

תרגילים

ביסודות של חשבון אינפיניטסימלי

ודים זאב אוסטפנקו

ostap@math.biu.ac.il

<http://www.vzostapenko.org/academia.html>

תמוז תשפ"ד

תוכן עניינים

5	I סדרות
7	1 הגבול של סדרה
15	II פונקציות: גבולות ורציפות
17	2 חישוב גבולות
25	3 פונקציות רציפות
25	3.1 ענייני תיאוריה
31	4 חשבון דיפרנציאלי של פונקציות של משתנה אחד
31	4.1 הנגזרת
33	4.2 הכלל של Bernoulli—l'Hôpital
35	4.3 פונקציות סתומות
39	4.4 הצגה פרמטרית של פונקציה
43	5 האינטגרל הלא מסוים
47	6 אינטגרלים של ביטויים טריגונומטריים
51	III טורים
53	7 טורים מספריים

113	טורי חזקות	8
113	מצואת תחום ההתכנסות של טור חזקות	8.1
131	פיתוח פונקציות שונות לטור חזקות	8.2
163	פונקציות אנליטיות	8.3

171 **IV חשבון של פונקציות של כמה משתנים**

173	9 גבולות. פונקציות רציפות
------------	----------------------------------

177 **10 חשבון דיפרנציאלי**

178	הדיפרנציאל "ל. נגזרות חלקיות. הגראדיענט"	10.1
180	נגזרות חלקיות מסדרים גבוהים	10.2
186	כלל השרשרת	10.3
189	נקודות קיצון	10.4
197	קיצין מותנה. שיטת כופלי Lagrange	10.5
206	דיפרנציאל "לים מסדרות גבוהות. טור Taylor	10.6
206	ישומים של חשבון דיפרנציאלי	10.7

207 **11 אינטגרלים כפולים ומשולשים**

208	אינטגרלים כפולים	11.1
210	שימוש בקואורדינטות קוטביות	11.2
214	החלפת משתנים כללית באינטגרלים כפולים	11.3
218	אינטגרלים משולשים	11.4
226	שימוש בקואורדינטות כדוריות וגליליות	11.5
230	החלפת משתנים כללית באינטגרלים משולשים	11.6

חלק I

סדרות

פרק 1

הגבול של סדרה

1. מצא את הגבול $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sqrt{k + \sqrt{k}} - \sqrt{k} \right)$.

תשובה: $\frac{1}{2}$

פתרון: נשתמש בזהות אלגבי $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$:

$$\sqrt{k + \sqrt{k}} - \sqrt{k} = \frac{k + \sqrt{k} - k}{\sqrt{k + \sqrt{k}} + \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k + \sqrt{k}} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{k}}} + 1} =$$

במעבר האחרון חילקנו אל המונה ואת המכנה ב- $\sqrt{k}$. לכן

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\sqrt{k + \sqrt{k}} - \sqrt{k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{k}}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}.$$

2. הוכח כי כל סדרה אינפניטסימלית חסומה.

פתרון: נניח ש- $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. נקבע מספר $\varepsilon > 0$, אזי ניתן למצוא מספר טבעי N כך ש- $|a_k| < \varepsilon$ לכל $k > N$. נעשה, נסמן $M := \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, \varepsilon)$. ברור ש- $|a_k| \leq M$ לכל k . מכאן ש- $\{a_k\}$ חסומה.

3. הוכח שהסדרה a_k מתכנסת ומצא את גבולה: $a_{k+1} = \frac{a_k + 1}{2}$

$$a_1 = \frac{3}{4}$$

4. הוכח שהסדרה a_k מתכנסת ומצא את גבולה: $a_{k+1} = \frac{a_k}{3 - a_k}$

$$a_1 = \frac{3}{2}$$

תשובה: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$

5. הוכח שהסדרה a_k מתכנסת ומצא את גבולה: $a_{k+1} = \frac{5 + a_k^2}{2a_k}$

$$a_1 = 6$$

תשובה: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \sqrt{5}$

6. הוכח שהסדרה a_k מתכנסת ומצא את גבולה: $a_k = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{3}}}$

(שורשים)

תשובה: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \frac{\sqrt{13} + 1}{2}$

חלק II

פונקציות: גבולות ורציפות

פרק 2

חישוב גבולות

7. הוכח לפי ההגדרה של גבול כי $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1$.

פתרון: לכל $\varepsilon > 0$ נתון, צריך למצוא $M > 0$ כך ש- $x < -M$ גורר $\left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} - 1 \right| < \varepsilon$. ניתן לראות כי $\left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} - 1 \right| = \left| \frac{-2e^x}{e^x + 1} \right| = \frac{2e^x}{e^x + 1} < 2e^x$ מצד אחד, $x < -M$ גורר $e^x < e^{-M}$, לכן $\left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} - 1 \right| < 2e^x < 2e^{-M}$. זאת אומרת שהביטוי $\left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} - 1 \right| < \varepsilon$ ידאי יהיה קטן מ- ε אם $e^{-M} < \frac{\varepsilon}{2}$ או $-M < \ln \frac{\varepsilon}{2}$ או $M > -\ln \frac{\varepsilon}{2} = \ln \frac{2}{\varepsilon}$. בסיכום: כאשר $M > -\ln \frac{\varepsilon}{2} = \ln \frac{2}{\varepsilon}$, $\left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} - 1 \right| < \varepsilon$.

8. חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \tan \frac{1}{x} \right)$.

תשובה: 1

פתרון: נגדיר משתנה חדש ע"י הנוסחה $t := \frac{1}{x}$. אזי $x \rightarrow \infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0^-$ לכן

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \tan \frac{1}{x} \right) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin t}{t} \cdot \frac{1}{\cos t} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos t} = 1 \cdot \frac{1}{\cos t} \Big|_{t=0} = 1 \end{aligned}$$

9. חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 8} + \sqrt{x^2 + 1} \right)$.

תשובה: גבול קיים במובן רחב בלבד, ושווה ל- ∞ .

פתרון: נבצע את החלפת המשתנה $t := -x$, אזי

בשלב זה נוכיח הגבול $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 8} + \sqrt{x^2 + 1} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sqrt{t^2 - 3t + 8} + \sqrt{t^2 + 1} \right)$
האחרון הוא ∞ . צריך לכל $M > 0$ למצוא כזה N ש- $t > N$ גורר $\sqrt{t^2 - 3t + 8} + \sqrt{t^2 + 1} > M$.

לכל $t > 2$ נכון:

$$\begin{aligned} \sqrt{t^2 - 3t + 8} + \sqrt{t^2 + 1} &= \sqrt{\left(t^2 - 3t + \frac{9}{4}\right) + \frac{23}{4}} + \sqrt{t^2 + 1} \\ &= \sqrt{\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}} + \sqrt{t^2 + 1} > \sqrt{\left(t - \frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt{t^2} \\ &= \left(t - \frac{3}{2}\right) + t = 2t - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

בסיכום,

$$\sqrt{t^2 - 3t + 8} + \sqrt{t^2 + 1} > 2t - \frac{3}{2}$$

לכן צריך למצוא t כך ש- $2t - \frac{3}{2} > M$. ברוו שזה יתקיים לכל $t > M + 1$.

הוכחנו כי לכל $t > M + 1$, $\sqrt{t^2 - 3t + 8} + \sqrt{t^2 + 1} > M$.

10. חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right)$

תשובה: 1

פתרון: נשתמש בנוסחה $A - B = \frac{A^2 - B^2}{A + B}$ עבור $A = \sqrt{x^2 + x - 1}$ ו- $B = \sqrt{x^2 - x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right) \left(\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} \right)}{\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + x - 1) - (x^2 - x + 1)}{\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1 - x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1 + x - 1}{\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 2 \quad | : x}{\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} \quad | : x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \frac{2 - 0}{\sqrt{1 + 0 - 0} + \sqrt{1 - 0 + 0}} = \frac{2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{2}{2} = 1.$$

11. חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\tan 5x}$

12. חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin(x^{12})}{5x^3 \sin^2 x + 3x^4 \sin^8 x \cos x}$.

תשובה: 0

פתרון: ידוע ש- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, לכן בתהליך חישוב הגבול ניתן להחליף בתוך הגבול את $\sin x$ ל- x , את $\sin(x^{12})$ ל- x^{12} , וכו'. באופן דומה, מכיוון שהפונקציה $\cos x$ רציפה סביב נקודה 0, ו- $\cos 0 = 1$, ניתן להחליף בגבול את $\cos x$ עם 1. נחליף:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin(x^{12})}{5x^3 \sin^2 x + 3x^4 \sin^8 x \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^{12}}{5x^3 x^2 + 3x^4 x^8} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^{12}}{5x^5 + 3x^{12}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^7}{5 + 3x^7} = 0 \end{aligned}$$

פרק 3

פונקציות רציפות

3.1 ענייני תיאוריה

הגדרה 1 נאמר שהפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה $a \in \mathcal{D}_f$ אם התנאים הבאים מתקיימים:

1. הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ קיים,

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

הגדרה 2 הפונקציה $f(x)$ נקראת אלמנטרית יסודית אם היא שייכת לרשימה

1. x^λ , $\lambda \in \mathbb{R}$

2. e^x

3. $\cos x$

4. $\sin x$

5. הפונקציות ההפוכות להנ"ל.

הגדרה 3 הפונקציה $f(x)$ נקראת אלמנטרית אם היא נתקבלת מהפונקציות אלמנטריות היסודיות ע"י 5 פעולות

הבאות:

1. ארבע פעולות החשבון,

2. ההרכבה.

משפט 1 כל פונקציה אלמנטרית רציפה בתחום הגדרתה.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 1 \\ Ax^2 - 2, & x > 1 \end{cases} \quad \text{13. מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר } A \text{ הפונקציה}$$

רציפה.

תשובה: $A = 2$

פתרון: הפונקציה הנתונה אנפית, כל האנף הוא פונקציה אלמנטרית המוגדרת ב- $\mathbb{R}$ כולו. לכן $f(x)$ רציפה

בכל $x \neq 1$, לפי משפט על פונקציות אלמנטריות. לכן צריכים לבדוק את נקודת התפר $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (Ax^2 - 2) = A - 2$$

שני הגבולות שווים אם ורק אם $A = 2$.

14. מצא עבור אילו ערכים של הפרמטרים A ו- B הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} Ax + 1, & x \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin x + B, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ רציפה.}$$

פתרון: הפונקציה הנתונה אנפית, כל האנף הוא פונציה אלמנטרית המוגדרת ב- $\mathbb{R}$ כולו. לכן $f(x)$ רציפה

בכל $x \neq \frac{\pi}{2}$, לפי משפט על פונציות אלמנטריות. לכן צריכים לבדוק את נקודת התפר $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (Ax + 1) = \frac{A\pi}{2} + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\sin x + B) = 1 + B$$

לכן הפונקציה $f(x)$ רציפה אם ורק אם $\frac{A\pi}{2} + 1 = 1 + B$ או $B = \frac{A\pi}{2}$.

15. מצא את נקודות אי־רציפות של הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{|x|}$ וקבע את סוגן.

תשובה: אי־רציפות סליקה בנקודה $x = 0$

פתרון: בקטע $(0, \infty)$, $f(x) = \frac{x^3}{x} = x^2$, לכן רציפה. באותו אופן, $f(x)$ רציפה גם בקטע $(-\infty, 0)$, כי $f(x) = \frac{x^3}{-x} = -x^2$ בקטע הזה. נשאר לחקור את הנקודה $x = 0$. הביטוי $\frac{x^3}{-x}$ אינו מוגדר כאשר $x = 0$, לכן זאת נקודה של אי־רציפות. כדי לקבוע איזה סוג של אי־רציפות לפונקציה $f(x)$ בנקודה הזאת, נחשב את הגבולות החד־צדדיים:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2) = 0.$$

אנחנו רואים שהגבול $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ קיים. זאת אומרת ש־ $x = 0$ היא נקודת אי־רציפות סליקה.

הערה:

התוצאה אומרת שהפונקציה $g(x)$ המוגדרת על ידי הכלל

$$g(x) := \begin{cases} \frac{x^3}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

רציפה בכל הישר $(-\infty, \infty)$.

16. מצא לפחות שורש אחד עבור כל אחת מהמשוואות הבאות ברמת דיוק של 10.0 ע"י

שימוש בשיטת החצייה. השתמש במחשבון, כתוב את החישובים וציין מדוע ניתן להפעיל את השיטה (כלומר, נמק מדוע משפט ערך הביניים ניתן ליישום). $\arctan x = 2 + x^3$ בקטע $[-1.57, 0]$.

פתרון:

נגדיר $f(x) := \arctan x - 2 - x^3$. נחלק את הקטע $[-1.57, 0]$ בשני קטעים שווים:

$$\frac{0 - 1.57}{2} = -0.785$$

נחשב את הערך של $f(x)$ בקצוות וגם באמצע:

$$f(-0.785) = -1.8182 \quad f(0) = -2 \quad f(1.57) = -4.8662 - 4.8662$$

פרק 4

חשבון דיפרנציאלי של פונקציות של משתנה אחד

4.1 הנגזרת

17. הוכח כי הפונקציה $f(x) = x^2$ גזירה בכל נקודה $x = a$.

פתרון: צריך להוכיח שהגבול $\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(a+dx) - f(a)}{dx}$ קיים (במובן רגיל).

$$\begin{aligned} \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{(a+dx)^2 - a^2}{dx} &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2a \, dx + (dx)^2 - a^2}{dx} \\ &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{2a \, dx + (dx)^2}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} (2a + dx) = 2a. \end{aligned}$$

לכן, $f(x)$ גזירה בכל $\mathbb{R}$.

בדרך קבלנו ביטוי לנגזרת: $f'(a) = (x^2)' \Big|_{x=a} = 2a$

4.2 הכלל של Bernoulli—l'Hôpital

18. מצא את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0+} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x^2}}$.

תשובה: 0

פתרון: נסמן $f(x) := \lim_{x \rightarrow 0+} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x^2}}$. בגלל שגם הבסיס וגם המעריך תלויים ב- x , נחשב קודם את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1 - \sin x)}{x^2}$. יש כאן אי-ודאות $\frac{0}{0}$, לכן אפשר לנסות להשתמש בכלל Bernoulli—l'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1 - \sin x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln(1 - \sin x))'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(1 - \sin x)'}{2x(1 - \sin x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-\cos x}{2x(1 - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-\cos x}{2(1 - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\infty. \end{aligned}$$

קיבלנו $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln f(x) = -\infty$, לכן

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \exp(\ln f(x)) = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0+} \ln f(x)\right) = 0$$

(הפונקציה e^x רציפה על הישר $\mathbb{R}$ כולו !)

19. מצא את משוואת המשיק לגרף של הפונקציה הסתומה

$$\ln(x^2 y^3) + y^2 = y^3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} e^{(x^2-1)}\right) \quad \text{העובר דרך הנקודה } (1, 1).$$

תשובה: $x + y = 2$

פתרון:

1. קודם נמצא את הנגזרת $y'(1)$ של הפונקציה $y(x)$ עבור $x = 1$. נתון לנו ש- $y(1) = 1$.

נרשום את המשוואת ההגדרה של הפונקציה $y(x)$ בצורה יותר נוחה לביצוע חישובים:

$$2 \ln |x| + 3 \ln y + y^2 = y^3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} e^{(x^2-1)}\right)$$

ונבדוק שהנקודה $(1, 1)$ אכן שייכת לגרף של הפונקציה:

$$2 \ln |1| + 3 \ln 1 + 1^2 = 1^3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} e^{(1^2-1)}\right)$$

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$1 = 1$$

נתייחס ל- y כפונקציה של x ונגזור עם שמוש בכלל השרשרת את שני הצדדים של המשוואה $2 \ln |1| +$

$3 \ln 1 + 1^2 = 1^3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} e^{(1^2-1)}\right)$ לפי המשתנה x . סביב $x = 1$ אנחנו לא צריכים את הערך המוחלט

בתוך הלוגאריטם:

$$2(\ln x)' + 3(\ln y)' + (y^2)' = (y^3)' \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}e^{(x^2-1)}\right) + y^3 \cdot \left(\sin \frac{\pi}{2}e^{(x^2-1)}\right)'$$

$$\frac{2}{x} + \frac{3y'}{y} + 2yy' = 3y^2y' \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}e^{(x^2-1)}\right) + y^3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}e^{(x^2-1)}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2}e^{(x^2-1)}\right)'$$

$$\frac{2}{x} + \frac{3y'}{y} + 2yy' = 3y^2y' \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}e^{(x^2-1)}\right) + y^3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}e^{(x^2-1)}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2}e^{(x^2-1)}\right) \cdot (x^2 - 1)'$$

$$\frac{2}{x} + \frac{3y'}{y} + 2yy' = 3y^2y' \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}e^{(x^2-1)}\right) + y^3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}e^{(x^2-1)}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2}e^{(x^2-1)}\right) \cdot 2x$$

נזכור שאת הנגזרת אנחנו מחשבים עבור $x = 1$ ולכן עבור $y(1) = 1$ ו- $y'(1)$ לכן המשוואה שקיבלנו

צריך לרשום בצורה

$$\frac{2}{x} + \frac{3y'(1)}{y(1)} + 2y(1)y'(1) = 3y(1)^2y'(1) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}e^{(x^2-1)}\right) + y(1)^3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}e^{(x^2-1)}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2}e^{(x^2-1)}\right) \cdot 2x \Big|_{x=1}$$

$$2 + 3y'(1) + 2y'(1) = 3y'(1) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}e^0\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}e^0\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2}e^0\right) \cdot 2$$

$$2 + 5y'(1) = 3y'(1) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$2 + 5y'(1) = 3y'(1)$$

$$y'(1) = -1$$

2. נרשום את הדיפרנציאל של $y(x)$ סביב $x = 1$ הוא $dy = y'(1) dx = -dx$ כאשר $dx = x - 1$. מכאן

מקבלים את המשוואה של קו המשיק לגרף של $y(x)$:

$$y - y(1) = -(x - 1)$$

$$y - 1 = -x + 1$$

$$x + y = 2$$

4.4 הצגה פרמטרית של פונקציה

נניח שהפונקציות של משתנה t ("פרמטר") $\varphi(t)$, $\psi(t)$ גזירות בקטע סגור $[\alpha, \beta]$ ובנוסף שהפונקציה $\varphi(t)$ הפיכה
 ב- $[\alpha, \beta]$. אזי $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ מגדירים y כפונקציה של x . את הנגזרת של $y(x)$ עבור $x_0 = \varphi(t_0)$ ניתן לחשב
 לפי הנוסחה

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{\dot{\psi}(t_0)}{\dot{\varphi}(t_0)}.$$

כאשר $x_0 := \psi(t_0)$.

את הנוסחה הזאת ניתן לקבל ב"ע כלל השרשרת ומשפט על הנגזרת של הפונקציה ההופכית. באותה הדרך,

ניתן לקבל את הנוסחה לחישוב של הנגזר השנייה:

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x_0) = \frac{\dot{\varphi}(t_0)\ddot{\psi}(t_0) - \dot{\psi}(t_0)\ddot{\varphi}(t_0)}{\dot{\varphi}^3(t_0)}.$$

20. מצא את הנגזרת השניה של הפונקציה הנתונה בצורה פרמטרית:

$$\begin{cases} y(t) = \ln t + 1 \\ x(t) = \arcsin t - t^3. \end{cases}$$

תשובה: $\frac{d^2y}{dx^2}(x) = \frac{2t^2+t-2+18t^2(\sqrt{1-t^2})^3}{2t^2(1-3t^2\sqrt{1-t^2})^3}$

פתרון: נשתמש בנוסחת נגזרת השניה

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\dot{x}^3(t)}.$$

של הפונקציה הנתונה בצורה פרמטרית:

$$\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$$

$$x(t) = \arcsin t - t^3$$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - 3t^2$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{1}{2(\sqrt{1-t^2})^3} - 6t$$

$$y(t) = \ln t + 1$$

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{t}$$

$$\ddot{y}(t) = -\frac{1}{t^2}$$

לכן

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\dot{x}^3(t)} = \frac{-\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - 3t^2\right) \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} \cdot \left(-\frac{1}{2(\sqrt{1-t^2})^3} - 6t\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - 3t^2\right)^3}$$

כדי לעשות המשל החשובים יותר קל, נסמן זמנית $\beta := \sqrt{1-t^2}$, אזי

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2}(x) &= \frac{-\left(\frac{1}{\beta} - 3t^2\right) \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} \cdot \left(-\frac{1}{2\beta^3} - 6t\right)}{\left(\frac{1}{\beta} - 3t^2\right)^3} = \\ &= \beta^3 \frac{\frac{-1+3t^2\beta}{\beta t^2} + \frac{1+12t\beta^3}{2\beta^3 t}}{(1-3t^2\beta)^3} = \frac{-2\beta^2 + 18t^2\beta^3 + t}{2t^2(1-3t^2\beta)^3}. \end{aligned}$$

נחזור מ- β ל- $\sqrt{1-t^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2}(x) &= \frac{-2(\sqrt{1-t^2})^2 + 18t^2(\sqrt{1-t^2})^3 + t}{2t^2(1-3t^2\sqrt{1-t^2})^3} = \\ &= \frac{-2(1-t^2) + 18t^2(\sqrt{1-t^2})^3 + t}{2t^2(1-3t^2\sqrt{1-t^2})^3} = \frac{2t^2 + t - 2 + 18t^2(\sqrt{1-t^2})^3}{2t^2(1-3t^2\sqrt{1-t^2})^3}. \end{aligned}$$

פרק 5

האינטגרל הלא מסויים

21. מצא את האינטגרל $\int \cos^3 x \, dx$.

פתרון:

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x \, dx = \left\| \begin{array}{l} t := \sin x \\ dt = \cos x \, dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right\| =$$

$$= \int (1 - t^2) \, dt = t - \frac{1}{3}t^3 + C = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

בדיקת התשובה:

$$\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C \right)' = \cos x - \sin^2 \cdot \cos x = \cos x(1 - \sin^2 x) = \cos^3 x$$

22. חשב את $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

פתרון:

קודם נחשב את האינטגרל הלא־מסויים:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left\| \begin{array}{l} t := \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right\| = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{M \rightarrow 1} \int_M^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln e} - 2 \lim_{M \rightarrow 1} \sqrt{\ln M} = 2 \quad \text{לכן}$$

פרק 6

אינטגרלים של ביטויים טריגונומטריים

כדי לחשב אינטגרל $\int R(\cos x, \sin x) dx$, כאשר $R(u, v)$ היא פונקציה רציונלית, ז"א יחס של שני פולינומים של המשתנים u ו- v , צריך לבצע את ההצבה

$$t := \tan \frac{x}{2}.$$

קל לבדוק ש-

$$x = 2 \arctan t$$

$$dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

לכן, אחרי ההצבה אנחנו מקבלים אינטגרל של פונקציה רציונלית (רגילה).

23. חשב את האינטגרל $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 3 \sin^2 x}$.

תשובה: $\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3} \tan x) + C$

פתרון: ההצבה $t := \tan \frac{x}{2}$ מביאה לאינטגרל $\int \frac{1+t^2}{1+10t^2+t^4} dt$, ובעקרון אפשר להסתדר אם האינטגרל הזה. כאן אבל הפונקציות $\sin x$ ו- $\cos x$ נמצאים בחזקות זוגיות, וזה מקצר הדרך: אפשר להשתמש בהצבה $t := \tan x$ שזה אומר:

$$x = \arctan t$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

ע"י ההצבה הזאת אנו מקבלים אינטגרל די פשוט:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x + 3 \sin^2 x} = \int \frac{1}{\frac{1}{1+t^2} + 3 \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1+3t^2}.$$

נחשב את האינטגרל האחרון:

$$\int \frac{dt}{1+3t^2} = \left\| \begin{array}{l} u := \sqrt{3}t \\ du = \sqrt{3}dt \end{array} \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan u + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}t) + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3} \tan x) + C.$$

בדיקת התשובה: לפי כלל השרשרת,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3} \tan x) + C \right)' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1+3 \tan^2 x} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x + 3 \sin^2 x}.$$

חלק III

טורים

פרק 7

טורים מספריים

בפרק הזה אנחנו משתמשים בעובדות הבאות:

• אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

• $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ כאשר $|q| < 1$, עבור $|q| > 1$ הטור מתבדר (מבחן המנה של d'Alembert)

• הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר

24. רשום את החמישה המחוברים הראשונים של הטור:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+2}{n^2+4}$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n-1)}{2^{n+3}}$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n^2+4}$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ כאשר } a_n = \begin{cases} \frac{1}{4n^2-1} & n = 2l-1 \\ \frac{1}{n^2} & n = 2l \end{cases}$$

תשובה:

$$1. 1 + 1 + \frac{11}{13} + \frac{7}{10} + \frac{17}{29} \dots$$

$$2. 0 + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{3}{128} - \frac{1}{32} + \dots$$

$$3. \frac{1}{5} + \frac{3}{8} + \frac{1}{13} + \frac{3}{20} + \frac{1}{29} + \dots$$

$$4. \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{35} + \frac{1}{16} + \frac{1}{99} + \dots$$

25. מצא את הסכום החלקי s_k של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$ וקבע האם הסדרה s_k מתכנסת. אם

ניתן, מצא את הסכום של הטור.

$$\underline{\text{תשובה:}} \quad s_k = 2 \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{3^n} = 3 \left(1 - \frac{1}{3^k}\right) \quad ; s = 3$$

26. מצא את הסכום החלקי s_k של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ וקבע האם הסדרה s_k מתכנסת.

אם ניתן, מצא את הסכום של הטור.

תשובה: $\frac{3}{4}, s_k = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right)$

פתרון: נתחיל בזהות

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right).$$

אזי

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^k \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k} \right) + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k} \right) + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \end{aligned}$$

קיבלנו $s_k = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right)$ לכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right) \right] = \frac{3}{4}.$$

27. מצא את הסכום החלקי s_k של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 3n - 2}$ וקבע האם הסדרה s_k

מתכנסת. אם ניתן, מצא את הסכום של הטור.

תשובה: הטור מתכנס למספר $\frac{1}{2}$.

פתרון:
1. ננסה לפצל את המכנה:

$$9n^2 - 3n - 2 = 0$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 9}}{2 \cdot 9} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 8 \cdot 9}}{18} = \frac{3 \pm 3\sqrt{1+8}}{18} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{6} = \frac{1 \pm 3}{6} = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$9n^2 - 3n - 2 = 9 \left(n - \frac{2}{3} \right) \left(n + \frac{1}{3} \right) = (3n - 2)(3n + 1)$$

2. נציג את השבר כסכום שברים יותר פשוטים:

$$\frac{1}{9n^2 - 3n - 2} = \frac{1}{(3n - 2)(3n + 1)} = \frac{A}{3n - 2} + \frac{B}{3n + 1} = \frac{A(3n + 1) + B(3n - 2)}{(3n - 2)(3n + 1)}$$

$$\frac{3(A + B)n + (A - 2B)}{(3n - 2)(3n + 1)} = \frac{1}{(3n - 2)(3n + 1)}$$

$$\begin{cases} 3(A + B) = 0 \\ A - 2B = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{9n^2 - 3n - 2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n - 2} - \frac{1}{3n + 1} \right) \quad \text{לכן } B = -\frac{2}{3}, A = \frac{1}{3}$$

3. נוסחה פתוחה עבור הסכום החלקי s_k : כדי למצוא נוסחה פתוחה (ז"א ביטוי מפורש, לא נוסחת נסיגה)

עבור הסכום החלקי s_k , נרשום כמה איברים ראשונים של הטור, וכך ננסה לגלות חוקיות.

$$s_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \cdots - \frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3k+1} \right)$$

קיבלנו $s_k = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3k+1} \right)$ לכן הסכום של הטור שווה ל-

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3k+1} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

28. מצא את הסכום החלקי s_k של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ וקבע האם הסדרה s_k מתכנסת. אם

ניתן, מצא את הסכום של הטור.

תשובה: $s_k = \frac{1 - (-1)^k}{2}$ לכן הטור מתבדר.

29. מצא את הסכום החלקי s_k של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{n-1}$ וקבע האם הסדרה s_k

מתכנסת. אם ניתן, מצא את הסכום של הטור.

תשובה: $s_k = \sum_{n=0}^{k-1} (-2)^n = \frac{1}{3}(1 - (-2)^k)$ לכן הטור מתבדר.

30. מצא את הסכום החלקי s_k של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 5}{3^{n-1}}$ וקבע האם הסדרה s_k מתכנסת.

אם ניתן, מצא את הסכום של הטור.

31. מצא את הסכום החלקי s_k של הטור $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$ וקבע האם הסדרה s_k

מתכנסת. אם ניתן, מצא את הסכום של הטור.

פתרון: $\frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n} \right)$. נרשום את הסכום החלקי ה- k , $s_k =$

באופן מפורש: $\sum_{n=0}^k \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{k-1} + a_{k-1} + a_k$

$$\begin{aligned} 2s_k &= 1 - 1 + \frac{1}{3} \\ &\quad + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \\ &\quad + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{1}{k-4} - \frac{2}{k-3} + \frac{1}{k-2} \\ &\quad + \frac{1}{k-3} - \frac{2}{k-2} + \frac{1}{k-1} \\ &\quad + \frac{1}{k-2} - \frac{2}{k-1} + \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{4} \quad \text{לכן}$$

32. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

תשובה: מתבדר

פתרון: תשתמש בתנאי ההוכרחי (עמוד 53): הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ אינו קיים, לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ מתבדר.

33. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^n$.

תשובה: הטור מתבדר.

פתרון: הטור הנתון הוא טור הנדסי עם $|q| = 2 > 1$, לכן (ראה עמוד 53) מתבדר.

34. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n+2}$.

תשובה: הטור מתבדר.

פתרון: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1 \neq 0$, לפי התנאי ההוכרחי (עמוד 53), הטור מתבדר.

35. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5}{n-2}$.

תשובה: הטור מתבדר.

פתרון: ברור ש- $\frac{5}{n} > \frac{5}{n-2}$. מצד שני, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 5 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}$ מתבדר. לפי מבחן ההשוואה, הטור הנתון גם מתבדר.

36. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}}$.

תשובה: הטור מתכנס.

פתרון: יש 2 דרכים לפתור את הבעיה:

1. ע"י מבחן ההשוואה: $\frac{1}{n \cdot 5^{n-1}} < \frac{1}{5^{n-1}}$, והטור ההנדסי עם המנה $0 < \frac{1}{5} < 1$ מתכנס.

2. ע"י מבחן המנה של d'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 5^{n-1}}{(n+1) \cdot 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5(n+1)} = \frac{1}{5} < 1$$

לכן הטור מתכנס.

37. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n-1)^2}$.

תשובה: הטור מתכנס.

פתרון: קל לבדוק כי עבור כל $n > 4$ מתקיים אי-שוויון $\frac{2n+1}{(n-1)^2} < 1$. לכן $\frac{2n+1}{n^2(n-1)^2} < \frac{1}{n^2}$.
 כמעט לכל n . מצד שני, מצאנו בכיתה ע"י חישובים ישרים את סכום הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.
 לפי מבחן ההשוואה, הטור הנתון מתכנס. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

38. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2}$.

תשובה: מתבדר

39. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{4^n}$.

תשובה: הטור מתכנס.

פתרון: הטור הוא סכום של שני טורים הנדסיים:
 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{4^n} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$
 המנה של כל אחד מהטורים שווה ל- $\frac{1}{4}$ שכן $0 < \frac{1}{4} < 1$.
 מתכנסים.

40. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(n!)^2}{(2n)!}$.

תשובה: הטור מתכנס.

פתרון: לפי מבחן המנה של d'Alembert הטור $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1$

מתכנס.

41. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

תשובה: הטור מתבדר.

פתרון: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1$, לכן הטור מתבדר, לפי התנאי ההכרחי להתכנסות (עמוד 53).

42. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n^3}$.

תשובה: הטור מתבדר.

פתרון: נשתמש במבחן המנה של d'Alembert:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{n+1} + 1}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{2^n + 1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{n+1} + 1}{2^n + 1} \cdot \frac{n^3}{(n+1)^3} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 1}{2^n + 1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = 2 \cdot 1 = 2 > 1. \end{aligned}$$

לכן, טור מתבדר.

43. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$.

תשובה: הטור מתכנס.

פתרון: ניתן למצוא את התשובה בשתי דרכים: ע"י מבחן ההשוואה וע"י מבחן המנה של d'Alembert.

1. בגלל ש- $\frac{2^n}{1+2^{2n}} < \frac{2^n}{2^{2n}} < \frac{1}{2^n}$, הטור הנתון מתקנס עם מתכנס הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. האחרון מתכנס כטור הנדסי עם המנה 0.5.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{n+1}}{1+2^{2n+2}} \cdot \frac{1+2^{2n}}{2^n} \right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^{2n}}{1+2^{2n+2}} = \frac{1}{2} < 1$. לפי מבחן המנה של d'Alembert, הטור מתכנס.

44. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n)^{n+1}}$.

תשובה: הטור מתכנס.

פתרון: כמעת לכל n מתקיים אי־שוויון $\frac{1}{(1+n)^2} < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{(1+n)^{n+1}}$ (למשל, זה נכון לכל $n \geq 2$). אבל בכיתה בדקנו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ מתכנס (ואפילו מצאנו את סכומו ע"י חישוב מפורש של סכומים חלקיים). לכן, לפי מבחן ההשוואה, הטור הנתון מתכנס.

45. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - 1}$.

תשובה: מתכנס

פתרון: $\frac{1}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{1}{4n(n+1)}$. ניתן לחשב את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ באופן מפורש: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ לכן

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} =$$

$$\frac{1}{1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k-1} \right) - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}$$

לכן $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) = 1$ ו- $s_k = 1 - \frac{1}{k+1}$

46. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$.

תשובה: הטור מתכנס לפי מבחן השוואה.

פתרון:

1.

$$(2n+1)^3 = (2n+1)(2n+1)^2 > (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 > 4n^2 > n^2$$

$$(2n+1)^3 > n^2$$

$$\frac{1}{(2n+1)^3} < \frac{1}{n^2}$$

2. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנת (ניתן להוכיח את זה ע"י השוואה עם הטור ה"טלסקופי" $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$, או, לחלופין,

בעזרת המבחן האינטגרלי, כי האינטגרל הלא אמיתי $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ מתכנס).

3. לפי הסעיף הראשון ולפי המבחן ההשוואה הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$ מתכנס.

47. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

תשובה: מתכנס: תשתמש במבחן המנה של d'Alembert

פתרון: לפי מבחן המנה של d'Alembert,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!}$$

בגלל ש- $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n \cdot (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

המספר 0 הוא קטן מ-1, לכן הטור מתכנס.

48. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

תשובה: הטור מתבדר.

פתרון: קודם כל צריך להוכיח כי $x > \ln x$ לכל $x > 0$. באמת, קל לראות לעבור $x = 1$ האי־שוויון מתקיים, וכאשר $x > 1$, הפונקציה $\ln$ עולה יותר אטי מהפונקציה x . זה גורר ש־ $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ לכל n . ההשוואה עם הטור ההרמוני נותנת את התשובה.

נניח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ מתכנס. הוכח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ גם מתכנס.

פתרון: נסמן:

$$s_k = \sum_{n=1}^k u_n$$

$$\sigma_k = \sum_{n=1}^k |u_n|$$

$$s'_k = (u_1, \dots, u_k \text{ הרשימה בתוך הסכום של כל מספרים חיוביים שנמצאים בתוך הרשימה})$$

$$s''_k = -(u_1, \dots, u_k \text{ הרשימה בתוך הסכום של כל מספרים שליליים שנמצאים בתוך הרשימה})$$

אזי

$$s_k = s'_k - s''_k$$

$$\sigma_k = s'_k + s''_k$$

לפי ההנחה, הגבול $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k =: \sigma$ קיים. לכן $0 < s'_k < \sigma_k < \sigma$, $0 < s''_k < \sigma_k < \sigma$. בנוסף, הסדרות s'_k ,

s''_k עולות מונוטוניות, לכן מתכנסות (לפי המשפט על סדרות מונוטוניות חסומות). לכן הסדרה $s_k = s'_k - s''_k$ גם

מתכנסת.

50. נניח שהסדרה u_n מקיימת אי-שוויון $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$. הוכח כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ מתכנס

בהחלט.

פתרון: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1$, לפי מבחן המנה של d'Alembert, הטור $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ מתכנס.

51. האם ניתן לישם משפט Leibniz על הטורים המתחלפים לטור

$$? \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots$$

תשובה: לא.

פתרון: הטור לא מקיים את התנאי השני של המשפט, כי קל לבדוק ש-

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} > \frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

52. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

תשובה: מתכנס

פתרון: נשתמש במבחן האינטגרלי:

53. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

תשובה: מתבדר

פתרון: הסדרה $\frac{1}{n \ln n}$ יורדת מונוטונית, לכן אפשר להשתמש במבחן האינטגרלי. ההצבה $t := \ln x$, מבילה

ל- $\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln \ln x$. לכן $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{10}^M \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{M \rightarrow \infty} \ln \ln M - \ln \ln 10 = \infty$.

54. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}$.

תשובה: מתבדר

55. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

תשובה: מתכנס

56. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

תשובה: מתבדר

57. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

תשובה: מתכנס

פתרון: $\frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, א"כ אפשר להשתמש במבחן האינטגרלי

58. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(3n-2)(3n+1)}$.

תשובה: מתכנס

פתרון: נשתמש במבחן ההשוואה:

$$\frac{7}{(3n-2)(3n+1)} < \frac{7}{3n(3n-3)} = \frac{7}{9n(n-1)}$$

אבל הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ מתכנס, בגלל ש-

$$s_k = \sum_{n=2}^k \frac{1}{n(n-1)} = 1 - \frac{1}{k} \rightarrow 1$$

59. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n$.

תשובה: הטור מתבדר.

פתרון: נשתמש במבחן המנה של d'Alembert:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2n+3}{3n+4} \right)^{n+1}}{\left(\frac{3n+1}{2n+1} \right)^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n+4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n+4} \right)^n = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2n+1} \right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{3n+4} \right)^n = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n + \frac{4}{3}} \right)^n = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \right)^{n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n + \frac{4}{3}} \right)^{n + \frac{4}{3} - \frac{4}{3}} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \right)^{n + \frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n + \frac{4}{3}} \right)^{n + \frac{4}{3}} \right]^{-\frac{4}{3}} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} \cdot e^{\frac{5}{6}} > 1, \end{aligned}$$

לכן הטור מתבדר.

60. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$.

תשובה: מתבדר

61. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 2^n}$.

תשובה: מתבדר

62. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{1+e^n}$.

תשובה: מתכנס

63. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$. אם הטור מתכנס, מצא את הערך של

k שעבורו מתקיים אי-שוויון $|s - s_k| < 10^{-6}$ כאשר s_k מסמן את הסכום החלקי ה- k של הטור.

פתרון: באור האי-שוויון $|s - s_k| < \frac{1}{2^{k+1}}$, מספיק למצוא את k כך ש- $2^{-(k+1)} < 10^{-6}$. i.e. $k > 6 \log_2 10$.

נשים לב ש- $3 < \log_2 10 < 4$, לכן $k = 24$ יהיה מספיק.

64. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. אם הטור מתכנס, מצא את הערך של k

שעבורו מתקיים אי-שוויון $|s - s_k| < 10^{-6}$ כאשר s_k מסמן את הסכום החלקי ה- k של הטור.

תשובה: $k \geq 10^6$

פתרון: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, לכן, לפי משפט Leibniz על טורים מתחלפים, הטור מתכנס. לפי אותו משפט, $|s - s_k| < \frac{1}{k+1}$, לכן, כדי להגיע לרמת הדיוק 10^{-6} , מספיק לקחת כזה k שמקיים $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{10^6}$, ז"א $k \geq 1,000,000$.

65. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. אם הטור מתכנס, מצא את הערך של k

שעבורו מתקיים אי-שוויון $|s - s_k| < 10^{-6}$ כאשר s_k מסמן את הסכום החלקי ה- k של הטור.

תשובה: $k = 10^3$

66. קבע את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$. אם הטור מתכנס, מצא את הערך של k

שעבורו מתקיים אי-שוויון $|s - s_k| < 10^{-6}$ כאשר s_k מסמן את הסכום החלקי ה- k של הטור.

תשובה: $k = 9$

פתרון: $(k+1)! > 10^6$; ננסה כמה מספרים: $9! = 362880 < 10^6$ אבל $10! = 3628800 > 10^6$, לכן

אפשר לקחת $k = 10 - 1 = 9$.

67. קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

תשובה: מתכנס בהחלט

68. קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 2^n}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

תשובה: מתכנס בהחלט

69. קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3}{2n}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

תשובה: מתבדר

70. קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{n!}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

תשובה: מתכנס בהחלט

71. קבע האם הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

תשובה: מתכנס בתנאי

72. קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

תשובה: מתכנס בתנאי

73. קבע האם הסדר $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^{10}}{e^n}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

תשובה: מתכנס בהחלט

פתרון: נשתמש במבחן המנה של d'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)^{10}}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n^{10}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)^{10}}{n^{10}} \cdot \frac{e^n}{e^{n+1}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{10} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

74. קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

תשובה: מתבדר

75. קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n}{3n+2}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

תשובה: מתבדר

76. קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{10n+1}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

תשובה: מתכנס בתנאי

פתרון: הטור מתקיים תנאי משפט ה-Leibniz על טורים מתחלפים, לכן מתכנס. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+1}$ של ערכי המוחלט מתבדר, לפי המבחן האינטגרלי (בעצם הטור הוא הטור ההרמוני).

77. קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)^2}{n^2+1}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

תשובה: מתבדר

78. קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + 2n + 1}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

תשובה: מתכנס בהחלט

79. קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n\sqrt{n}}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

תשובה: מתכנס בהחלט

פתרון: בגלל ש- $|\cos(n\pi)| \leq 1$ ואז $\left| \frac{\cos(n\pi)}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$, ניתן להשתמש במבחן ההשוואה: הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ מתכנס (לפי המבחן האינטגרלי), לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(n\pi)}{n\sqrt{n}} \right|$ גם מתכנס.

80. קבע האם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^3 + 1}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

תשובה: מתכנס בהחלט

פתרון: להשתמש בנבחן ההשוואה: $\left| (-1)^{n+1} \frac{n}{n^3 + 1} \right| \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$.

פרק 8

טורי חזקות

8.1 מצואת תחום ההתכנסות של טור חזקות

81. נניח שבטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ כמעט כל המקדמים c_n שונים מ-0. הוכח כי $R^2 =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+2}} \right|$$

82. מצא את רדיוס ההתכנסות, את המקדם הכללי c_n ואת קטע ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (4x + 1)^n$$

תשובה: $R = \frac{1}{4}$, $(-\frac{1}{2}, 0)$

83. מצא את רדיוס ההתכנסות, את המקדם הכללי c_n ואת קטע ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x-2)^n}{n}$$

תשובה: $R = \frac{1}{3}$, $(\frac{1}{3}, 1)$

84. מצא את רדיוס ההתכנסות, את המקדם הכללי c_n ואת קטע ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$$

תשובה: $R = 10$, $(-8, 12)$

85. מצא את רדיוס ההתכנסות, את המקדם הכללי c_n ואת קטע ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n.$$

תשובה: $R = \frac{1}{2}$, $(-0.5, 0.5)$

86. מצא את רדיוס ההתכנסות, את המקדם הכללי c_n ואת קטע ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}.$$

תשובה: $R = 1, (-1, 1)$

87. מצא את רדיוס ההתכנסות, את המקדם הכללי c_n ואת קטע ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{n}$$

תשובה: $R = 1$, $(-3, -1)$

88. מצא את רדיוס ההתכנסות, את המקדם הכללי c_n ואת קטע ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}3^n}$$

תשובה: $R = 3$, $(-3, 3)$

89. מצא את רדיוס ההתכנסות, את המקדם הכללי c_n ואת קטע ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$$

תשובה: $R = 1$, $(0, 2)$

90. מצא את רדיוס ההתכנסות, את המקדם הכללי c_n ואת קטע ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}.$$

תשובה: $R = \infty$, $(-\infty, \infty)$

91. מצא את רדיוס ההתכנסות, את המקדם הכללי c_n ואת קטע ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}.$$

תשובה: $R = \infty$, $(-\infty, \infty)$

92. מצא את רדיוס ההתכנסות, את המקדם הכללי c_n ואת קטע ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

תשובה: $R = \infty$, $c_n = \frac{1}{(n-1)!}$, $(-\infty, \infty)$

פתרון: כדי למצוא את רדיוס ההתכנסות, נוח לכתוב את הטור בצורה $x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. ככה רואים שרדיוס ההתכנסות של הטור הנתון שווה לרדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, שהוא בתורו שווה ל-

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

העת, נרשום את הטור בצורה תקינה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = \left\| \begin{array}{l} m := n+1 \\ m = 1, 2, \dots \\ n = m-1 \end{array} \right\| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{(m-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$$

לכן $c_n = \frac{1}{(n-1)!}$

93. מצא את רדיוס ההתכנסות, את המקדם הכללי c_n ואת קטע ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n^2 + 3}}$$

תשובה: $c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 3}}, R = 1, (-1, 1)$

פתרון:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^2 + 3}}{\sqrt{n^2 + 3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2 + 2n + 4}{n^2 + 3}} = 1$$

מרכז הטור הוא $x = 0$, לכן תחום ההתכנסות הוא $(-1, 1) = (0 - 1, 0 + 1)$.

94. מצא את רדיוס ההתכנסות, את המקדם הכללי c_n ואת קטע ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}$$

תשובה: $R = 5$, $(-8, 2)$

95. מצא את רדיוס ההתכנסות, את המקדם הכללי c_n ואת קטע ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n(n^2 + 1)}.$$

תשובה: $R = 4$, $(-4, 4)$

96. מצא את רדיוס ההתכנסות, את המקדם הכללי c_n ואת קטע ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$$

תשובה: $R = 1$, $(-1, 1)$

97. מצא את רדיוס ההתכנסות, את המקדם הכללי c_n ואת קטע ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-4)^n.$$

תשובה: $R = 1$, $(3, 5)$

8.2 פיתוח פונקציות שונות לטור חזקות

בפרק הזה ניתן להשתמש בנוסחאות הבאות:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1, \\ e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.\end{aligned}$$

98. נגדיר פונקציה $f(x)$ ע"י הנוסחה

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\cos(x^3) - 1}{x^6} & \text{for } x \neq 0; \\ -\frac{1}{2} & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

מצא את חמשת האיברים הראשונים של פיתוח Taylor של $f(x)$ בנקודה $x = 0$.

תשובה: $-\frac{1}{2} + \frac{x^6}{24} - \frac{x^{12}}{720} + \frac{x^{18}}{40320} - \frac{x^{24}}{3628800} + \dots$

פתרון: בנוסחה $\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ נציב $t = x^3$. כדי למצוא חמישה איברים ראשונים השונים מאפס, נקח $0 \leq n \leq 5$:

$$\cos(x^3) - 1 = 1 - \frac{x^6}{2!} + \frac{x^{12}}{4!} - \frac{x^{18}}{6!} + \frac{x^{24}}{8!} - \frac{x^{30}}{10!} + \dots - 1 =$$

$$= -\frac{x^6}{2!} + \frac{x^{12}}{4!} - \frac{x^{18}}{6!} + \frac{x^{24}}{8!} - \frac{x^{30}}{10!} + \dots$$

נחלק את שני האגפים ב- x^6 :

$$\frac{\cos(x^3) - 1}{x^6} = -\frac{1}{2!} + \frac{x^6}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \frac{x^{18}}{8!} - \frac{x^{24}}{10!} + \dots =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{x^6}{24} - \frac{x^{12}}{720} + \frac{x^{18}}{40320} - \frac{x^{24}}{3628800} + \dots$$

99. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = \sin(x/2)$ סביב הנקודה $x = 0$. מצא

את תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

תשובה: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}$ עבור כל x .

100. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = e^x$ סביב הנקודה $x = -1$. מצא את

תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

תשובה:
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{e \cdot n!}$$
 עבור כל x .

פתרון: נסמן $t := x + 1$, אזי
$$e^{t-1} = e^{-1}e^t = e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

101. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = x^2 e^{2x}$ סביב הנקודה $x = 0$. מצא

את תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

תשובה: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{(n-2)!} x^n, (-\infty, \infty)$

פתרון:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 e^{2x} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^{n+2} = \left\| \begin{array}{l} m := n+2 \\ n = m-2 \\ m = 2, 3, \dots \end{array} \right\| = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2^{m-2}}{(m-2)!} x^m = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{(n-2)!} x^n \end{aligned}$$

102. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ סביב הנקודה $x = 0$. מצא

את תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

תשובה: $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ עבור $|x| < 1$.

פתרון: ע"י ההצבה $x^2 =: t$ מגיעים לטו ההנדסי שסכומו ידוע לנו:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

103. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ סביב הנקודה $x = 0$. מצא

את תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

תשובה: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n, (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

פתרון: נבצע את ההצבה $t := 2x$: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n$. $\frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1+t} \stackrel{0}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$. הטור מתכנס עבור $|t| < 1$ או $|2x| < 1$.

104. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ סביב הנקודה $x = 1$. מצא

את תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

תשובה: $\frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} (x-1)^n$ עבור $-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$.

פתרון: נגדיר משתנה חדש $t := x - 1$. אזי $x = t + 1$ ולכן

$$f(t+1) = \frac{1}{3+2t} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{2t}{3}} \stackrel{0}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} (x-1)^n.$$

נמצא את רדיוס ההתכנסות של הטור:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^{n+2}}{2^{n+1}} \right) = \frac{3}{2},$$

לכן הפתוח מציג את הפונקציה כאשר $|x-1| < \frac{3}{2}$.

105. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{3+2x}$ סביב הנקודה $x = 0$. מצא

את תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

תשובה: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} x^n, R = \frac{3}{2}, (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

פתרון:

$$\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{2}{3}x)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}x\right)^n = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} x^n$$

לכן $c_n = (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}}$ ורדיוס ההתכנסות שווה ל-

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^{n+2}}{2^{n+1}} \right) = \frac{3}{2}$$

106. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2-3x^2}$ סביב הנקודה $x = 0$. מצא

את תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

תשובה: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} x^{2n}$, $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

פתרון: נגדיר $t := x^2$ אזי

$$\frac{1}{2-3x^2} = \frac{1}{2-3t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{2}t} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} (x^2)^n$$

107. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+2}$ סביב הנקודה $x=0$.

מצא את תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

תשובה: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} + 1 \right) x^n, (-1, 1)$.

פתרון: לכן, $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$

$$\frac{2x+3}{x^2+3x+2} = \frac{2(x+1)+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x+2} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+\frac{x}{2}} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$$

108. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-4x+3}$ סביב הנקודה $x=2$.

מצא את תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

$$\text{תשובה: } \mathcal{D} = (1, 3), \sum_{n=0}^{\infty} (-7(x-2)^{2n} - 2(x-2)^{2n+1})$$

פתרון: נגדיר $t := x - 2$, אזי $x = t + 2$ ואז

$$\begin{aligned} f(t+2) &= \frac{2(t+2)+3}{(t+2)^2-4(t+2)+3} = \frac{2t+7}{t^2-1} = -\frac{2t+7}{1-t^2} \\ &= -(2t+7) \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} = -2t \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} - 7 \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-7t^{2n} - 2t^{2n+1}) \end{aligned}$$

כדי למצוא את רדיוס הכנסות, נשתמש וסחה שקבלנו בשאלה 1 של ודת בית פר חמש:

$$.R^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{2n}}{c_{n+2}} \right| = \left| \frac{-7}{-7} \right| = 1$$

109. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ סביב הנקודה $x = 2$. מצא את

תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

תשובה: $\mathcal{D} = (0, 4), \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$

פתרון: נגדיר $t := x - 2$

$$f(t+2) = \frac{1}{t+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$$

רדיוס ההתכנסות שווה ל-2 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} = 2$ לכן תחום ההתכנסות מוגדר ע"י אי-שוויון $|x-2| < 2$.

110. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = \ln(x+1)$ סביב הנקודה $x = 0$.

מצא את תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

$$\mathcal{D} = (-1, 1), \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: לפי משפט על האינטגרציה איבר-איבר של טורי חזקות,

$$\begin{aligned} \ln(x+1) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} \stackrel{0}{\sim} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

111. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ סביב הנקודה

$x = 0$. מצא את תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

תשובה: $x^3 - 2x^2 - 5x + 4 = 4 - 5x - 2x^2 + x^3$ עבור כל x .

פתרון:

$$f(0) = x^3 - 2x^2 - 5x + 4 \Big|_{x=0} = 4$$

$$f'(0) = 3x^2 - 4x - 5 \Big|_{x=0} = -5$$

$$f''(0) = 6x - 4 \Big|_{x=0} = -4$$

$$f'''(0) = 6$$

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad n > 3$$

לפי נוסחת Taylor,

$$c_0 = \frac{f(0)}{0!} = 4$$

$$c_1 = \frac{f'(0)}{1!} = -5$$

$$c_2 = \frac{f''(0)}{2!} = -2$$

$$c_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = 1$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0 \quad n > 3$$

112. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ סביב הנקודה

$x = 2$. מצא את תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

תשובה: $x^3 - 2x^2 - 5x + 4 = -6 - (x - 2) + 4(x - 2)^2 + (x - 2)^3$ לכל x .

פתרון:

$$f(2) = x^3 - 2x^2 - 5x + 4 \Big|_{x=2} = -6$$

$$f'(2) = 3x^2 - 4x - 5 \Big|_{x=2} = -1$$

$$f''(2) = 6x - 4 \Big|_{x=2} = 8$$

$$f'''(2) = 6$$

$$f^{(n)}(2) = 0 \quad n > 3$$

לפי נוסחת Taylor,

$$c_0 = \frac{f(2)}{0!} = -6$$

$$c_1 = \frac{f'(2)}{1!} = -1$$

$$c_2 = \frac{f''(2)}{2!} = 4$$

$$c_3 = \frac{f'''(2)}{3!} = 1$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = 0 \quad n > 3$$

113. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = \cos \sqrt{x}$ סביב הנקודה $x = 0$. מצא

את תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

תשובה: $\mathcal{D} = (-\infty, +\infty), \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$

פתרון: נגדיר $\sqrt{x} =: t$, ועתה נשתמש את פיתוח Taylor עבור פונקציה $\cos t$:

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$$

114. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = \cos^2 x$ סביב הנקודה $x = 0$. מצא

את תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

תשובה: $\mathcal{D} = (-\infty, +\infty), 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$

פתרון: נשתמש בזהות $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$$

115. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ סביב הנקודה $x = 0$. מצא

את תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

116. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ סביב הנקודה $x = 0$. מצא את

תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

$$\mathcal{D} = (-\infty, +\infty), \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

117. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = (1+x)e^{-x}$ סביב הנקודה $x = 0$.

מצא את תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

תשובה: $(1+x)e^{-x} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(n-2)!}$ עבור כל x .

פתרון:

$$(1+x)e^{-x} = (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} + x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!} =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} m := n+1 \\ n = m-1 \\ m = 1, 2, \dots \end{array} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} x^m}{(m-1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n-1)!} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n-1)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} \right] x^n =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n!} - \frac{n}{n!} \right] x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1-n}{n!} x^n = \\
&= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1-n}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n!} x^n = \\
&= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(n-2)!}.
\end{aligned}$$

הפתוח לטור חזקות של הפונקציה e^x מתכנס בכל הישר $\mathbb{R}$, לכן גם הטור שקבלנו מתכנס בכל $\mathbb{R}$, ז"א

$$R = \infty$$

* * *

ניתן לבדוק את האיבריים הראשוניים של הפיתוח ע"י תוכנה MAXIMA. לדוגמה:

```
define(f(x), (1+x)*%e^(-x));
```

```
taylor(f(x), x, 0, 10);
```


118. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = \ln(1 - x^2)$ סביב הנקודה $x = 0$.

מצא את תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

תשובה: $\ln(1 - x^2) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$ עבור $|x| < 1$

פתרון: נגדיר $t := -x^2$ אזי

$$\ln(1 + t) \stackrel{0}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x^2)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$$

* * *

ניתן לבדוק את האיברים הראשונים של הפיתוח ע"י תוכנה MAXIMA. לדוגמה:

```
define(f(x),log(1-x^2));
```

```
taylor(f(x),x,0,20);
```

119. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $\ln \sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}}$ סביב הנקודה $a = 0$. מצא את

תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

$$\text{תשובה: } \ln \sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{עבור } |x| < 1$$

פתרון: קודם כל $\ln \sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{5} [\ln(1+x) - \ln(1-x)]$. עתה אפשר להשתמש בפיתוח של הפונקציה

$\ln$ בנקודה $x = 0$:

$$\begin{aligned} \ln \sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}} &= \frac{1}{5} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] = \\ &= \frac{1}{5} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x)^n}{n} \right) = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^{n+1} + 1] \frac{x^n}{n} = \\ &= \frac{2}{5} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{2m+1}. \end{aligned}$$

120. מצא את פיתוח Taylor של הפונקציה $f(x) = \ln(x^2 - 10x + 9)$ סביב הנקודה

$x = 0$. מצא את תחום ההתכנסות של הטור שקבלת.

$$\mathcal{D} = (-1, 1), 2 \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-9^n}{n \cdot 9^n} x^n \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: עבור $|x| < 1$ מתקיים

$$\ln(x^2 - 10x + 9) = \ln[(1-x)(9-x)] = \ln(1-x) + \ln(9-x) =$$

$$= \ln(1-x) + \ln\left(1 - \frac{x}{9}\right) + 2 \ln 3 =$$

$$= 2 \ln 3 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 9^n}.$$

121. ב"ע טורי Taylor, חשב את הנגזרת $f^{(84)}(0)$ של הפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

122. ב"ע טורי Taylor, חשב את הנגזרת $f^{(m)}(0)$ של הפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

123. ב"ע טורי Taylor, חשב את הנגזרת $f^{(7)}(0)$ של הפונקציה

$$f(x) = x \cos(2x).$$

$$f^{(7)}(0) = -7 \cdot 4^3 = -448 \quad \text{תשובה:}$$

פתרון: לפי נוסחת Taylor, $f^{(7)}(0) = 7! \cdot c_7$, כאשר c_7 מקדם של x^7 בפיתוח של f סביב $x = 0$. פיתוח

$$\begin{aligned} \text{של } \cos x \text{ לטור חזקות ידוע: } \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{לכן} \\ x \cos 2x &= x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{2n+1}}{(2n)!} \\ c_7 &= (-1)^3 \frac{4^3}{6!} \quad \text{לכן} \end{aligned}$$

* * *

בדיקת התשובה ב"ע התוכנה MAXIMA:

```
define(fpr(x),diff(x*cos(2*x),x,7));
```

```
fpr(0);
```

124. ב"ע טורי Taylor, חשב את הנגזרת $f^{(11)}(0)$ של הפונקציה

$$f(x) = x^2 e^{3x}.$$

$$f^{(11)}(0) = 3^9 \cdot 10 \cdot 11 = 2165130 \quad \text{תשובה:}$$

פתרון: לפי נוסחת Taylor, $f^{(11)}(0) = 11! \cdot c_{11}$ כאשר c_{11} מקדם לפני x^{11} בפיתוח של הפונקציה

$$f(x) = x^2 e^{3x} \quad \text{לטור חזקות ליד } x = 0 \text{ נקבל את הפתוח:}$$

$$f(x) = x^2 e^{3x} = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^{n+2}}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1} x^n}{(n-2)!}$$

$$\text{המקדם לפני } x^{11} \text{ שווה הוא } c_{11} = \frac{3^9}{9!}, \text{ לכן } f^{(11)}(0) = 11! \cdot \frac{3^9}{9!}.$$

* * *

בדיקה של התשובה ב"ע התוכנה MAXIMA:

```
define(fpr(x),diff(x^2*e^(3*x),x,11));
```

```
fpr(0);
```

125. ב"ע טורי Taylor, חשב את הנגזרות $f^{(18)}(0)$ ו- $f^{(21)}(0)$ של הפונקציה $f(x) =$

$$\ln(1 + x^2)$$

126. ב"ע טורי Taylor, חשב את הנגזרות $f^{(88)}(0)$ ו- $f^{(90)}(0)$ של הפונקציה $f(x) = \cos(x^2)$.

$$\cos(x^2)$$

$$f^{(90)}(0) = 0, f^{(88)}(0) = \frac{88!}{44!} \quad \text{תשובה:}$$

$$(f^{(88)}(0) = 697756557368144618732131585312709778643083201950658588769407996002304000000000000)$$

פתרון: לפי נוסחת Taylor, $f^{(88)}(0) = 88! \cdot c_{88}$, כאשר c_{88} מקדם לפני x^{88} בפיתוח של הפונקציה

$$f(x) = \cos(x^2) \quad \text{לטור חזקות ליד } x = 0. \text{ נקבל את הפתוח:}$$

$$\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}.$$

$$f^{(88)}(0) = 88! \cdot c_{88} = 88! \cdot \frac{1}{44!} \quad \text{ולכן } c_{88} = \frac{(-1)^{22}}{(2 \cdot 22)!} = \frac{1}{44!} \quad \text{ז"א ש- } n = 22 \text{ צריך לשים}$$

כדי למצוא את המקדם c_{90} , נרשום את הקטע הרלוונטי של הפיתוח:

$$\cdots + \frac{x^{88}}{44!} - \frac{x^{92}}{46!} + \cdots$$

$$f^{(90)}(0) = 0 \quad \text{לכן } c_{90} = 0. \quad \text{ז"א ש- } c_{90} = 0 \text{ אינו מופיע בסכום,}$$

* * *

בדיקה של התשובה ב"ע התוכנה MAXIMA (התוכנה מודיעה על שגיאה, אבל זה לא מפריע):

```
define(fpr(x),diff(cos(x^2),x,88));
```

```
fpr(0)-88!/44!;
```

```
define(fpr(x),diff(cos(x^2),x,90));
```

```
fpr(0);
```

127. מצא את המקדם c_6 עבור טור Maclaurin של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3) - x^3}{x^9} & x \neq 0 \\ -\frac{1}{6} & x = 0 \end{cases}$$

תשובה: $c_6 = \frac{1}{120}$

פתרון: בפיתוח

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{5040} + \dots$$

נציב $t = x^3$

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x^3) - x^3}{x^9} &= \frac{x^3 - \frac{x^9}{6} + \frac{x^{15}}{120} - \frac{x^{21}}{5040} + \dots - x^3}{x^9} = \\ &= \frac{-\frac{x^9}{6} + \frac{x^{15}}{120} - \frac{x^{21}}{5040} + \dots}{x^9} = -\frac{1}{6} + \frac{x^6}{120} - \frac{x^{12}}{5040} + \dots \end{aligned}$$

המקדם של x^6 שווה $c_6 = \frac{1}{120}$

128. נגדיר פונקציה $f(x)$ ע"י הנוסחה

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{for } x \neq 0; \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

בעזרת חישוב נגזירות, $f^{(n)}(0)$, מצא את פיתוח Taylor של $f(x)$ בנקודה $x = 0$. האם $f(x)$ אנליטית בנקודה הזו?

תשובה: פונקציה אינה אנליטית.

פתרון: נשתמש בנוסחת Taylor: $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. הנגזרת שווה לצירוף לינארי ממשי של ביטויים כמו $x^{-2m+1} e^{-\frac{1}{x^2}}$ כאשר $m \in \mathbb{N}$. לכן מספיק לחשב את הגבול של ביטוי הזה עבור $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-2m+1} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-2m+1}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{-2m+1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-2m+3}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$$

לאחר ששתמש בכלל l'Hôpital עוד כמה פעמים, נקבל

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-2m+1} e^{-\frac{1}{x^2}} = A \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$$

הגענו למסקנה שפיתוח של הפונקציה הוא טור אפס. אבל הפונקציה אצמה שונה בכל סביבה של 0, לכן

היא לא אנליטית בנקודה זו.

129. בעזרת גזירה או אינטגרציה איבר-איבר, מצא את הסכום $s(x)$ ואת תחום ההתכנסות

של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$

תשובה: $s(x) = \ln x$, $(0, 2)$.

פתרון: נסמן $y := x - 1$ ונתבונן את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}y^n}{n}$. לפי משפט על אינטגרציה איבר-איבר, הטור

מתכנס לאינטגרל

$$\int_0^y \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \int_0^y \frac{dt}{1+t} = \ln(1+y) = \ln x$$

130. בעזרת גזירה או אינטגרציה איבר-איבר, מצא את הסכום $s(x)$ ואת תחום ההתכנסות

$$\text{של הטור } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\text{תשובה: } s(x) = 2 \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \text{ עבור } |x| < 1$$

$$\text{פתרון: } c_m = \begin{cases} 0, & m = 2n \\ \frac{4}{m}, & m = 2n+1 \end{cases} \text{ לכן } R = 1, R^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n+3}{2n+1} \right| = 1$$

$$\text{בגלל ש-} \sum_{n=0}^{\infty} 4x^{2n} \text{ פונקציית הסכום } s(x) \text{ שווה ל-} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4x^{2n+1}}{2n+1} \right)'$$

$$s(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} 4t^{2n} dt = 4 \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = 2 \left(\int_0^x \frac{dt}{1-t} + \int_0^x \frac{dt}{1+t} \right)$$

$$= 2(-\ln|1-x| + \ln|1+x|) = 2 \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

הטור הנתון מתכנס בקטע $(-1, 1)$ לכן אין צורך בסימן של הערך המוחלט.

* * *

ניתן לבדוק את האיברים הראשונים של הפיתוח ע"י תוכנה MAXIMA. לדוגמה:

```
define(f(x), 2*log((1+x)/(1-x)));
```

```
taylor(f(x), x, 0, 9);
```

131. בעזרת גזירה או אינטגרציה איבר-איבר, מצא את הסכום $s(x)$ ואת תחום ההתכנסות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n} \quad \text{של הטור}$$

תשובה: $s(x) = -0.5 \ln(1 - x^2)$ עבור $|x| < 1$.

פתרון:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n} &= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-1} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n+1} dt = \int_0^x t \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} dt = \int_0^x \frac{t dt}{1 - t^2} = \\ &= \left\| \begin{array}{l} u := 1 - t^2 \\ du = -2t dt \\ t = 0 \implies u = 1 \\ t = x \implies u = 1 - x^2 \end{array} \right\| = -\frac{1}{2} \int_1^{1-x^2} \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \ln |u| \Big|_1^{1-x^2} = \\ &= -\frac{1}{2} (\ln |1 - x^2| - \ln 1) = -\frac{1}{2} \ln |1 - x^2|. \end{aligned}$$

תחום ההתכנסות של הטור הוא $|x| < 1$, לכן ניתן לבטל את הסימן של הערך המוחלט.

הערה: ההחלפה באינטגרל המסויים היא חוקית, בגלל שהאינטגרציה מבוצעת על הקטע $[0, x]$ או על הקטע

$[x, 0]$, תלוי בסימן של x , והפונקציה $u(t) = 1 - t^2$ מונוטונית בקטע הזה.

* * *

ניתן לבדוק את האיברים הראשונים של הפיתוח ע"י תוכנה MAXIMA. לדוגמה:

```
define(f(x), -0.5*log(1-x^2));
```

```
taylor(f(x), x, 0, 20);
```

132. בעזרת גזירה או אינטגרציה איבר-איבר, מצא את הסכום $s(x)$ ואת תחום ההתכנסות

$$\text{של הטור } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n.$$

$$\text{תשובה: } s(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \text{ עבור } |x| < 1.$$

$$\text{פתרון: אינטגרציה האיבר-איבר של הטור } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n \text{ נותנת את הטור } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+1} =$$

$$\text{לכן } x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = x \cdot \frac{1}{1 - (-x)} = \frac{x}{1+x}$$

$$s(x) = \left(\frac{x}{1+x} \right)' = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

* * *

ניתן לבדוק את האיברים הראשונים של הפיתוח ע"י תוכנה MAXIMA. לדוגמה:

```
define(f(x),(1/(1+x))^2);
```

```
taylor(f(x),x,0,9);
```


133. בעזרת גזירה או אינטגרציה איבר-איבר, מצא את הסכום $s(x)$ ואת תחום ההתכנסות

$$\text{של הטור } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n x^{2n-1}$$

תשובה: $s(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ עבור $|x| < 1$.

פתרון:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n x^{2n-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2n x^{2n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \right)' = \\ &= \left(\frac{1}{1 - (-x^2)} \right)' = \left(\frac{1}{1 + x^2} \right)' = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}. \end{aligned}$$

תחום ההתכנסות של הטור $\frac{1}{1+x^2}$ הוא הקטע $(-1, 1)$. לפי המשפט על גזירת טורים איבר-איבר, לטור הנתון יש אותו תחום ההתכנסות.

חלק IV

חשבון של פונקציות של כמה משתנים

פרק 9

גבולות. פונקציות רציפות

- הקבוצה $B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$ נקראת הכדור (הפתוח) מרדיוס $r > 0$ עם המרכז בנקודה $a \in \mathbb{R}^n$.

- נאמר ש- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ אם עבור כל $\varepsilon > 0$ ניתן למצוא $\delta > 0$ כך ש-

$$x \in B(a, r) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

- פונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה (או סביב נקודה) a אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

- נקודה פנימית עבור קבוצה $X \subseteq \mathbb{R}^n$ אם קיים מספר $r > 0$ כך ש- $B(a, r) \subset X$.

- משפט כל פונקציה אלמנטרית רציפה בנקודות פנימיות של תחום הגדרתה D_f .

- קבוצה $X \subset \mathbb{R}^n$ חסומה אם קיים מספר $R > 0$ כך ש- $X \subset B(0, R)$.

- משפט Weierstraß לכל פונקציה רציפה יש מונומיום ומכסימום בתחום חסום וסגור.

•

- משפט נניח שהגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ קיים.

$$\text{אזי } S \ni a \text{ עבור כל קבוצה } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in S}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

המשפט הזה עוזר בהרבה מקרים להוכיח שלפונקציה $f(x)$ אין גבול בנקודה $x = a$.

134. חשב את הגבול $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

פתרון:

נסמן $\sqrt{y} =: B, \sqrt{x} =: A$ אזי $y = B^2, x = A^2$. נציב הכל בביטוי שלנו:

$$\begin{aligned} \frac{x - y + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \frac{A^2 - B^2 + 2A - 2B}{A - B} = \frac{(A^2 - B^2) + 2(A - B)}{A - B} = \\ &= \frac{(A - B)(A + B) + 2(A - B)}{A - B} = A + B + 2 = \sqrt{x} + \sqrt{y} + 2. \end{aligned}$$

לכן

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq y}} \frac{x - y + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sqrt{x} + \sqrt{y} + 2) = (\sqrt{x} + \sqrt{y} + 2) \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 2.$$

135. חשב את הגבול $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x + y \sin \frac{1}{x} \right)$

תשובה: 0

פתרון:

1. כדי לנחש את הגבול (אם הוא קיים!), נחשב את הגבול לאורך של היציר x . בשביל זה נקבע $y = 0$

ונחשב את הגבול של $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0)$ של הפונקציה $f(x, 0)$, כפונקציה בת משתנה אחד:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + 0 \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

לכן אם הגבול $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x + y \sin \frac{1}{x} \right)$ קיים, הוא שווה ל-0.

2. נוכיח ש- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x + y \sin \frac{1}{x} \right) = 0$. לפי אי-שוויון המשולש,

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= |f(x, y)| = \left| x + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + \left| y \sin \frac{1}{x} \right| = \\ &= |x| + |y| \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y| \end{aligned}$$

כי $|\sin \alpha| \leq 1$ עבור כל α .

ברור שכאשר $(x, y) \in B\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, מתקיים $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$ וגם $|y| < \frac{\varepsilon}{2}$. לכן $|f(x, y)| \leq |x| + |y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

3. מסקנה: עבור כל מספר $\varepsilon > 0$,

$$(x, y) \in B\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |f(x, y)| < \varepsilon.$$

זה בדיוק אומר ש- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x + y \sin \frac{1}{x} \right) = 0$.

פרק 10

חשבון דיפרנציאלי

10.1 הדיפערענציאל. נגזרות חלקיות. הגראדיענט

136. מצא את $\text{grad } f$ ואת

10.2 נגזרות חלקיות מסדרים גבוהים

את הנגזרות הגבהות של הפונקציה הסתומה $u(x, y)$ המוגדרת ע"י משוואה $F(x, y, u) = 0$ ניתן למצוא ב"ע

הנוסחאות

$$u''_{xx} = \frac{2F''_{xu}F'_xF'_u - F''_{xx}(F'_u)^2 - F''_{uu}(F'_x)^2}{(F'_u)^3}$$

$$u''_{xy} = \frac{F''_{xu}F'_yF'_u + F''_{yu}F'_xF'_u - F''_{xy}(F'_u)^2 - F''_{uu}F'_xF'_y}{(F'_u)^3}$$

$$u''_{yy} = \frac{2F''_{yu}F'_yF'_u - F''_{yy}(F'_u)^2 - F''_{uu}(F'_y)^2}{(F'_u)^3}$$

137. חשב את הנגזרות השניות של הפונקציה $f(x, y) = x^2y + y^3$.

138. חשב את הנגזרת f_{xyz}^{IV} עבור הפונקציה $f(x, y, z) = z^2 e^x + y^2$.

139. חשב את הנגזרות f'''_{xy} ו- f'''_{xxy}

עבור הפונקציה $f(x, y) = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$.

140. מצא את הדיפרענציאל השני $d_a^2 u$ בנקודה $a = (3, -2)$ של הפונקציה הסתומה

$$u(x, y) \text{ המוגדרת ע"י המשוואה } u^3 - xu + y = 0 \text{ יחד עם התנאי } u(a) = 2.$$

$$d_{(3,-2)}^2 u = \frac{4}{243} (dx)^2 + \frac{16}{243} dx dy - \frac{8}{243} (dy)^2 \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: נסמן $F(x, y, u) := u^3 - xu + y$, אזי

$$F'_x = -u$$

$$F'_y = 1$$

$$F'_u = 3u^2 - 3$$

$$F''_{xx} = F''_{yy} = F''_{yu} = F''_{xy} = 0$$

$$F''_{xu} = -1$$

$$F''_{uu} = 6u$$

לכן

$$u''_{xx}(3, -2) = \frac{2 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (3 \cdot 2^2 - 3) - 6 \cdot 2 \cdot (-2)^2}{(3 \cdot 2^2 - (-2))^3} = -\frac{4}{243}$$

$$u''_{xy}(3, -2) = \frac{(-1) \cdot 1 \cdot (3 \cdot 2^2 - 3) - 6 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 1}{(3 \cdot 2^2 - (-2))^3} = \frac{8}{243}$$

$$u''_{yy}(3, -2) = \frac{-6 \cdot 2 \cdot 1^2}{(3 \cdot 2^2 - (-2))^3} = -\frac{8}{243}$$

$$\begin{aligned}d_{(3,-2)}^2 u &= u''_{xx}(3, -2) (dx)^2 + 2u''_{xy}(3, -2) dx dy + u''_{yy}(3, -2) (dy)^2 = \\&= \frac{4}{243} (dx)^2 + \frac{16}{243} dx dy - \frac{8}{243} (dy)^2\end{aligned}$$

10.3 כלל השרשרת

141. נתונה פונקציה גזירה בת שני משתנים $f(x, y)$. נסמן ב- $\varphi(x)$ את הפונקציה של

משתנה x המוגדרת ע"י הכלל $\varphi(x) := f(x, x)$. מצה את הנגזרת $\varphi'(x)$.

$$\text{תשובה: } \varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x)$$

פתרון: נסמן זמנית את המשתנים של הפונקציה f באותיות u ו- v : $f(u, v)$. נניח שכל אחד משני

המשתנים הוא בעצמו פונקציה של משתנה אחר, x : $u(x), v(x)$. אזי, לפי כלל השרשרת,

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx} f[u(x), v(x)] = \frac{\partial f}{\partial u}[u(x), v(x)] u'(x) + \frac{\partial f}{\partial v}[u(x), v(x)] v'(x)$$

כאשר $\frac{df}{dx}, u'(x)$ וגו' מסמן את הנגזרת של פונקציה של משתנה אחד ויחיד x . בשאלה שלנו נתון ש- $u(x) = x$

וגם $v(x) = x$, לכן $u'(x) = v'(x) = 1$, לכן

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial v}(x, x) \quad \text{אם נחזור לאומיות } x \text{ ו- } y, \text{ נקבל בסוף}$$

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x).$$

הערה: התרגיל הזה מלמד אותנו את ההבדל בין הסימן $\frac{\partial f}{\partial x}$ (נגזרת חלקית) לבין הסימן $\frac{df}{dx}$ (נגזרת מלאה).

142. נתונה פונקציה $f(u, v) = \ln(u^2 + v)$ והעתקה $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ע"י הנוסחאות

$$u(x, y) = e^x + y^2, v(x, y) = x^2 + y. \text{ מצא את הנגזרות } (f \circ g)'_x \text{ ו- } (f \circ g)'_y.$$

10.4 נקודות קיצון

נקודה רכיטית נקודה $a \in \mathcal{D}_f$ שבה כל נגזרת ראשונה של $f(x)$ אינה קיימת או שווה ל-0. כל נקודת קיצון היא נקודה קריטית.

מטריצת Hesse המטריצה הבנויה מנגזרות שניות של הפונקציה $f(x)$ בנקודה a :

$$H_a(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)$$

תנאים מספיקים לקיצון בנקודה a נסמן ב- Δ_m את המינור הראשי מספר m של המטריצה הסימטרית $H_a(f)$.

- אם מינורים ראשיים כולם חיוביים, לפונקציה $f(x)$ יש מינימום בנקודה a .
- אם כל $\Delta_m > 0$ עבור m זוגי, וכל $\Delta_m < 0$ עבור m אי-זוגי, לפונקציה $f(x)$ יש מקסימום בנקודה $x = a$.

- אם $\Delta_m < 0$ עבור לפחות m זוגי אחד, $x = a$ היא נקודת אוכף של הפונקציה $f(x)$.

143. מצא נקודות קיצון של הפונקציה

$$f(x, y) = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2$$

תשובה: מקסימום בנקודה $(1, 0)$.

פתרון:

1. נקודות קריטיות:

$\text{grad } f = (2 - 2x + y, -1 + x - 2y)$. הגרדיאנט של f מוגדר בכל $\mathbb{R}^2$ לכן נקודות קריטיות נמצאות

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{array} \right. \quad \text{רק בין אפתרונות של המערכת}$$

הפתרון היחיד הוא $x = 1, y = 0$.

2. מצא את מטריצת Hesse:

$$H_{(1,0)}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{לכן } f''_{yy}(x, y) = -2, f''_{xy}(x, y) = 1, f''_{xx}(x, y) = -2$$

מצא את המינורים

הראשיים:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$$\Delta_1 = -2 < 0$$

לכן הנקודה $(1, 0)$ היא נקודת מקסימום.

144. מצא כל נקודות קיצון של הפונקציה

$$f(x, y) = 3x + 26y - x^2 - xy + y^2.$$

תשובה: לפונקציה $f(x, y)$ אין מינימום ואין מקסימום.

פתרון: נחשב את הנגזרות הראשונות ואת הנגזרות השניות של הפונקציה $f(x, y)$:

$$f'_x(x, y) = (3x + 26y - x^2 - xy + y^2)'_x = 2 - 2x - y$$

$$f'_y(x, y) = (3x + 26y - x^2 - xy + y^2)'_y = 26 - x + 2y$$

$$f''_{xx}(x, y) = (f'_x(x, y))'_x = (2 - 2x - y)'_x = -2$$

$$f''_{xy}(x, y) = (f'_x(x, y))'_y = (2 - 2x - y)'_y = -1$$

$$f''_{yy}(x, y) = (f'_y(x, y))'_y = (26 - x + 2y)'_y = 2$$

לכן

$$\text{grad } f = (3 - 2x - y, 6 - x + 2y)$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

הגענו למסקנה שהמספר Δ_2 שלילי עבור כל (x, y) , לכן לפונקציה $f(x, y)$ אין נקודות קיצון.

145. מצא כל נקודות קיצון של הפונקציה

$$f(x, y) = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x$$

תשובה: לפונקציה $f(x, y)$ יש מינימום בנקודה $(2, 4)$.

פתרון:

1. הפונקציה $f(x, y)$ מוגדרת בחצי המשור $y \geq 0$.

2. נחשב את הנגזרות הראשונות ואת הנגזרות השניות שלה:

$$f'_x(x, y) = (3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x)'_x = 6x - 2\sqrt{y} - 8$$

$$f'_y(x, y) = (3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x)'_y = -\frac{x}{\sqrt{y}} + 1$$

$$f''_{xx}(x, y) = (f'_x(x, y))'_x = (6x - 2\sqrt{y} - 8)'_x = 6$$

$$f''_{xy}(x, y) = (f'_x(x, y))'_y = (6x - 2\sqrt{y} - 8)'_y = -\frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$f''_{yy}(x, y) = (f'_y(x, y))'_y = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{y}}\right)'_y = \frac{x}{2\sqrt[3]{y}}$$

3. לכן

$$H(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{\sqrt{y}} \\ -\frac{1}{\sqrt{y}} & \frac{x}{2\sqrt[3]{y}} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2 = \det H(f) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 < 0.$$

4. נמצא את כל נקודות קריטיות. הפונקציה $f(x, y)$ גזירה בחצי משור פתוח $y > 0$, לכן נקודות קריטיות

הן פתרונות למשוואה $d_{(a,b)}f = 0$, או, שזה אותו דבר, למשוואה $\text{grad}_{(a,b)}(f) = 0$:

$$\text{grad } f = (6x - 2\sqrt{y} - 8, 1 - \frac{x}{\sqrt{y}}) = (0, 0)$$

5.

$$H_{(2,4)}(f) = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

לכן $\Delta_2 = \frac{1}{2} > 0$ ואז יש טעם להמשיך:

$$\Delta_1 = 6 > 0.$$

מסקנה: לפונקציה $f(x, y)$ יש מינימום בנקודה $(2, 4)$ ואין נקודות קיצון אחרות.

146. מצא נקודות קיצון לפונקציה $f(x, y) = (5 - 2x + y)e^{x^2 - y}$.

תשובה: לפונקציה $f(x, y)$ אין נקודות קיצון.

פתרון:

1. הפונקציה גזירה בכל המשור, לכן נקודות קריטיות שלה ראלו דמקיימות את התנאי $\text{grad}_a f = 0$.

2.

$$f'_x(x, y) = (-4x^2 + 2xy + 10x - 2)e^{x^2 - y}$$

$$f'_y(x, y) = (2x - y - 4)e^{x^2 - y}$$

$$\text{grad } f = \left((-4x^2 + 2xy + 10x - 2)e^{x^2 - y}, (2x - y - 4)e^{x^2 - y} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (-4x^2 + 2xy + 10x - 2)e^{x^2 - y} = 0 \\ (2x - y - 4)e^{x^2 - y} = 0 \end{array} \right.$$

לכן כדי למצוא נקודות קריטיות, צריך לפתור את מערכת המשוואות

בגלל שתמיד $e^{x^2 - y} \neq 0$, המערכת הזאת שכולה למערכת

$$\left\{ \begin{array}{l} -4x^2 + 2xy + 10x - 2 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{array} \right.$$

לפי המשוואה השנייה, $y = 2x - 4$. ההצבה במשוואה הראשונה נותנת משוואה עבור המשתנה x :

$$2x - 2 = 0$$

לכן לפונקציה $f(x, y)$ יש נקודה קריטית אחת: $a = (1, -2)$.

3. נמצא את מטריצת Hesse עבור f בנקודה $a = (1, -2)$:

$$f''_{xx}(x, y) = (-8x^3 + 4x^2y + 20x^2 - 12x + 2y + 10)e^{x^2-y}$$

$$f''_{xy}(x, y) = (2 + 4x^2 - 2xy - 8x)e^{x^2-y}$$

$$f''_{yy}(x, y) = (-2x + y + 3)e^{x^2-y}$$

לכן

$$H_a(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(1, -2) & f''_{xy}(1, -2) \\ f''_{xy}(1, -2) & f''_{yy}(1, -2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^3 & 2e^3 \\ 2e^3 & -e^3 \end{pmatrix}$$

כדי להשתמש בקריטריון Sylvester, נחשב קודם את המינור הראשי השני:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2e^3 & 2e^3 \\ 2e^3 & -e^3 \end{vmatrix} = -2e^6.$$

בגלל ש- $\Delta_2 < 0$, מגיעים למסקנה שבנקודה a לפונקציה $f(x, y)$ יש אוקף.

147. מצא את כל נקודות הקיצון של הפונקציה

$$f(x, y, z) = xyz(16 - x - y - 2z)$$

תשובה: לפונקציה $f(x, y, z)$ יש מכסימום בנקודה $(4, 4, 2)$.

פתרון:

1.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz(16 - 2x - y - 2z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz(16 - x - 2y - 2z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy(16 - x - y - 4z)$$

10.5 קיצין מותנה. שיטת כופלי Lagrange

בעיה היא: למצוא נקודות קיצון של פונקציה $f(x, y, z)$ כאשר המשתנים x, y, z אינם חופשיים, אלא יש בינם תלות:

$$g(x, y, z) = 0$$

המתכון :

1. נגדיר פונציה חדשה

$$L_\lambda(x, y, z) := f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

של המשתנים x, y, z ובנוסף, של עוד משתנה, נסמן אותו ב- λ .

2. מחפשים נקודות קריטיות $(x, y, z; \lambda)$ עבור הפונקציה $L_\lambda(x, y, z)$.

3. עבור כל הערך של λ רושמים את הדיפרענציאל השני d^2L_λ , שהוא תלוי ב- dx, dy, dz .

4. הדיפרענציאלים dx, dy, dz תלויים זה בזה ע"י האילוץ: $d\varphi = 0$.

5. רושמים את d^2L_λ כי ביטוי רבועי של שני דיפרענציאלים בלבד.

6. כותבים את מטריצת Hesse הרלוונטית וחוקרית אותה ב"ה שיטת Sylvester.

148. מצא נקודות קיצון מותנה של הפונקציה $f(x, y) = 1 - 4x - 8y$ תחת האילוץ

$$x^2 - 8y^2 = 8$$

תשובה: מקסימום מותנה בנקודה $(4, -1)$, מינימום מותנה בנקודה $(-4, 1)$.

פתרון:

1. נגדיר פונקצית עזר $L_\lambda(x, y) = 1 - 4x - 8y + \lambda(x^2 - 8y^2 - 8)$ ונסמן $g(x, y) = x^2 - 8y^2 - 8$.

2. נמצא את הנגזרות של פונקצית העזר $L_\lambda(x, y)$:

$$\frac{\partial L_\lambda}{\partial x} = -4 + 2\lambda x$$

$$\frac{\partial L_\lambda}{\partial y} = -8 - 16\lambda y$$

$$\frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x^2} = 2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial y^2} = -16\lambda$$

$$\frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x \partial y} = 0$$

3. נמצא את הנקודות הקריטיות לפונקציה $L_\lambda(x, y)$ כפונקציה של 3 משתנים: $d_P L_\lambda = 0$ אם ורק אם

קואורדינטות הנקודה $P(x, y)$ הן פתרונות למערכת המשוואות

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -8 - 16\lambda y = 0 \\ x^2 - 8y^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda x = 2 \\ 2\lambda y = -1 \\ x^2 - 8y^2 = 8 \end{cases}$$

בגלל ש- $\lambda \neq 0$ מותר לחלק ב- λ : $x = \frac{2}{\lambda}$, $y = -\frac{1}{2\lambda}$. הצבה של ביטויים האלו באילוץ $x^2 - 8y^2 = 8$ נותנת $8 = \frac{4}{\lambda^2} - \frac{8}{4\lambda^2}$ לכן $\lambda^2 = \frac{1}{4}$ לכן מקבלים שתי אפשרויות עבור λ :

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2}.$$

מהמשוואות $\begin{cases} x = \frac{2}{\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \end{cases}$ מקבלים שתי נקודות קריטיות: $P_1(4, -1)$ עבור λ_1 ו- $P_2(-4, 1)$ עבור λ_2 .

]

4. הדרגה של מטריצת יעקובי $J_{(\pm 4, \mp 1)}(g) = (\pm \frac{1}{4}, \mp 1)$ גדולה ביותר (ז"א שוואה ל-1) לכן ניתן להשתמש בשיטת כופלי [Lagrange].

5. הדפערענציאל השני של הפונקציה שווה ל-

$$d^2 L_\lambda = \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial y^2} (dy)^2 + 2 \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x \partial y} dx dy = 2\lambda (dx)^2 - 16\lambda (dy)^2$$

בין dx ו- dy יש יחס הנקבע ע"י התנאי $dg = 0$:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = 2x dx - 16y dy$$

לכן $2x dx = -16y dy$. בנקודות $P_1(4, -1)$ ו- $P_1(-4, 1)$ זה נותן $2 dy = -dx$ לכן

$$d_{P_1}^2 L_{\frac{1}{2}} = (dx)^2 - 8(dy)^2 = (dx)^2 - 8\left(-\frac{1}{2}dx\right)^2 = -(dx)^2 < 0$$

$$d_{P_2}^2 L_{-\frac{1}{2}} = -(dx)^2 + 8(dy)^2 = -(dx)^2 + 8\left(-\frac{1}{2}dx\right)^2 = (dx)^2 > 0$$

6. מסקנה: לפונקציה $f(x, y)$ יש מקסימום מותנה בנקודה $(4, -1)$ ויש מינימום מותנה בנקודה $(-4, 1)$.

149. מצא נקודות קיצון של הפונקציה $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ תחת האילוץ

$$.xyz = 108$$

פתרון:

1. נסמן $g(x, y, z) := xyz - 108$ ונגדיר פונקצית עזר $L_\lambda(x, y, z) := xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - 108)$.

2. נמצא נקודות קריטיות עבור הפונקציה של 4 משתנים $L_\lambda(x, y, z)$:

$$\text{grad } L_\lambda(x, y, z) = (y + 2z + \lambda yz, x + 2z + \lambda xz, 2x + 2y + \lambda xy, xyz - 108)$$

150. ידוע ששטח הפנים של קופסה שווה 10 מ"ר ושנפחה הוא גדול ביותר ההפשרי. מצא

את ממדיה של הקופסה.

$$\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} \quad \text{תשובה:}$$

פתרון:

1. נסמן ב- x, y, z את האורך, הרוחב והגובה של הקופסה. השאלה היא על קיום למקסימום של הפונקציה

$f(x, y, z) := xyz$ תחת באילוץ $xy + yz + zx = 5$ (צריך לזכור ש- $x > 0, y > 0, z > 0$ לפי טבע

השאלה).

נסמן $L_\lambda(x, y, z) := xyz + \lambda(xy + yz + zx - 5)$ אזי

$$(L_\lambda)'_x = yz + \lambda(y + z)$$

$$(L_\lambda)'_y = xz + \lambda(x + z)$$

$$(L_\lambda)'_z = xy + \lambda(x + y)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} yz = -\lambda(y + z) \\ xz = -\lambda(x + z) \\ xy = -\lambda(x + y) \\ xy + yz + zx = 5 \end{array} \right. \quad \text{או} \quad \left\{ \begin{array}{l} yz + \lambda(y + z) = 0 \\ xz + \lambda(x + z) = 0 \\ xy + \lambda(x + y) = 0 \\ xy + yz + zx = 5 \end{array} \right. \quad \text{לכן עלינו למצוא פתרונות למערכת המשוואות}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{x} = \frac{y+z}{x+z} \\ \frac{z}{y} = \frac{x+z}{x+y} \\ \frac{x}{z} = \frac{x+y}{y+z} \\ xy + yz + zx = 5 \end{array} \right. \quad \text{נחלק את השלוש המשוואות הראשונות אחת אל שני, נקבל את המערכת}$$

לפי המשמעות של הביעה המקורית, כל המכונים שונים מ-0. לכן המערכת האחרונה שקולה למערכת

$$\left\{ \begin{array}{l} yz = xz \\ zx = yx \\ xy = zy \\ xy + yz + zx = 5 \end{array} \right. \text{ סופית,} \quad \text{לכן} \quad \left\{ \begin{array}{l} y(x+z) = x(y+z) \\ z(x+y) = y(x+z) \\ x(y+z) = z(x+y) \\ xy + yz + zx = 5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x \\ z = y \\ x = z \\ xy + yz + zx = 5 \end{array} \right. .$$

ההצבה של השלוש משוואות הראשונות במשוואה הרביעית נותנת $3x^2 = 5$, אז שהנקודה החשודה לקיצון

$$\text{היא } P\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right) \\ \gamma - \lambda = -\frac{xy}{x+y} = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

2. מצא את הדיפרנציאל השני של הפונקציה

$$P. \text{ בנקודה } L_{-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}} = xyz - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}(xy + yz + zx)$$

$$\left(L_{-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}} \right)''_{xx} = 0 \\ \left(L_{-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}} \right)''_{xy} = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \right) z = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - \frac{5}{6}$$

$$\left(L_{-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}} \right)''_{xz} = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \right) y = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - \frac{5}{6} \\ \left(L_{-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}} \right)''_{yy} = 0 \\ \left(L_{-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}} \right)''_{yz} = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \right) x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - \frac{5}{6} \\ \left(L_{-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}} \right)''_{zz} = 0$$

$$\begin{aligned}
d^2 L_{-2\sqrt{\frac{3}{5}}} &= \left(L_{-2\sqrt{\frac{3}{5}}} \right)''_{xx} (dx)^2 + 2 \left(L_{-2\sqrt{\frac{3}{5}}} \right)''_{xy} dx dy + 2 \left(L_{-2\sqrt{\frac{3}{5}}} \right)''_{xz} dx dz + \\
&+ \left(L_{-2\sqrt{\frac{3}{5}}} \right)''_{yy} (dy)^2 + 2 \left(L_{-2\sqrt{\frac{3}{5}}} \right)''_{yz} dy dz + \left(L_{-2\sqrt{\frac{3}{5}}} \right)''_{zz} (dz)^2 = \\
&= \left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - \frac{5}{3} \right) (dx dy + dy dz + dz dx).
\end{aligned}$$

3. ועתה נזכור שהדיפרנציאלים dx, dy, dz תלויים לינארית בגלל האילוץ. כדי למצוא את התלות, מצא את

הדיפרנציאל של פונקצית האילוץ

$$g(x, y, z) = xy + yz + zx \text{ בנקודה } P.$$

$$\begin{aligned}
g'_x &= y + z = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \\
g'_y &= z + x = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \\
g'_z &= x + y = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

$$0 = dg = g'_x dx + g'_y dy + g'_z dz = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} (dx + dy + dz)$$

$$dx + dy + dz = 0$$

לכן $dz = -(dx + dy)$. ההצבה של השוויון הזה לביטוי של $d^2 L_{-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}}$ נותנת

$$\begin{aligned}
d^2 L_{-2\sqrt{\frac{3}{5}}} &= \left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - \frac{5}{3} \right) (dx dy - dy(dx + dy) - (dx + dy) dx) \\
&= \left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - \frac{5}{3} \right) (-(dx)^2 - dx dy - (dy)^2)
\end{aligned}$$

4. מטריצת Hesse של הביטוי הזה היא

$$H = \left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - \frac{5}{3} \right) \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

המינורים הראשים הם $\Delta_1 = -\left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - \frac{5}{3}\right) < 0$, $\Delta_2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - \frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} > 0$ לכן בנקודה P לפונקציה $f(x, y, z)$ יש מקסימום מותנה, והוא שווה ל- $\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$.

151. מצא את נקודות קיצון של הפונקציה $f(x, y) = 5 - 3x - 4y$

10.6 דיפערענציאל"לים מסדרות גבוהות. טור Taylor

10.7 ישומים של חשבון דיפרנציאלי

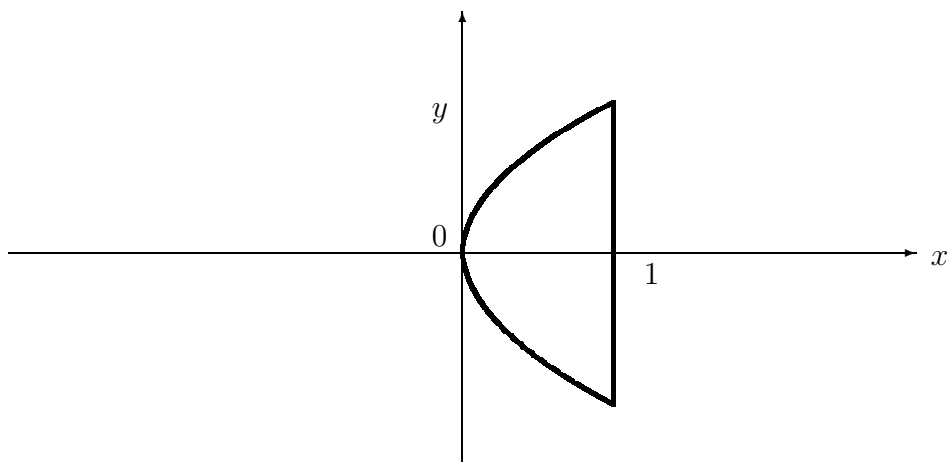
פרק 11

אינטגרלים כפולים ומשולשים

11.1 אינטגרלים כפולים

152. חשב את האינטגרל $\iint_D x^2 y^2 dx dy$ כאשר D מסמן את התחום המוגדר ע"י הקווים

$$x = 1 \text{ ו- } x = y^2.$$



פתרון:

1. הפונקציה $f(x, y) = x^2 y^2$ אלמנטרית לכן רציפה בכל המשור לכן אינטגרבילית בתחום חסום סגור עם

קו פשוט כשפה D . בנוסף, התחום D פשוט (גם אנכי וגם אופקי). לפי משפט Fubini, האינטגרל שווה

לאחד מהאינטגרלים החוזרים

$$\iint_D x^2 y^2 dx dy = \int_0^1 y^2 \left(\int_{y^2}^1 x^2 dx \right) dy = \int_0^1 y^2 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x^2 dy \right) dx$$

לשם לימוד, נחשב את כל אחד מהם:

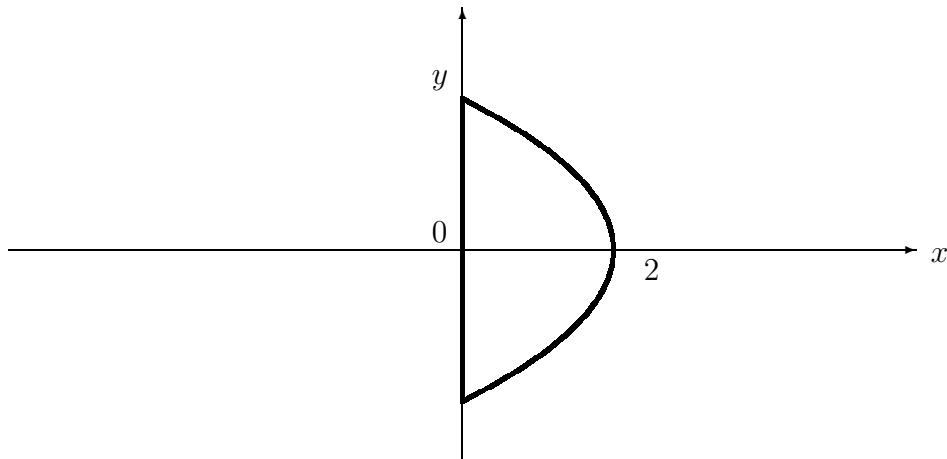
$$\int_0^1 y^2 \left(\int_{y^2}^1 x^2 dx \right) dy = \int_0^1 y^2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{y^2}^1 dy = \frac{1}{3} \int_0^1 y^2 (y^6 - 1) dy =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 (y^8 - y^2) dy = \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{9}$$

11.2 שימוש בקואורדינטות קוטביות

153. חשב את האינטגרל $\iint_D xy^2 dx dy$ כאשר D מסמן את התחום המוגדר ע"י התנאים

$$x^2 + y^2 \leq 4 \text{ ו- } x \geq 0.$$



תשובה: $\frac{64}{15}$

פתרון: נעבור לרואורדינטות קוטביות:

$$= \iint_D xy^2 dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 (r \cos \theta) (r \sin \theta)^2 r dr \right) d\theta =$$

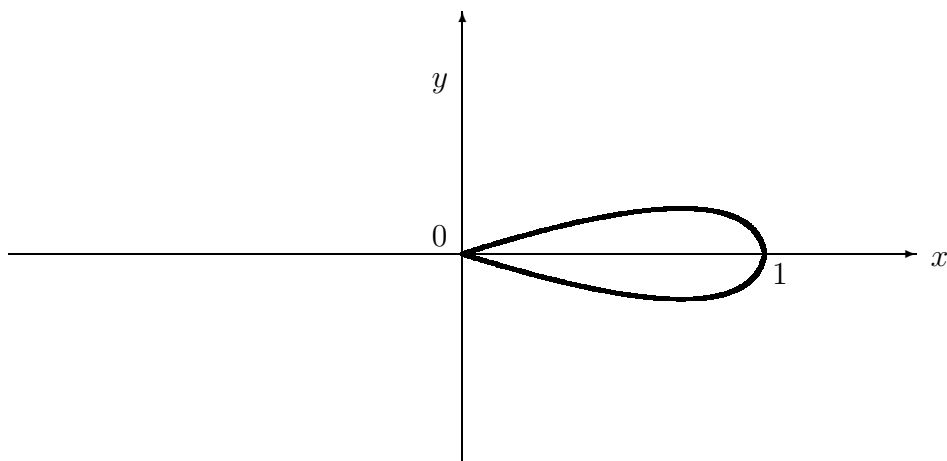
הגבולות של אינטגרציה באינטגרל הפנימי אינם תלויים בזווית θ , לכן האינטגרל המחוזר שווה למכפלה של

אינטגרלים מסוימים רגילים:

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta (\sin \theta)^2 d\theta \cdot \int_0^2 r^4 dr = \left\| \begin{array}{l} t := \sin \theta \\ dt = \cos \theta d\theta \\ -1 \leq t \leq 1 \end{array} \right\| = \int_{-1}^1 t^2 dt \cdot \int_0^2 r^4 dr =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{2^5}{5} = \frac{64}{15}.$$

154. מצא את השטח של עלה אחד של השושנה $r = \cos(3\theta)$.



תשובה: $S(D) = \frac{\pi}{12}$

פתרון: השטח של D שווה לאינטגרל $\iint_D dx dy$. את האינטגרל ניתן לחשב ישיר בקואורדינטות הקוטביות. את גבולות האינטגרל הפנימי (האינטגרציה לפי r) קיבלנו בין נתוני הבעיה: r משתנה בין 0 ל- $\cos(3\theta)$. לכן האינטגרל הפנימי הוא $\int_0^{\cos 3\theta} r dr$. כדי למצוא את גבולות האינטגרציה החיצונית (לפי θ) נשים לב לעובדה שהפונקציה $\cos(3\theta)$ שונה מאפס בקטע $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$. בגלל בסימטריה של העלה ביחס לציר x ניתן לבצע את האינטגרציה בקטע $(0, \frac{\pi}{6})$ ולכפול את התוצאה ב-2. סופית,

$$S(D) = \iint_D dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_0^{\cos(3\theta)} r dr \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2 \Big|_0^{\cos(3\theta)} d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(3\theta) d\theta = \frac{\sin(6\theta)}{12} + \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12}.$$

11.3 החלפת משתנים כללית באינטגרלים כפולים

155. חשב את האינטגרל $\iint_D (x^2y^2 - y^2) dx dy$ כאשר D מסמן את התחום המוגדר ע"י

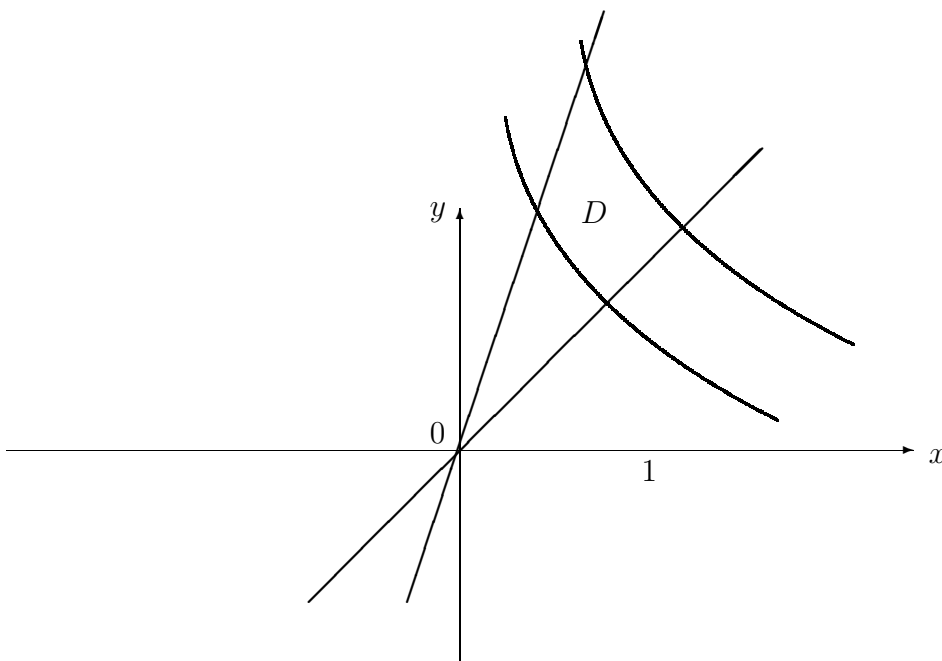
הקווים

$$xy = 1$$

$$xy = 2$$

$$y = x$$

$$y = 3x$$



תשובה: $\frac{7 \ln 3 - 9}{6}$

פתרון: הפונקציה $f(x, y) = x^2y^2 - y^2$ אלמנטרית לכן רציפה בכל המשור לכן אינטגרבילית בתחום

חסום סגור עם קו פשוט כשפה D . התחום D אינו פשוט.

התחום D חסום ע"י קווי רום של פונקציות xy ו- $\frac{y}{x}$, לכן כדאי לנסות החלפת המשתנים

$$u := xy$$

$$v := \frac{y}{x}$$

נמצא את העקוביאן של ההחלפה:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} = 2v$$

נרשום את הפונקציה $f(x, y)$ כפונקציה של המשתנים החדשים u ו- v :

$$x^2 y^2 = (xy)^2 = u^2$$

$$y^2 = uv$$

$$x^2 y^2 - y^2 = u^2 - uv$$

לכן

$$\iint_D (x^2 y^2 - y^2) dx dy = \iint_{\tilde{D}} (u^2 - uv) \frac{1}{2v} du dv = \iint_{\tilde{D}} \left(\frac{u^2}{2v} - \frac{1}{2} u \right) du dv$$

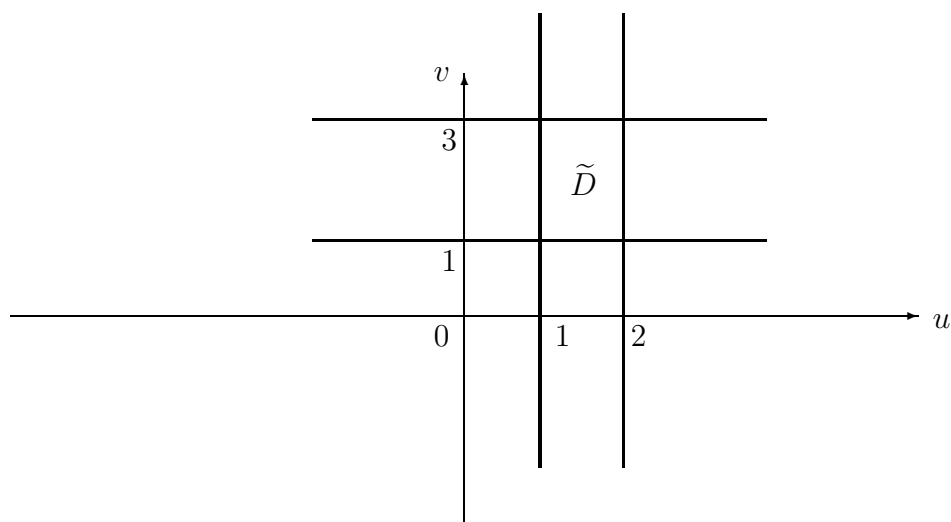
כאשר $\tilde{D}$ המלבן החסום י"ד ישרים שהם מקבילים לצירים u, v :

$$u = 1$$

$$u = 2$$

$$v = 1$$

$$v = 3$$



אזי, לפי משפט Fubini

$$\iint_{\tilde{D}} \left(\frac{u^2}{2v} - \frac{u}{2} \right) du dv = \int_1^3 \left(\int_1^2 \left(\frac{u^2}{2v} - \frac{u}{2} \right) du \right) dv = \int_1^3 \left(\frac{u^3}{6v} - \frac{u^2}{4} \right) \Big|_{u=1}^2 dv =$$

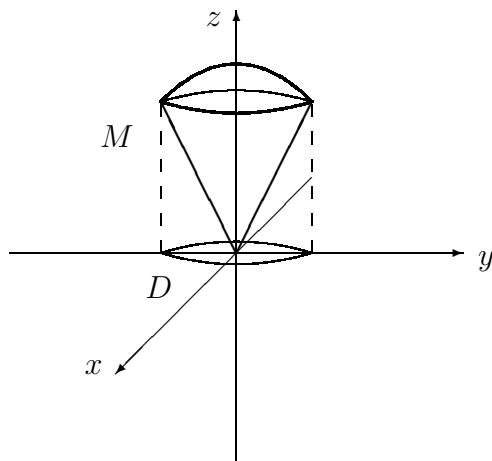
$$= \int_1^3 \left(\frac{2^3 - 1^3}{6v} - \frac{2^2 - 1^2}{4} \right) dv = \int_1^3 \left(\frac{7}{6v} - \frac{3}{4} \right) dv = \frac{7}{6} (\ln 3 - \ln 1) - \frac{3 \cdot (3 - 1)}{4} =$$

$$= \frac{7 \ln 3}{6} - \frac{3}{2}.$$

11.4 אינטגרלים משולשים

156. חשב את האינטגרל $\iiint_M z \, dx \, dy \, dz$ כאשר M התחום החסום ע"י המשטחים

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ ו- } z = 8 - x^2 - y^2.$$



פתרון: המשטחים נחתכים במעגל, נסמן אותו ב- L , לכן

$$\begin{aligned} \iiint_M z \, dx \, dy \, dz &= \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{8-x^2-y^2} z \, dz \right) dx \, dy = \frac{1}{2} \iint_D z^2 \Big|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{8-x^2-y^2} dx \, dy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_D [(8-x^2-y^2)^2 - (x^2+y^2)] dx \, dy. \end{aligned}$$

כאשר D העגול החסום ע"י ההטל של L על המשור (x, y) . המרכז של D נמצא בראשית של הצירים. הרדיוס

הוא הפתרון החיובי למשוואה $x^2 + x - 8 = 0$ או $x = 8 - x^2$. הפתרון החיובי הוא $r = \frac{-1 + \sqrt{1+4 \cdot 8}}{2}$

לכן התחום D מוגדר ע"י התנאי $x^2 + y^2 \leq 17 - \sqrt{33}$, $\frac{\sqrt{33}-1}{2}$

ברור שאת האינטגרל הכפול צריך לקחת בקואורדינטות קוטביות:

$$\frac{1}{2} \iint_D [(8 - x^2 - y^2)^2 - (x^2 + y^2)] dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{33}-1}{2}} [(8 - r^2)^2 - r^2] r dr \right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\frac{\sqrt{33}-1}{2}} [(8 - r^2)^2 - r^2] r dr = \left\| \begin{array}{l} t := r^2 \\ dt = 2r dr \\ 0 \leq t \leq 17 - \sqrt{33} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{17-\sqrt{33}} [(8 - t)^2 - t] dt = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{3}(8 - t)^3 - \frac{t^2}{2} \right] \Big|_0^{17-\sqrt{33}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{3}(\sqrt{33} - 9)^3 - \frac{(17 - \sqrt{33})^2}{2} \right] = \frac{\pi}{2}(379 - 75\sqrt{33})$$

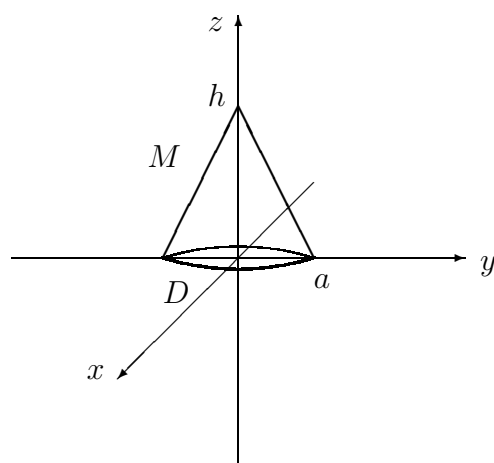
$$a > 0 \, , \, \iint_{x^2+y^2 \leqslant a^2} \ln(1 + x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$a > 0, \iint_{x^2+y^2 \leq ay} \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy$$

$$, \iint_M \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx \, dy \quad \mathbf{.159}$$

$$.M = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 2y\}$$

160. מצא את הנפח חרוט של רדיוס a וגובה h .



פתרון: נסמן את החרוט ב- M , אזי הנפח נתון ע"י הנוסחה

$$V(M) = \iiint_M dx \, dy \, dz$$

החרוט חסום ע"י שני משטחים: המשטח $z = 0$ והמשטח $z = h - \frac{h}{a}\sqrt{x^2 + y^2}$ לכן

$$V(M) = \iiint_M dx \, dy \, dz = \iint_D \left(\int_0^{h - \frac{h}{a}\sqrt{x^2 + y^2}} dz \right) dx \, dy = \iint_D z \Big|_0^{h - \frac{h}{a}\sqrt{x^2 + y^2}} dx \, dy =$$

$$= \iint_D \left(h - \frac{h}{a}\sqrt{x^2 + y^2} \right) dx \, dy = h \iint_D dx \, dy - \frac{h}{a} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx \, dy.$$

כאשר D העגול $x^2 + y^2 = a^2$. האינטגרל הראשון שווה לשטח של האיגול,

$$\iint_D dx \, dy = S(D) = \pi a^2$$

כדי לחשב את האינטגרל השני, נעבור לקואורדינטות הקוטביות:

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx \, dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a r \cdot r \, dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^a r^2 \, dr =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^a = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

סופית:

$$V(M) = h \iint_D dx \, dy - \frac{h}{a} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = h\pi a^2 - \frac{h}{a} \cdot \frac{2}{3}\pi a^3 = \frac{1}{3}\pi a^2 h.$$

11.5 שימוש בקואורדינטות כדוריות וגליליות

- לקואורדינטות הכדוריות (ρ, θ, φ) : $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $\rho > 0$.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

$$\frac{\partial(\rho, \theta, \varphi)}{\partial(x, y, z)} = -\rho^2 \sin \varphi \quad \text{היעקוביאן:}$$

- קואורדינטות גליליות

$$\boxed{(r, \theta, z)}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\frac{\partial(r, \theta, z)}{\partial(x, y, z)} = r \quad \text{היעקוביאן:}$$

161. חשב את האינטגרל $\iiint_V (x^2 + y^2 + z)^3 dx dy dz$ כאשר V התחום החסום ע"י

המשטחים $z = 0$, $z = 1$ ו- $x^2 + y^2 = 1$.

תשובה: $\frac{3\pi}{2}$

פתרון: גם התחום וגם האינטגרנד מרמזים שימוש בקואורדינטות הגליליות:

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z)^3 dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r^2 + z)^3 r dr \right) d\theta \right) dz$$

כאשר r הוא היעקביאן של המעבר לקואורדינטות גליליות. מכיוון שהאינטגרנד $(r^2 + z)r$ וגבולות של כל האינטגרלים המסויימים אינם תלויים ב- θ ,

$$\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r^2 + z)^3 r dr \right) d\theta \right) dz =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \cdot \int_0^1 \left(\int_0^1 (r^2 + z)^3 r dr \right) dz = 2\pi \int_0^1 \left(\int_0^1 (r^2 + z)^3 r dr \right) dz$$

כעת נחשב את האינטגרל הלא מסויים $\int (r^2 + z)^3 r dr$:

$$\int (r^2 + z)^3 r dr = \left\| \begin{array}{l} t := r^2 + z \\ dt = 2r dr \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \int t^3 dt = \frac{1}{8} t^4 + C = \frac{1}{8} (r^2 + z)^4 + C$$

מכאן נקבל

$$\int_0^1 (r^2 + z)^3 r dr = \frac{1}{8} (r^2 + z)^4 \Big|_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{8} [(1+z)^4 - z^4]$$

מייד יהיה ברור למה אין טעם לפתוח סוגריים בשלב הזה:

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z)^3 dx dy dz =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{8} [(1+z)^4 - z^4] \right) dz = \frac{2\pi}{8} \left[\frac{(1+z)^5}{5} - \frac{z^5}{5} \right] \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[\frac{(2)^5}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{0}{5} \right] = \frac{\pi}{4} \left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5} \right) = \frac{30\pi}{20} = \frac{3\pi}{2}$$

162. מצא את הנפח הכדור B של רדיוס R .תשובה: $\frac{4}{3}\pi R^3$ פתרון: נסמן את החרוט ב- B , אזי הנפח נתון ע"י הנוסחה

$$V(B) = \iiint_B dx \, dy \, dz$$

טוב לעבור כאן לקואורדינטות הכדוריות (ρ, θ, φ) : $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $\rho > 0$.

$$\begin{aligned} V(B) &= \iiint_B dx \, dy \, dz = \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \left| \frac{\partial(\rho, \theta, \varphi)}{\partial(x, y, z)} \right| d\rho \right) d\theta \right) d\varphi = \\ &= \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R |-\rho^2 \sin \varphi| d\rho \right) d\theta \right) d\varphi = \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^R \rho^2 \, d\rho = \\ &= \left(-\cos \varphi \Big|_0^\pi \right) \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{\rho^3}{3} \Big|_0^R \right) = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

11.6 החלפת משתנים כללית באינטגרלים משולשים

$$, \iint_D \frac{(x+y)^2}{x} \, dx \, dy$$

$$D = \{(x, y) : 1 - x \leq y \leq 3 - x, \quad x/2 \leq y \leq 2x\}$$

$$, \iint_D xy(x+y) \, dx \, dy$$

$$D = \{(x, y): -1 \leq x - y \leq 1, \quad 1/x \leq y \leq 2/x, \quad x \geq 0\}$$

$$, \iint_D x^2 \, dx \, dy$$
$$D = \{(x, y) : x^3 \leq y \leq 2x^3, \quad x \leq 2y \leq 6x, \quad x \geq 0\}$$

166. מצא את הנפח של האליפסואיד $E: \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1$ כאשר $a, b, c > 0$.

תשובה: $\frac{4}{3}\pi abc$

פתרון: נסמן זמנית $u := \frac{x}{a}, v := \frac{y}{b}, w := \frac{z}{c}$. עבור המשתנים האלו המשוואה תקבל את הצורה

$u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$. אזי רואים שכדאי לנסות לעבור לקואורדינטות שהן דומות לקואורדינטות כדוריות:
 $(\rho, \theta, \varphi): \rho > 0, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = b\rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = c\rho \cos \varphi \end{cases}$$

יש להן שם: קואורדינטות אליפטיות.

נחשב את היעקוביאן:

$$\frac{\partial(\rho, \theta, \varphi)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta \sin \varphi & -a\rho \sin \theta \sin \varphi & a\rho \cos \theta \cos \varphi \\ b \sin \theta \sin \varphi & b\rho \cos \theta \sin \varphi & b\rho \sin \theta \cos \varphi \\ c \cos \varphi & 0 & -c\rho \sin \varphi \end{vmatrix} = -abc\rho^2 \sin \varphi$$

הנפח של האליפסואיד E נתון ע"י הנוסחה

$$V(E) = \iiint_E dx dy dz,$$

$$\begin{aligned}
 V(E) &= \iiint_E dx \, dy \, dz = \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial(\rho, \theta, \varphi)}{\partial(x, y, z)} \right| d\rho \right) d\theta \right) d\varphi = \\
 &= \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 |-abc\rho^2 \sin \varphi| d\rho \right) d\theta \right) d\varphi = abc \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 \rho^2 \, d\rho = \\
 &= abc \left(-\cos \varphi \Big|_0^\pi \right) \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 \right) = 2abc \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\pi abc
 \end{aligned}$$