1}{2} (\cos(2\theta) + 1) \right)^2 =$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$= \frac{1}{4} (\cos(2\theta) + 1)^2 = \frac{1}{4} (\cos^2(2\theta) + 2\cos(2\theta) + 1) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} (\cos(4\theta) + 1) + 2\cos(2\theta) + 1 \right)$$

$$\textcircled{=} \frac{a^2}{2} \left( \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8} \cos(4\theta) d\theta}_{=0} + \frac{3}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\theta) d\theta}_{=0} \right) = \frac{3}{8} \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8} \pi$$



substitution

$$\int_{\substack{\theta \\ x(u)}}^{\substack{x \\ \theta}} f(x) dx = \int_{\substack{\theta \\ u}}^{\substack{x \\ u}} f[x(u)] \left| \frac{\partial(x)}{\partial(u)} \right| du$$

where  $u$  is a new variable

הפונקציה  $e^{-x^2}$

Poisson  $\int e^{-x^2} dx$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\text{ש/כ, } I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

הפונקציה

$$I^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy =$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \right) d\theta = 2\pi \left( -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^{\infty} = \pi$$

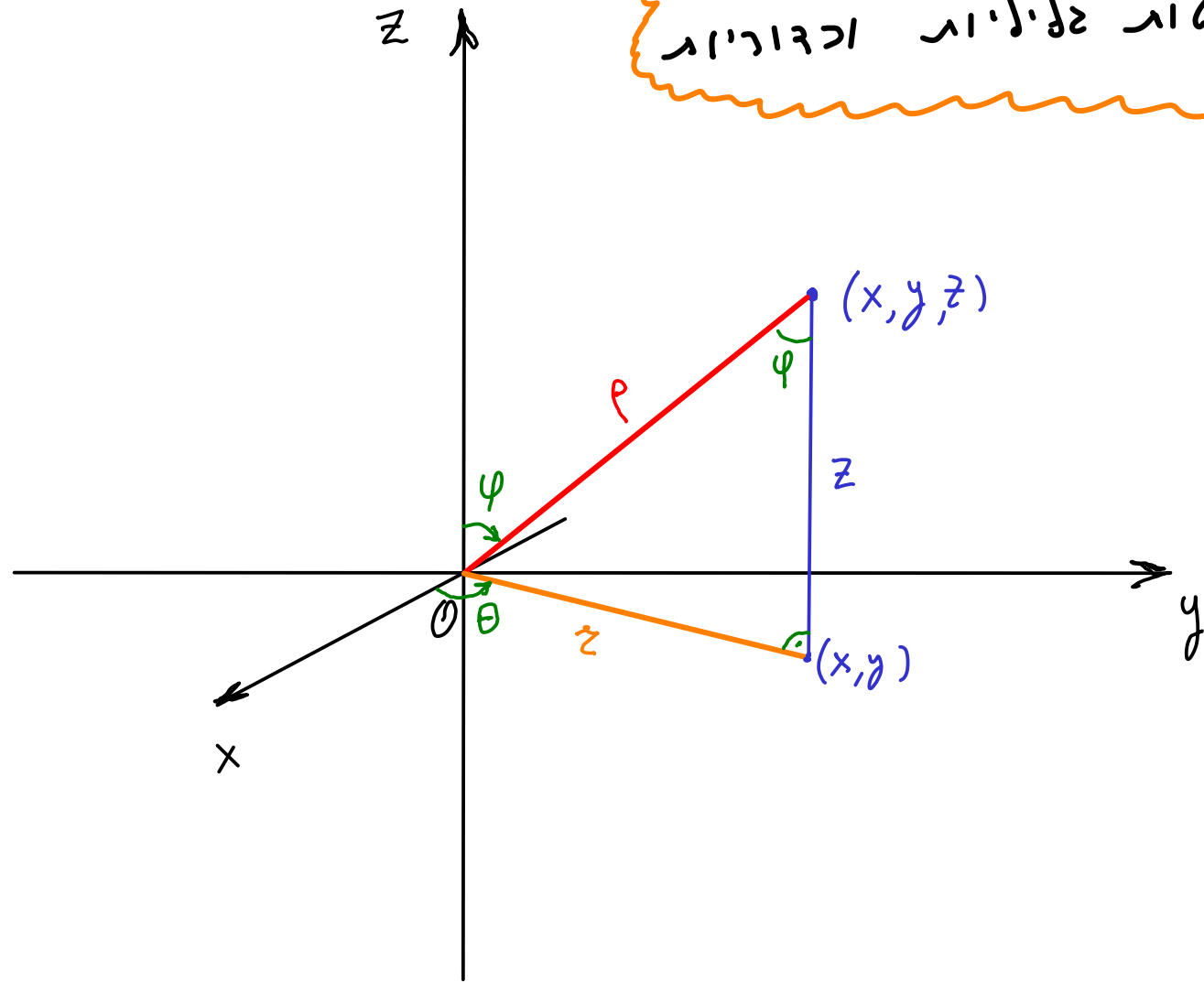
$$\Rightarrow I = \sqrt{\pi}$$

הפונקציה  $\int e^{-x^2} dx$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

הפונקציה

קואורדינטה זעיליאר וכדוריות



$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

קואורדינטה וכדוריות  $(\rho, \theta, \varphi)$

$$\pi \leftrightarrow 180^\circ$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \varphi \end{aligned}$$

יסקודיאל:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = -\rho^2 \sin \varphi$$

קואורדינטה זעיליאר  $(r, \theta, z)$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cdot \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cdot \sin \theta & \rho \sin \varphi \cdot \cos \theta & \rho \cos \varphi \cdot \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2 \left( \cos \varphi \begin{vmatrix} -\sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cdot \sin \theta \end{vmatrix} - \sin \varphi \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \sin \varphi \cos \theta \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \rho^2 \left( \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \begin{vmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} - \sin \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \rho^2 (-\cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi - \sin^3 \varphi) = -\rho^2 \sin \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = -\rho^2 \sin \varphi$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -z \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & z \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -z \sin \theta \\ \sin \theta & z \cos \theta \end{vmatrix} = z$$

$$\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$$

$$\begin{aligned} x &= z \cos \theta \\ y &= z \sin \theta \\ z &= z \end{aligned}$$

1

# החלפת משתנים

$$\iiint_B f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{\tilde{B}} \tilde{f}(u,v,w) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du dv dw$$

$$(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{pmatrix}$$

התחום החדש

$$u := x$$

$$v := y - z$$

$$w := xy$$

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & 0 \end{vmatrix} = x$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}} = \frac{1}{x} = \frac{1}{u}$$

$$\iiint_B (z-y)^2 dx dy dz =$$

$\partial B$ :

$$x = 2$$

$$x = 4$$

$$z = y \quad z - y = 0$$

$$z = y + 1 \quad z - y = 1$$

$$xy = 3$$

$$xy = 6$$

התחום החדש (1)

$$2 \leq x \leq 4 \Rightarrow x > 0$$

$$dx dy dz \mapsto \frac{1}{u} du dv dw \quad : \text{כאן}$$



$$(z-y)^2 = v^2$$

$$z-y = v$$

$$: u, v, w \text{ ג'יגה בדרגה } (z-y)^2 \text{ מניס } (2)$$

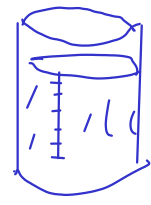
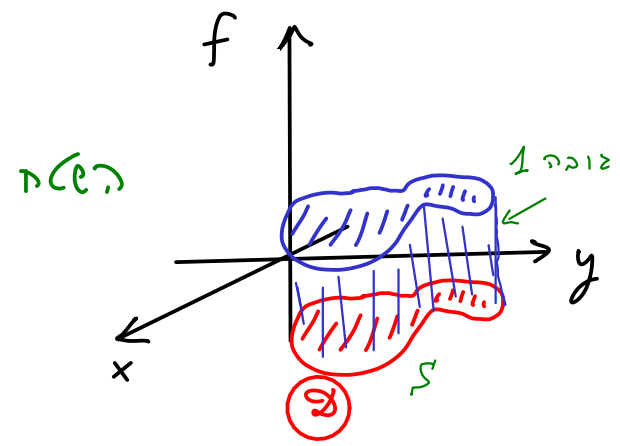
$$!! \quad u, v, w \text{ ג'יגה בדרגה } \begin{cases} 2 \leq u \leq 4 \\ 0 \leq v \leq 1 \\ 3 \leq w \leq 6 \end{cases}$$

$$: \tilde{B} \text{ מניס } (3)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{=} \iiint_{\tilde{B}} v^2 \cdot \frac{1}{u} du dv dw &= \int_2^4 \frac{1}{u} du \cdot \int_0^1 v^2 dv \cdot \int_3^6 dw = \ln|u| \Big|_2^4 \cdot \frac{v^3}{3} \Big|_0^1 \cdot w \Big|_3^6 = (\ln 4 - \ln 2) \cdot \frac{1}{3} \cdot (6-3) = \\ &= (2 \ln 2 - \ln 2) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = \underline{\underline{\ln 2}} \end{aligned}$$

# לשם חישוב נפח

$$f(x,y,z) \equiv 1$$



$$V = S \cdot 1 = S$$

נפח  $S = V$

לשם חישוב

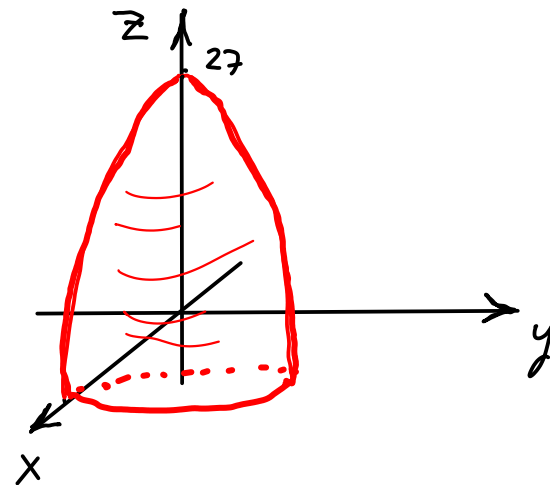
$$S(D) = \iint_D dx dy$$

נפח:  $f(x,y) \equiv 1$  / כ

נפח:  $V(B) = \iiint_B dx dy dz$

כאילו / נפח

$$z = 27 - 2(x^2 + y^2)$$

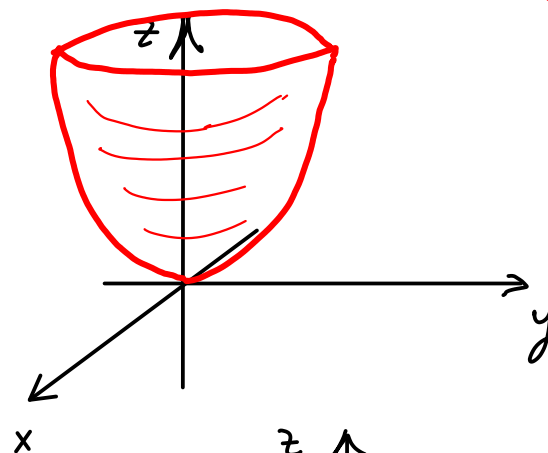


הנפח של (כנסת)  $f(x,y,z) \equiv 1$

$$V(B) = \iiint_B dx dy dz =$$

$$= \iint_D \left( \int_{x^2+y^2}^{27-2(x^2+y^2)} dz \right) dx dy =$$

$$z = x^2 + y^2$$



$$z = x^2 + y^2$$

$$z = 27 - 2x^2 - 2y^2$$

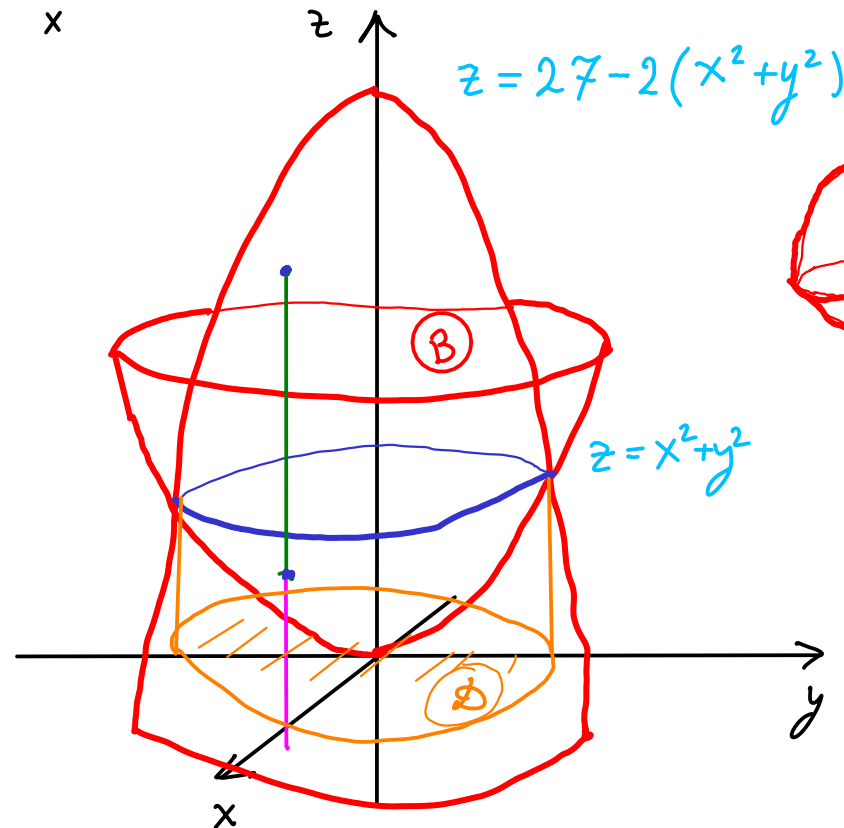
$$z = -2(x^2 + y^2) + 27$$

החיבור של הפרבולות:

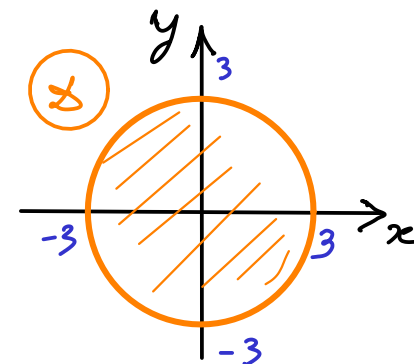
$$x^2 + y^2 = 27 - 2(x^2 + y^2)$$

$$3(x^2 + y^2) = 27$$

$$x^2 + y^2 = 9$$



$$D: x^2 + y^2 \leq 9$$



$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 9} [27 - 2(x^2+y^2) - (x^2+y^2)] dx dy = 27 \iint_{x^2+y^2 \leq 9} dx dy - 3 \iint_{x^2+y^2 \leq 9} (x^2+y^2) dx dy = 27 \cdot 9\pi - 3 \int_0^{2\pi} \left( \int_0^3 r^2 r dr \right) d\theta =$$

העגול  
הוא  
עם רדיוס 3  
הוא 9π

העגול  
הוא  
בקוארטנאלי  
קוארטנאלי !!  
112 ח

$$= 9\pi - 3 \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^3 r^3 dr = 273\pi - 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{3^4}{4} = 273\pi - \frac{243}{2}\pi = \underline{\underline{\frac{243}{2}\pi}}$$

$$\int \varphi(x) dx$$



האינטגרל הקווי מסומן ב'

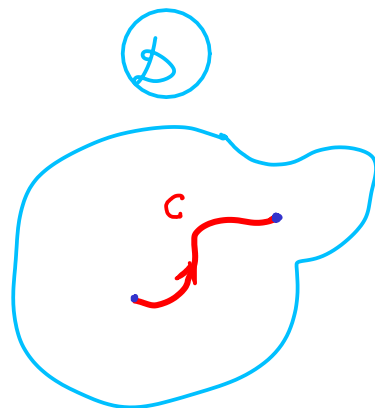
$$\int_a^b \varphi(x) dx$$



האינטגרל הקווי מסומן ב'

(אינטגרל קווי של פונקציה סקלרית)

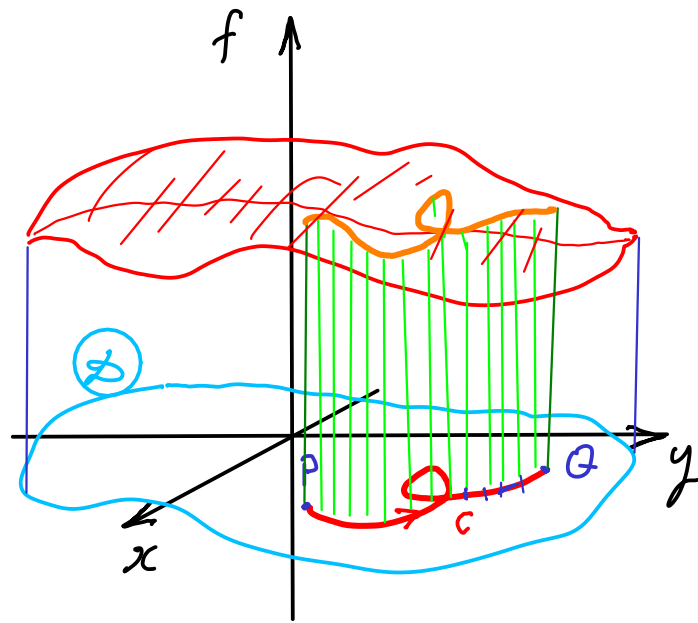
האינטגרל הקווי מסומן ב'



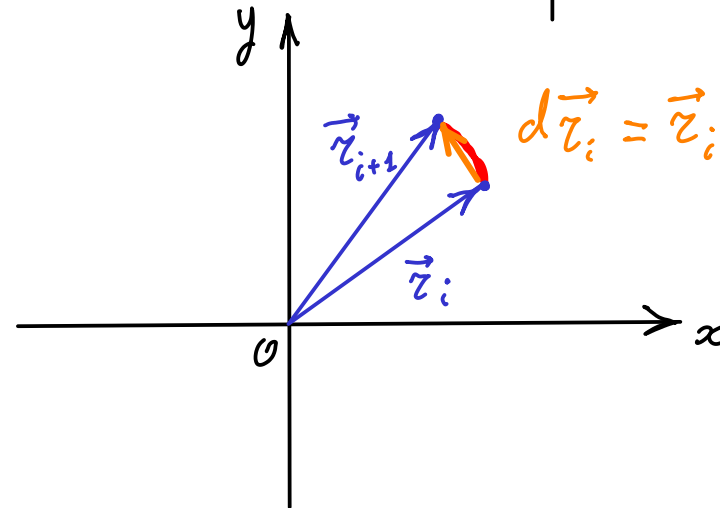
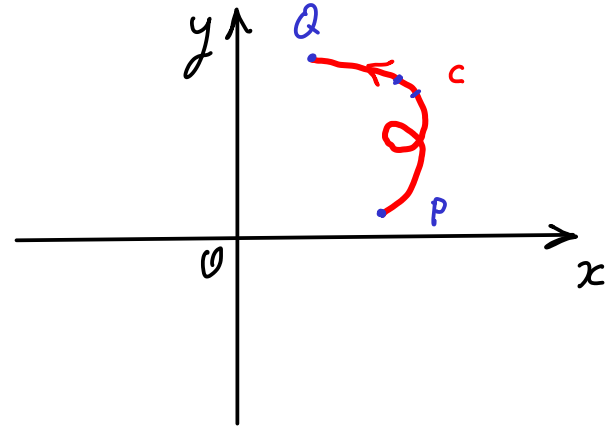
נתונים:  $\gamma$  קטע  $C$  של קו עקום

$C \subset D$   $f(x, y)$  מחזור בתחום מכיל את  $C$

$\gamma$  כיוון  $C$  -



$$\int_c f(x, y) \|d\vec{z}\|$$



$$d\vec{z}_i = \vec{z}_{i+1} - \vec{z}_i$$

$$ds := \|d\vec{z}\|$$

$\|d\vec{z}\|$  : הורק

$f(x, y) \|d\vec{z}\|$  : סכום הנצטרך

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

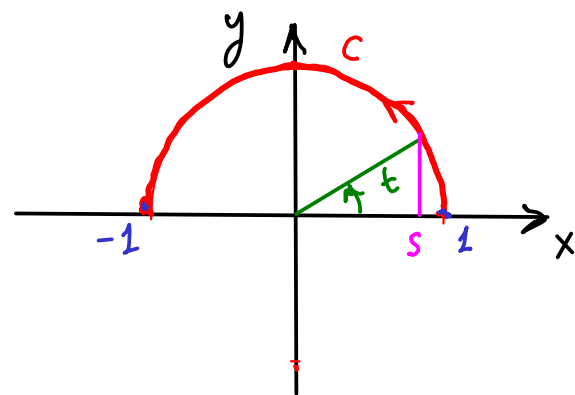
$$\int_C f(x,y) \|d\vec{z}\| \quad \text{ח'עוב סע}$$

3 זיך אגחור במחז'ים  $\gamma(t)$  על  $C$ .

1) במחז'ים  $C$  קיי  $N$  זיך ח'עוב סע

$$0 \leq t \leq \pi \quad \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$-1 \leq s \leq 1 \quad \gamma_2(s) = \left( \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} \right)$$



$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{במחז'ים על } C$$

$$\text{Im } \gamma = C$$

1

ע'ס'יה בק'ס  $[a,b]$  זיך  $x(t), y(t)$  זיך ח'עוב סע  $(a,b)$

2

ע'ס'יה  $\gamma$   $[a,b] \rightarrow C$  במחז'ים סע  $N$  זיך ח'עוב סע

3

א'ס'יה במחז'ים  
ע'ס'יה  $C$

$$\dot{\gamma} := \frac{d\gamma}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$



$$dr = d\gamma = \dot{\gamma} dt$$

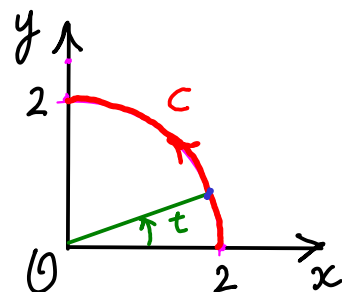
ס'ע

$$\|dr\| = \|\dot{\gamma}\| dt$$

$$\int_a^b f(x(t), y(t)) \|\dot{\gamma}\| dt \quad \text{כ} \quad \int_C f(x, y) \|dr\| \quad \text{אם ניתן להעביר את}$$

מה יקרה אם נבחר  $\gamma(t)$  אחרת!?

משפט המסבר  $\int_a^b (f \circ \gamma)(t) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$  אינו תלוי ב- $\gamma$  אלא ב- $C$  בלבד.



① אם  $\gamma$  היא הישר  $\int_C (x+y^2) \|dr\|$  לאורך המסלול  $C$ :

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2 \cos t + (2 \sin t)^2] 2 dt =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \pi = \underline{\underline{2 + \pi}}$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}$$

נקודת כניסה

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix}$$

$$x(t) = 2 \cos t$$

$$y(t) = 2 \sin t$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{(-2 \cos t)^2 + (2 \sin t)^2} = 2$$

$$\|dr\| = \|\dot{\gamma}(t)\| dt = 2 dt$$



$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

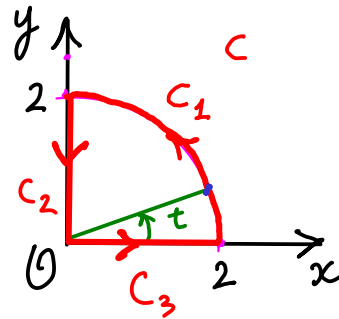
$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$2 \sin^2 t = 1 - \cos(2t)$$

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2t)) \, dt = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) \, dt = \pi - \left( 2 \cdot \frac{1}{2} \sin(2t) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

$$: 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt \text{ חישוב נוסף}$$

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \quad : \text{חיבור}$$



$$\oint_C (x + y^2) \, ds \text{ חישוב נוסף}$$

$$ds = \|dz\|$$

$$\oint_C (x + y^2) \, ds = \int_{C_1} (x + y^2) \, ds + \int_{C_2} (x + y^2) \, ds + \int_{C_3} (x + y^2) \, ds$$

(חישוב נוסף)

$$\int_{C_1} (x + y^2) \, ds = 2 + \pi$$

$$C_2: \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$C_3: \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 2$$

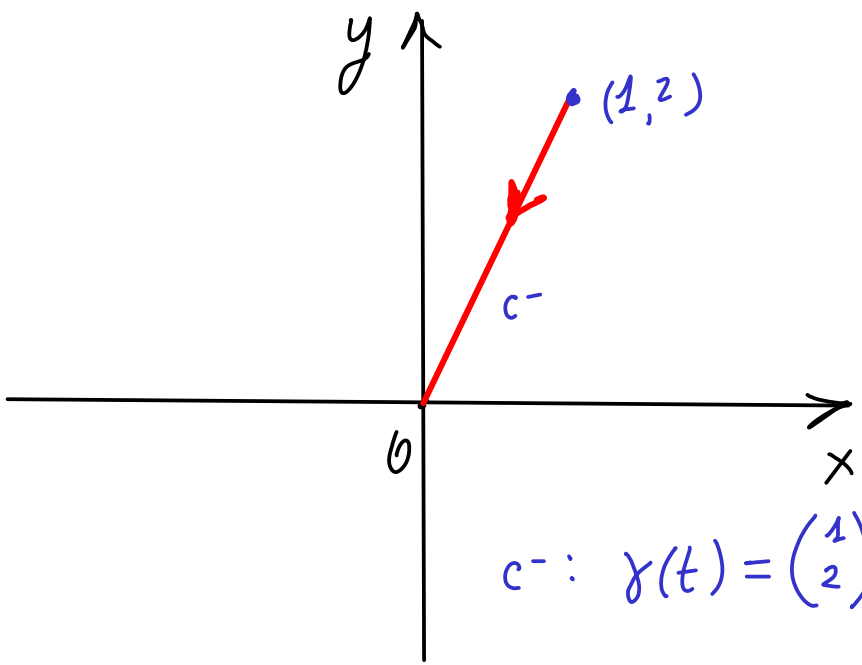
$$\int_{C_2} (x+y^2) ds = \int_0^2 [0 + (2-t)^2] \cdot 1 \cdot dt = \int_0^2 (t-2)^2 dt = \frac{(t-2)^3}{3} \Big|_0^2 = -\frac{(-2)^3}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\int_{C_3} (x+y^2) ds = \int_0^2 (t + 0^2) \cdot 1 \cdot dt = \int_0^2 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^2 = 2$$

$$\oint_C (x+y^2) ds = 2 + \pi + \frac{8}{3} + 2 = \frac{20}{3} + \pi$$

$$\dot{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \|\dot{\gamma}_2\| = 1$$

$$\dot{\gamma}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \|\dot{\gamma}_3\| = 1$$



$$c^-: \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t$$

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

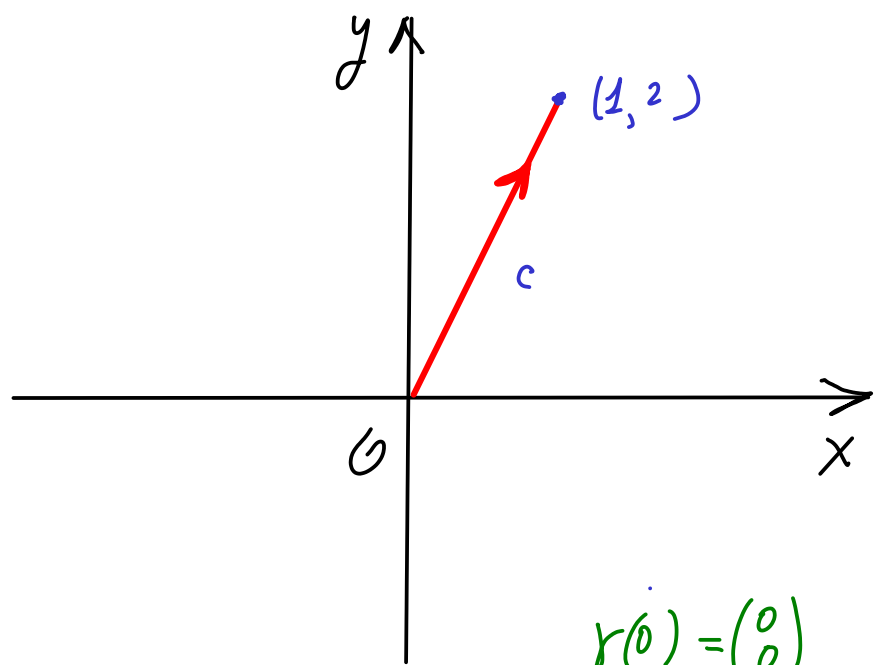
$$x(t) = 1 - t$$

$$y(t) = 2(1 - t)$$

$$(0 \leq t \leq 1)$$

$$\dot{x}(t) = -1$$

$$\dot{y}(t) = -2$$



$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(0 \leq t \leq 1) \quad c: \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$x(t) = t$$

$$y(t) = 2t$$

$$\dot{x}(t) = 1$$

$$\dot{y}(t) = 2$$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\int_a^b \varphi(x) dx = - \int_b^a \varphi(x) dx$$

$$\int_c (x+y) ds \text{ נ"ח } \textcircled{2}$$

$(1,2) \text{ ו- } (0,0) \text{ בין } c \text{ ו- } \gamma$

בזמן ש'3' נרשם

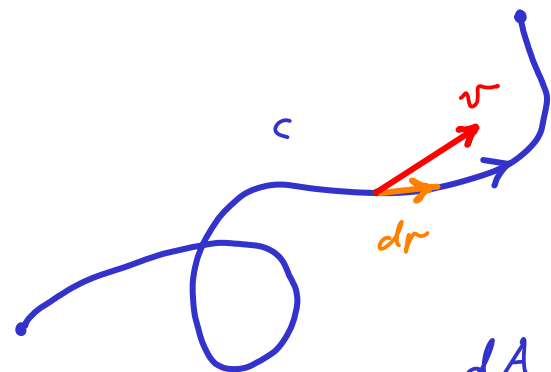
$$\begin{aligned} \int_C (x+y) ds &= \\ &= \int_C f(x,y) ds = \int_C f(x,y) \|dz\| = \int_0^1 f(x(t), y(t)) \|\dot{y}(t)\| dt = \int_0^1 f(t, 2t) \sqrt{1^2 + 2^2} dt = \sqrt{5} \int_0^1 (t + 2t) dt = 3\sqrt{5} \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C (x+y) ds &= \int_0^1 f(1-t, 2-2t) \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| dt = \sqrt{5} \int_0^1 [(1-t) + (2-2t)] dt = \sqrt{5} \int_0^1 (3 - 3t) dt = \\ &= \sqrt{5} 3 \left( t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 3\sqrt{5} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

(הצגת הצורה של  $\int_C$  וקוויים)

מרחב זמן קוויים 210N ב'

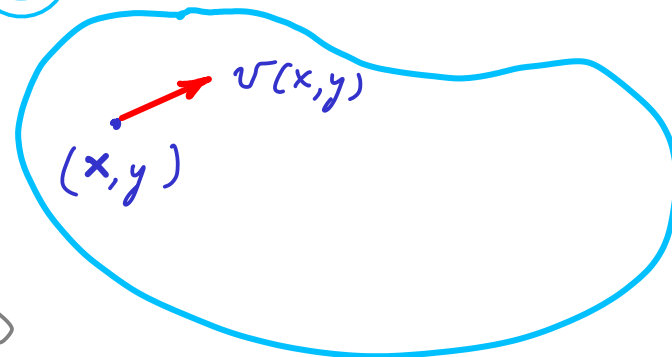
שדה וקטורי בהחום  $D = 2$  באמצעות:



$$dA = \langle v, dr \rangle$$

$$A = \int_C \langle v, dr \rangle$$

$D$



$$v(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle v, dr \rangle &= v \cdot dr \\ &= (v, dr) \end{aligned}$$

נניח  $\gamma(t)$  בהתאמה כזו  $(a \leq t \leq b)$

$$(v \circ \gamma)(t) = \begin{pmatrix} P(x(t), y(t)) \\ Q(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$dr = \dot{\gamma}(t) dt = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} dt$$

3"02

$$\gamma(t) \text{ על קווי גזירה } \int_a^b \left( P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \right) dt \text{ מ"10N } \int_2(1/2) \text{ } \underline{\underline{\text{Coen}}}$$

$$\int_c \langle v, dr \rangle = \int_a^b \left( P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \right) dt \quad \underline{\underline{\text{Coen}}}$$

$$\int_c \langle v, dr \rangle = \int_a^b \langle v \circ \gamma, \dot{\gamma} \rangle dt = \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} P(x(t), y(t)) \\ Q(x(t), y(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt =$$

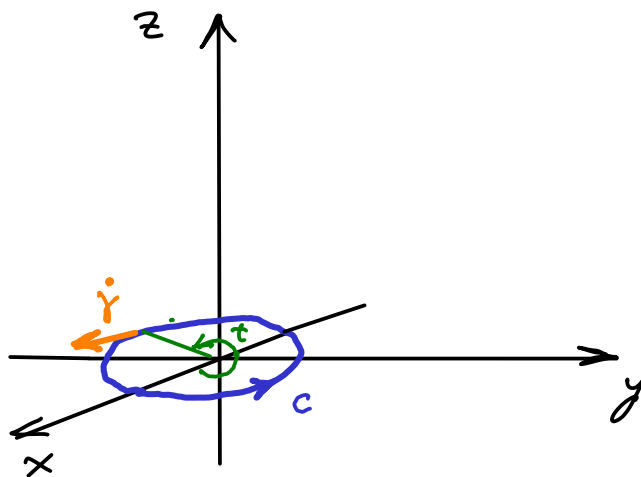
$$= \int_a^b \left( P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \right) dt$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F \cdot \dot{\gamma} = -\sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t + 0 \cdot 0 = 1$$

$$\oint_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} dt = \underline{\underline{2\pi}}$$



$$C: x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

$$z = 0$$

$$F(x, y, z) = -y \vec{i} + x \vec{j} \quad \text{also} \quad \int_C F \cdot dr \quad (1)$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \cos t$$

$$y(t) = \sin t$$

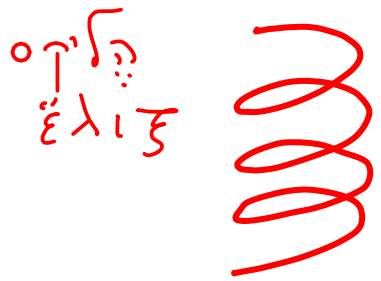
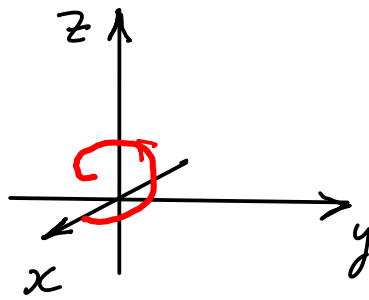
$$z(t) = 0$$

$$\gamma_1(s) = \begin{pmatrix} s \\ \sqrt{1-s^2} \end{pmatrix}$$

$$0 \leq s \leq \pi$$

$$\gamma_2(s) = \begin{pmatrix} s \\ -\sqrt{1-s^2} \end{pmatrix}$$

$$0 \leq s \leq \pi$$



$$\int_C \langle F, dr \rangle = ?$$

$$F(x, y, z) = y\vec{i} - x\vec{j} + \vec{k}$$

2

$$r(t) = \begin{pmatrix} \cos(t^3) \\ \sin(t^3) \\ \frac{t^3}{2\pi} \end{pmatrix}$$

וקצת מההיכונים:

$$\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} -3t^2 \sin(t^3) \\ 3t^2 \cos(t^3) \\ \frac{3t^2}{2\pi} \end{pmatrix}$$

$$C: \begin{cases} x(t) = \cos(t^3) \\ y(t) = \sin(t^3) \\ z(t) = \frac{t^3}{2\pi} \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \sqrt[3]{2\pi}$$

$$F = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle F, \dot{r} \rangle = -3 \cos(t^3) \cdot t^2 \cdot \sin(t^3) - 3 \sin(t^3) \cdot t^2 \cos(t^3) + \frac{3t^2}{2\pi}$$

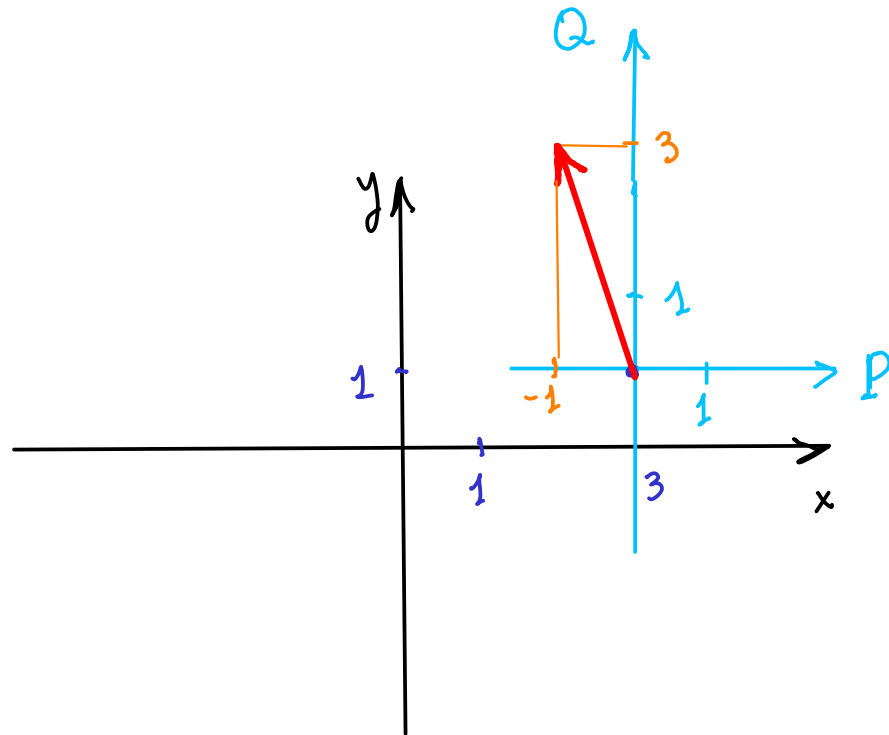
$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin(2\alpha)$$

$$\int_C \langle F, dr \rangle = -3 \int_0^{\sqrt[3]{2\pi}} \left( t^2 \sin(2t^3) + \frac{1}{2\pi} t^2 \right) dt = \frac{1}{2} \cos(2t^3) \Big|_0^{\sqrt[3]{2\pi}} - \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\sqrt[3]{2\pi}} = 0 - 1 = -1$$

$$\int t^2 \sin(2t^3) dt = \left\{ \begin{array}{l} u := 2t^3 \\ du = 6t^2 dt \end{array} \right\} = \frac{1}{6} \int \sin(u) du = -\frac{1}{6} \cos(u) + C = -\frac{1}{6} \cos(2t^3) + C$$



$$\mathbb{R}^2 \text{ כנסת } \mathbb{R}^2 \text{ ו-} \mathbb{R}^2 \text{ } F = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \text{ 'רצף וקטורי' } \textcircled{3}$$



$$F(3,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$



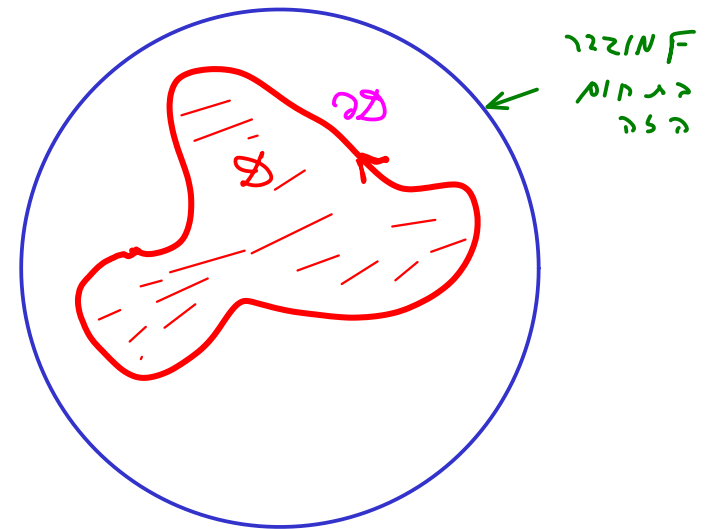
# Green's Theorem

עצם וקטורי  $F(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle = Pdx + Qdy$$

$$\int_C \langle F, dz \rangle$$

$n=2$

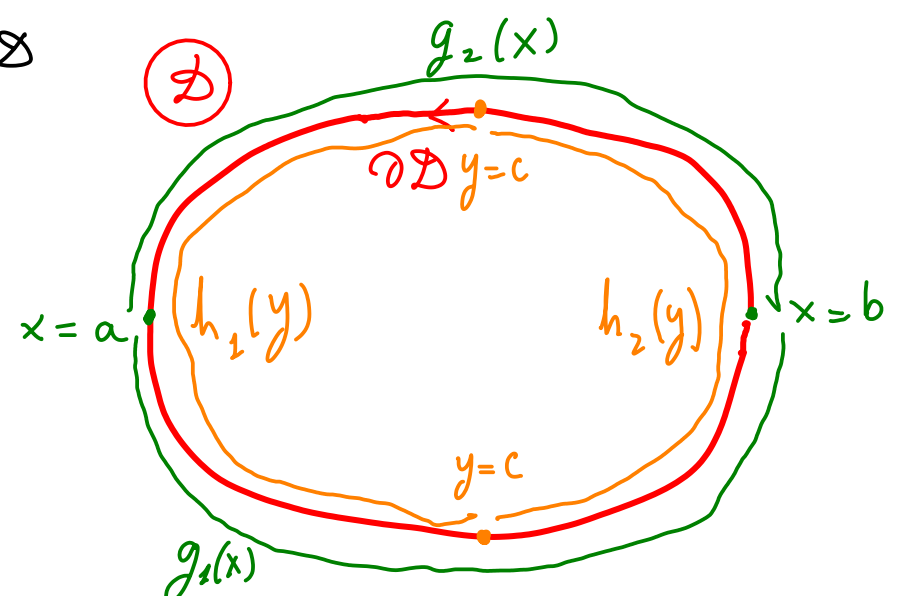


Green - Riemann's Theorem  
נניח  $P(x,y), Q(x,y)$  פונקציות רציפות במרחב  $D$ .

$$\oint_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

שדה וקטורי במרחב  $D$

כיוון חיובי  
שדה וקטורי



הוכחה: (1) נניח  $D$  בעל גבול רציף, אזי

לפי Fubini's Theorem:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \left[ \frac{\partial P}{\partial y} \right]_{g_1(x)}^{g_2(x)}$$

פונקציה  $P$  בהינתן  $\frac{\partial P}{\partial y}$  קבועה  
כפי שהמסלול  
הצורה של  $N \times N$

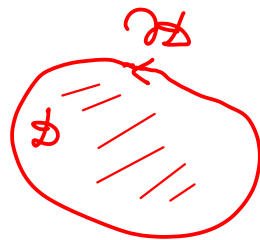
$$= \int_a^b P(x, y) \Big|_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dx = \int_a^b (P[x, g_2(x)] - P[x, g_1(x)]) dx =$$

$$C_1 \text{ is } \gamma_1: C_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ g_1(t) \end{pmatrix}$$

$$C_2 \text{ is } \gamma_2: C_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ g_2(t) \end{pmatrix}$$

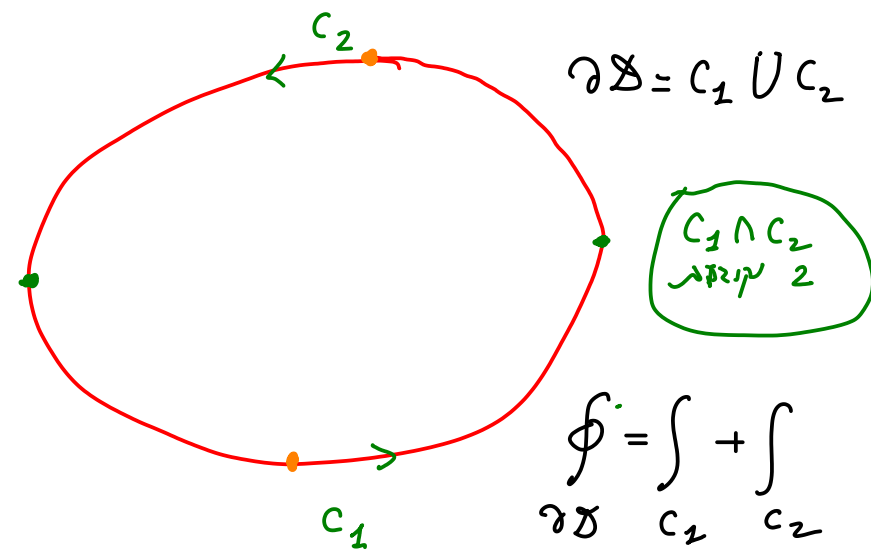
$$= \int_{C_2^-} P dx - \int_{C_1} P dx = - \int_{C_2} P dx - \int_{C_1} P dx = - \oint_{C_1 \cup C_2} P dx = - \oint_{\partial D} P dx$$

$$- \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_{\partial D} P dx$$

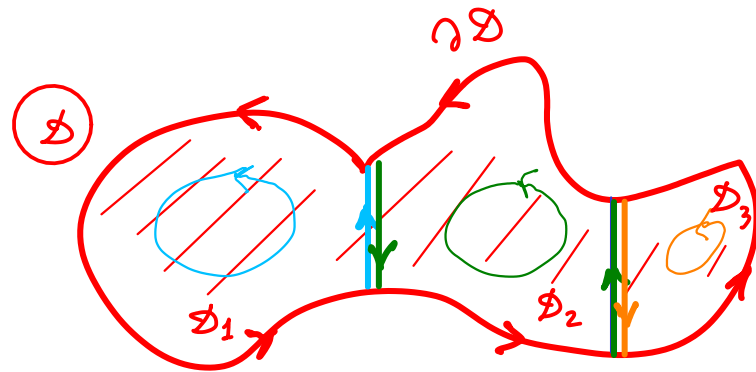


$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial D} Q dy \quad \text{p. 116 L1/L2 (2)}$$

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_{\partial D} Q dy + \oint_{\partial D} P dx = \oint_{\partial D} \langle F, dr \rangle \quad \text{p. 5}$$



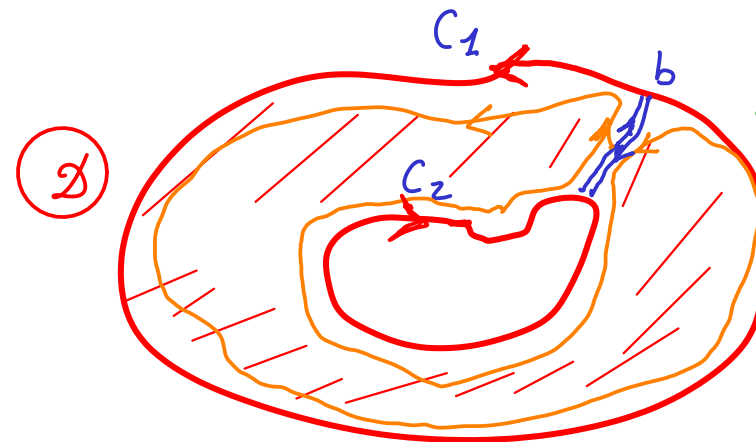
$$\oint_{\partial D} = \oint_{\partial D_1} + \oint_{\partial D_2} + \oint_{\partial D_3}$$



(3) אם  $D$  איז פשוט, איז  $\partial D$  הוא גבול של  $D$ :

$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3}$$

$$\int_b + \int_{b^-} = 0 \quad \text{אם } b \text{ חתך פנימי, גבולות הפנים:}$$



(4) אם  $D$  אינו פשוט:

$$\partial D = C_1 + C_2$$

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \oint_{C_1} P dx + Q dy + \oint_{C_2} P dx + Q dy$$

$$\oint_{\partial D} = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \int_b + \int_{b^-}$$

לע.

$$\oint_{\partial D} P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$F(x,y) = (x - \ln(x^2 + y^2)) \vec{i} + 2 \arctan \frac{y}{x} \vec{j} \Rightarrow \oint_C \langle F, dr \rangle \quad 13N \quad (1)$$

$$C: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$$

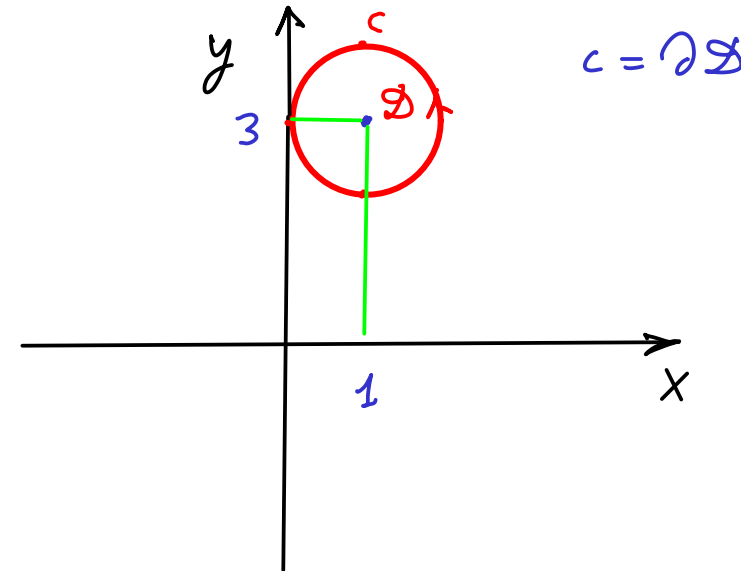
$$P(x,y) = x - \ln(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = - \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

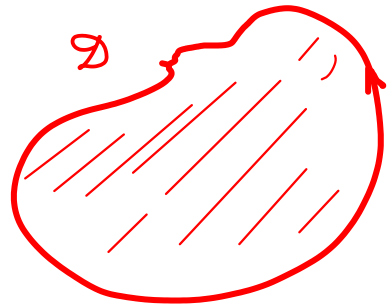
$$(\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2}$$

$$Q(x,y) = 2 \arctan \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2 \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -2 \frac{y}{x^2 \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)} = -2 \frac{y}{x^2 + y^2}$$



$$\Leftrightarrow \oint_{(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1} (x - \ln(x^2 + y^2)) dx + 2 \arctan \frac{y}{x} dy = \iint_{(x-1)^2 + (y-3)^2 \leq 1} \left( -\frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{2y}{x^2 + y^2} \right) dx dy = 0$$



$$\oint_{\partial D} x dy - y dx = \iint_D [1 - (-1)] dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2 \mathcal{L}(D)$$

$$F = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

②

$$P(x,y) = -y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 \Rightarrow \int_{\partial D} \langle F, dr \rangle = 2 \iint_D dx dy$$

$$Q(x,y) = x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

altern

$$\frac{1}{2} \oint_{\partial D} x dy - y dx = \mathcal{L}(D)$$

$$c: x^2 + y^2 = 4 \quad \text{also} \quad \oint_c (2y + \sqrt{9+x^3}) dx + (5x + e^{\arctan(y)}) dy \quad \textcircled{3}$$

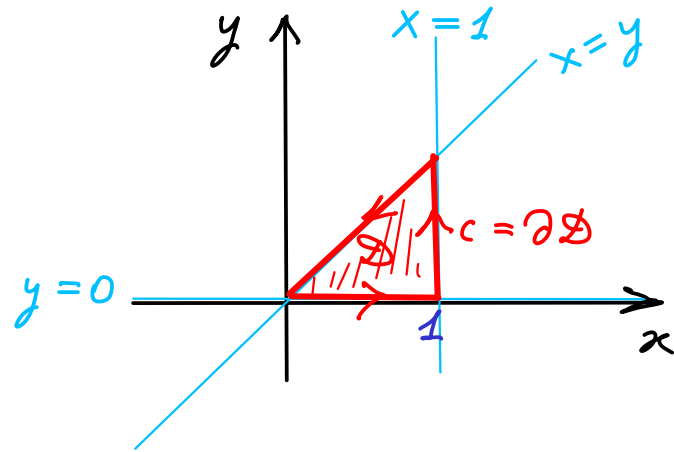
$$P(x,y) = 2y + \sqrt{9+x^3}$$

$$Q(x,y) = 5x + e^{\arctan(y)}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 5$$

$$\oint (2y + \sqrt{9+x^3}) dx + (5x + e^{\arctan(y)}) dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (5-2) dx dy = 3 \iint_{x^2+y^2 \leq 4} dx dy = 3\pi \cdot 2^2 = 12\pi$$



$c: x=1, y=0, x=y$  נקודות  $\oint_C ye^x dx + xe^y dy \stackrel{?}{=} \int \int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx dy$  (4)

$$P(x,y) = ye^x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x$$

$$Q(x,y) = xe^y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^y$$

$$\stackrel{?}{=} \iint_D (e^y - e^x) dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^x (e^x - e^y) dy \right) dx = \int_0^1 \left( e^x \int_0^x dy - \int_0^x e^y dy \right) dx = \int_0^1 [e^x(x-0) - (e^x - e^0)] dx =$$

↑ D

כלל גרין  
Green

כלל פוביני  
Fubini

$$= \int_0^1 (xe^x - e^x + 1) dx = (x-1)e^x - e^x + x \Big|_0^1 = -e + 1 - 1 - 1 + 0 = -e - 1$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int \underbrace{x}_u \underbrace{e^x}_{v'} dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + C$$

|    |   |                |    |
|----|---|----------------|----|
| u  | x | e <sup>x</sup> | v  |
| u' | 1 | e <sup>x</sup> | v' |

$$\oint_{\partial D} P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



$$\int f(x) dx = \{F(x) : F'(x) = f\}$$

$$F_1, F_2 \in \int f(x) dx$$

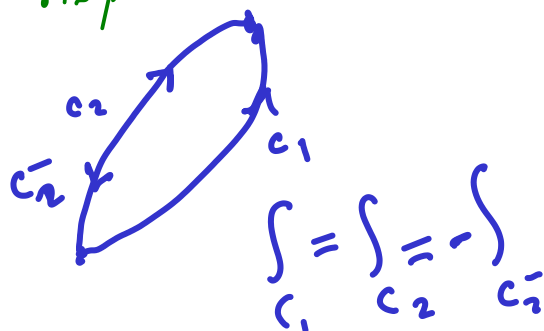
פונקציות

$$F_1(x) - F_2(x) = \text{const}$$

קבוע

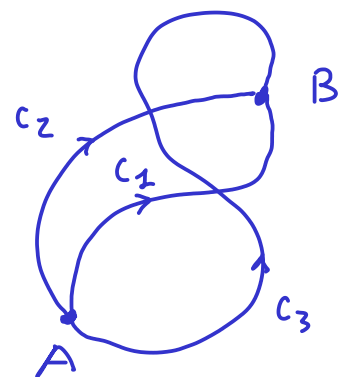
$$\oint = 0$$

$$c_1 \cup c_2$$



$$\int_{C_1} = \int_{C_2} - \int_{C_2^{-}}$$

$F$  פונקציה



$$\int_{C_1} \langle F, dr \rangle = \int_{C_2} \langle F, dr \rangle + \int_{C_3} \langle F, dr \rangle$$

עצם נמשך

$$F = \text{grad } \varphi : F(x, y) \text{ קיימים פונקציה } \varphi(x, y)$$

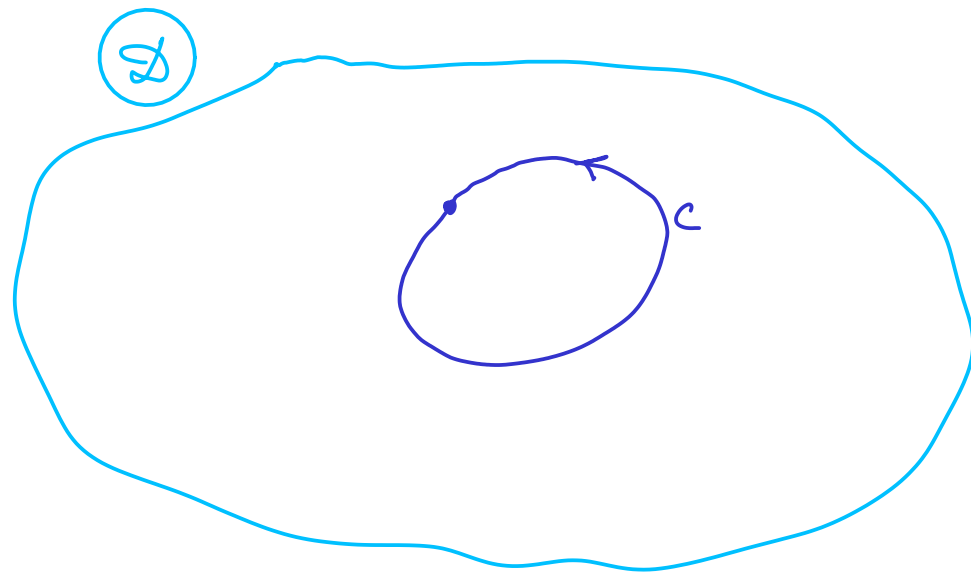
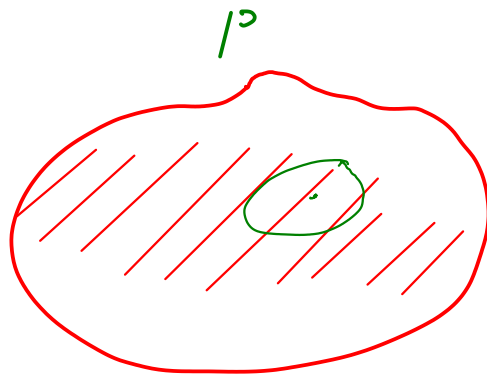
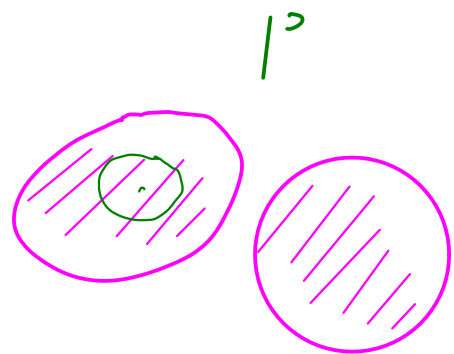
$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$$

התחביר פונקציה \$\varphi\$ זכירה.

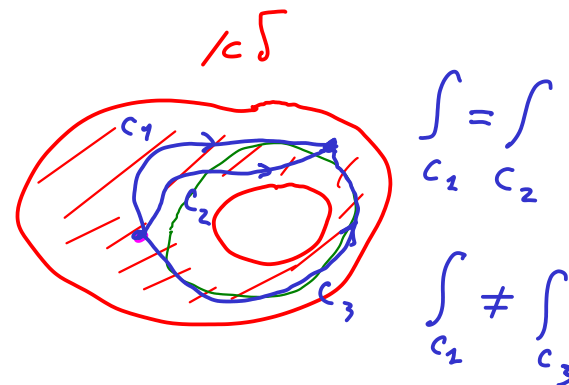
$$F := \nabla \varphi \text{ הבעה } \varphi \text{ פונקציה זכירה}$$

$$F \text{ פונקציה } \varphi \text{ קיים, } F \text{ נמשך}$$

$$\oint \langle F, dr \rangle = 0 \iff F \text{ פונקציה } \varphi \text{ קיים, } F \text{ נמשך}$$



||  
תחום פשוט קשר:



נניח  $F$  חזקת בגומם פשוט קשר

נניח  $F$  מסור

$$\oint_c \langle F, dr \rangle = 0$$

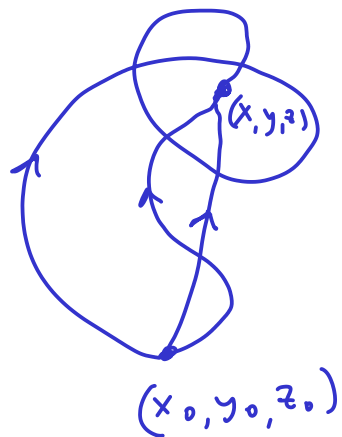
למה  $F$  מסור בגומם פשוט קשר  $\mathbb{D}$



$\oint_c \langle F, dr \rangle = 0$  עבור כל מסלול סגור  $c$   $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$  ונניח שיש לנו  $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$  אז נניח



$$F = \nabla \varphi$$

אם  $F$  נניח אז  $\varphi$  נקרא פוטנציאל?

$$\varphi(x,y,z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \langle F, dr \rangle$$

$$\nabla \varphi_2 = \nabla (\varphi_1 + c) = \nabla \varphi_1 + \nabla c = \nabla \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_1, \varphi_2 = \varphi_1 + c$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const} \Leftrightarrow \nabla \varphi_1 = \nabla \varphi_2 \quad \text{נניח}$$

$$n=2$$

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



עצם נשנה במשור

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Leftrightarrow \text{עצם } F \text{ הוא פוטנציאל} \quad \underline{\underline{\text{נכון}}}$$

(1) האם  $F$  היא פוטנציאל? (2) אם כן, מה היא הפונקציה?

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ 2-x \end{pmatrix} \quad (1)$$

(1) האם  $F$  היא פוטנציאל ב- $\mathbb{R}^2$ ?

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (2-x)'_x = -1$$

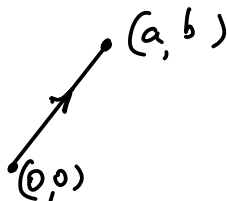
$$\frac{\partial P}{\partial y} = (x-y)'_y = -1 \Rightarrow \text{נכון } F.$$

$$\varphi(a,b) = \int_{(0,0)}^{(a,b)} (x-y) dx + (2-x) dy =$$

$$= \int_0^1 (at - bt) a dt + (2 - at) b dt =$$

(2) פתרון אנליטי:  $F$  היא פוטנציאל

$$0 \leq t \leq 1$$



$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} at \\ bt \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x(t) = at \\ y(t) = bt \end{matrix} \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \dot{x}(t) = a \\ \dot{y}(t) = b \end{matrix}$$

$$= \int_0^1 (a^2 t - ab t + 2b - ab t) dt = (a^2 - 2ab) \int_0^1 t dt + 2b \int_0^1 dt = (a^2 - 2ab) \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 + 2b t \Big|_0^1 =$$

$$= (a^2 - 2ab) \frac{1}{2} + 2b = \frac{a^2}{2} - ab + 2b$$

$$\varphi(a, b) = \frac{a^2}{2} - ab + 2b$$

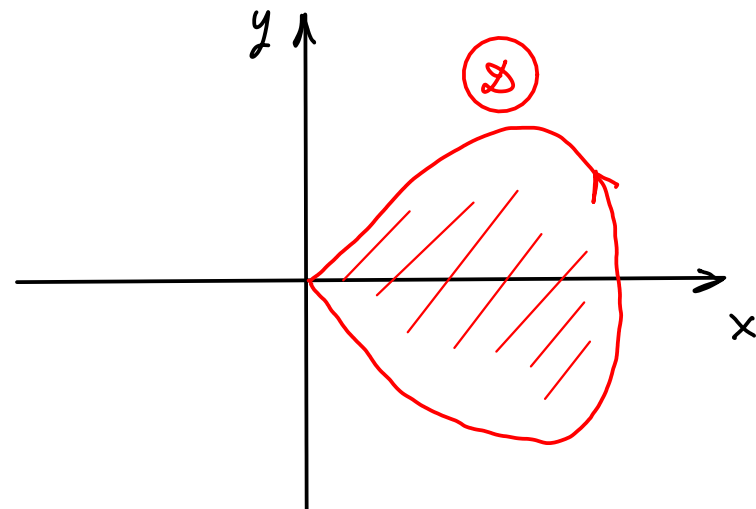
$$\varphi(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy + 2y \quad / \circledast$$

$$\nabla \varphi = (x - y, -x + 2)$$

$$F = \begin{pmatrix} x - y \\ 2 - x \end{pmatrix}$$

: ∩ ∫ ' 3 2

$$\frac{1}{2} \oint_{\partial D} x dy - y dx = S(D)$$



$$\partial D: \gamma(t) = (\sin t, \sin(2t)) \quad 0 \leq t \leq \pi$$

②

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin t \\ y(t) &= \sin(2t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ \dot{\gamma} &= \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

: Green's Theorem

$$S(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\sin t \cdot 2\cos(2t) - \sin(2t) \cdot \cos t] dt =$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\int \sin t \cos(2t) dt = \int \sin(t) [1 - 2 \cos^2 t] dt = \left| \begin{array}{l} \cos t = u \\ -\sin t dt = du \end{array} \right| = -\int (1 - 2u^2) du = \frac{2u^3}{3} - u + C =$$

$$= \frac{2}{3} \cos^3 t - \cos t + C$$

## Curl (rot)

$$n=3$$

$$\text{curl}(F) = ?$$

$$F = e^y \vec{i} + x e^y \cos(z) \vec{j} + (z+1) e^z \vec{k} \quad (1)$$

$$\rightarrow \text{nein} \Leftrightarrow \text{curl}(F) \neq 0 \quad | \quad \mathcal{D}_F = \mathbb{R}^3$$

$$P(x, y, z) = e^y$$

$$Q(x, y, z) = x e^y \cos(z)$$

$$R(x, y, z) = (z+1) e^z$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^y$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -x e^y \sin(z)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^y \cos(z)$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 0$$



$$\begin{aligned}
 \text{rot}(F) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = \\
 &= \vec{i} (0 + x e^y \sin(z)) - \vec{j} (0 - 0) + \vec{k} (e^y \cos z - e^y) = \begin{pmatrix} x e^y \sin(z) \\ 0 \\ e^y (\cos z - 1) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

