

תרגילים באלגברה לינארית

ודים זאב אוסטפנקו

`ostap@math.biu.ac.il`

`http://vzostapenko.org`

תמוז תשפ"ד

תוכן עניינים

5	I אלגברה של וקטורים על המסור
21	II משוואות לינאריות ותהליך Gauß
45	1 כלל Cramer
47	III השיטה הקרטזית ("גיאומטריה אנליטית")
49	2 וקטורים במסור E_2
59	3 המכפלה הסקלרית בין וקטורים
65	4 וקטורים ב- E_3
67	4.1 המכפלה הפנימית
71	4.2 מכפלה וקטורית
71	4.2.1 מבוא תיאורטי
72	4.2.2 בעיות פתורות
75	5 ישרים במסור E_2
79	6 מישורים במרחב E_3
83	7 ישרים במרחב E_3

93	IV מטריצות
105	V דטרמיננטות
113	VI מרחבים וקטוריים
135	VII העתקות ליניאריות
137	8 מושגים בסיסיים
155	9 קואורדינטות. מטריצות יצוג
169	10 מטריצת המעבר. החלפת בסיסים
169	10.0.1 שימוש של מטריצת המעבר
179	11 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים
181	VIII מרחבים אוקלידיים
183	12 מכפלה פנימית ואורתוגונליות
191	13 העתקות גיאומטריות
197	14 מרחבים הרמיטיים (אוניטריים)

חלק I

אלגברה של וקטורים על המסור

מושגים עקרוניים

וקטור זה קטע של ישר המכוון (חץ). אם P נקודת ההתחלה ו- Q היא נקודת הסוף של הוקטור a , אנחנו כותבים $a = \overrightarrow{PQ}$. וקטורים שלנו הם וקטורים חופשיים ז"א ש- $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ אם ורק אם הנקודות P, Q, S, R מהוות מקבילית.

1. כמה וקטורים מגדרות הצלעות של מקבילית?

תשובה: ארבעה וקטורים

פתרון: לאור העובדות ש- $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ו- $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$, הצלעות של המקבילית $ABCD$ מגדרות את הוקטורים הבאים:

$$\mathbf{a} := \overrightarrow{AB}$$

$$\mathbf{b} := \overrightarrow{BC}$$

$$\mathbf{c} := \overrightarrow{BA} = -\mathbf{a}$$

$$\mathbf{d} := \overrightarrow{CB} = -\mathbf{b}.$$

2. ידוע שהוקטורים a, b, c מהווים צלעות של משולש כלשהו. מצא את הוקטור $a + b + c$.

תשובה: 0 או $2a$ או $2b$ או $2c$, תלוי בכיוונים היחסיים של הוקטורים a, b, c .

פתרון: נסמן את המשולש המתאים ב- $\triangle PQR$. באצם, יש שתי אפשרויות:

$$a = \overrightarrow{PQ}$$

$$b = \overrightarrow{QR}$$

$$c = \overrightarrow{RP}$$

$$\text{לכן } a + b + c = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PP} = 0 \text{ או}$$

$$a = \overrightarrow{PQ}$$

$$b = \overrightarrow{QR}$$

$$c = \overrightarrow{PR}$$

$$\text{לכן } a + b + c = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{PR} = 2c$$

את כל אחד משאר המצבים אפשריים ניתן להביא למקרים האלו ע"י תמורות בין האותיות a, b, c .

3. נניח ש- $ABCD$ מקבילית, ו- O היא נקודת החיתוך של אלכונים. אלו הזוגות שאפשר לקבל

מהנקודות A, B, C, D, O מוגדרות אותו וקטור?

4. בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$) נתון הנקודה M כך שמתקיים התנאי

$$\vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{MC} \quad \text{בטא את הוקטורים } \vec{AC} \text{ ו- } \vec{DM} \text{ דרך הוקטורים } u \text{ ו- } v$$

$$1. \text{ כאשר } \vec{v} = \vec{AD}, u = \vec{AB}$$

$$2. \text{ כאשר } \vec{v} = \vec{BM}, u = \vec{AB}$$

$$3. \text{ כאשר } \vec{v} = \vec{MC}, u = \vec{AD}$$

5. במקבילית $ABCD$ נסמן ב- M את הנקודה האמצעית של AB , ב- N את הנקודה האמצעית

של BC , וב- P את הנקודה האמצעית של MN . בטא את הוקטורים $\vec{BP}$ ו- $\vec{BD}$ דרך $\vec{BC}$ ו- $\vec{AB}$.
 $u := \vec{BC}$, $v := \vec{AB}$.

6. נתון ש- $\triangle ABC$ משולש שווה שוקיים ($AB = AC$). תהיינה Q, P הנקודות על צלעות

המשולש כך ש- AP גובה ו- BQ תיכון במשולש. נסמן ב- O את נקודת המפגש של AP ו- BQ .

נסמן: $\vec{CO} := u, \vec{OQ} := v$. בטא את הוקטורים $\vec{AM}, \vec{MO}$ באמצעות u, v .

7. נתונים המשולש $\triangle ABC$ והוקטור $\vec{AD} := \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC})$

1. תהי D אמצע BC . הוכח כי $\vec{AM} + \vec{BM} + \vec{CM} = \vec{0}$

2. תהי M נקודת המפגש תיכוני המשולש. אמצע הוכח כי

$$\vec{PM} = \frac{1}{3} (\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC})$$

8. במשולש $\triangle ABC$ נסמן ב- M את האמצע AB וב- N את האמצע AC . ע"י חשבון הוקטורים,

הוכח כי $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

9. נתון משושה משוכלל $ABCDEF$. נסמן ב- O את מרכז המשושה. נסמן גם $\vec{OA} := u$,

$\vec{OB} := v$. בטא את $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{DA}, \vec{DE}, \vec{EF}, \vec{FA}, \vec{OC}, \vec{OD}, \vec{OE}$ ו- $\vec{OF}$ באמצעות u .
 v.

10. באיזה תנאי אלגברי שלושה וקטורים a, b, c מהווים משולש?

11. במקבילית $ABCD$ נסמן $\vec{u} := \vec{AB}$, $\vec{v} := \vec{BC}$. נניח שהנקודה M מקיימת את התנאי

$\vec{AM} = t\vec{AB}$ עבור $t \in \mathbb{R}$ מסוים. בטא את הוקטור $\vec{CM}$ באמצעות $\vec{u}$, $\vec{v}$, t .

12. נתון וקטור $a \neq 0$. מצא את כל מספרים λ כך ש- $\|\lambda a\| = \|a\|$.

חלק II

משוואות לינאריות ותהליך Gauß

$$13. \quad \text{פתור את המערכת} \quad \cdot \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 6x + 3y - 8z = 0 \\ 2x - y + 5z = -4 \end{cases}$$

תשובה:

$$x = -1, y = 2, z = 0$$

פתרון:

$$\cdot \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ z = 0 \\ 2x - y + 5z = -4 \end{cases} \quad \text{אחרי הפעולה } R_2 - R_3 \rightarrow R_2 \text{ נקבל מערכת שקולה}$$

המטרה היתה לבטל את x בשורה שניה, אבל קבלנו יותר מזה: גם מקדם של y התאפס. אתו דבר עושים עתה עם

המשוואה (השורה) השלישית: את הפעולה $R_3 - R_1 \rightarrow R_3$ כתוצאה מקבלים מערכת שקולה עוד יותר פשוטה:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ z = 0 \\ -2y + 8z = -4 \end{cases}$$

(נעשה את הפעולה הזאת עם פרטים. האגף השמאלי:

$$R_3 - R_1 = (2x + y - 3z) - (2x - y + 5z)$$

$$= 2x + y - 3z - 2x + y - 5z$$

$$= 2x - 2x + y + y - 3z - 5z = 2y - 8z$$

$$\text{האגף הימני: } -4 - 0 = -4$$

פעולת שורה $R_2 \leftrightarrow R_3$ מביאה למערכת קנונית

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ -2y + 8z = -4 \\ z = 0 \end{cases}$$

המשוואה השלישית נותנת $z = 0$, הצבה של $z = 0$ במשוואה השנייה נותנת $-2y = -4$ לכן $y = 2$. ההצבה

$y = 2, z = 0$ במשוואה הראשונה נותנת $2x + 2 = 0$ לכן $x = -1$.

$$14. \quad \text{פתור את המערכת} \quad \cdot \begin{cases} x + 4y + z = 3 \\ 2x - y + z = 5 \\ 5x + 2y + 3z = 12 \end{cases}$$

תשובה: אין פתרון.

פתרון:

ע"י פעולות השורה $R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$ ו- $R_3 - 5R_1 \rightarrow R_3$ נקבל את המערכת השקולה

$$\cdot \begin{cases} x + 4y + z = 3 \\ -9y - z = -1 \\ -18y - 2z = -3 \end{cases}$$

כדי להקל את המשך החישובים, נתפתר מהמינוסים בשתי המשוואות האחרונות, ז"א נבצע את פעולות השורה

$R_2 - R_3 \rightarrow R_2$ ו- $-R_3 \rightarrow R_3$, נקבל את המערכת

$$\cdot \begin{cases} x + 4y + z = 3 \\ 9y + z = 1 \\ 18y + 2z = 3 \end{cases}$$

פעולת השורה $R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3$ מביאה לבערכת

$$\cdot \begin{cases} x + 4y + z = 3 \\ 9y + z = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

מכאן רואים שלמערכת המקורית אין פתרון.

15. מצא את הצורה המדורגת הקנונית למטריצה

$$\cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

ע"י פעולות השורה $R_2 + R_4 \rightarrow R_4$ ו- $R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3$ נקבל את המערכת השקולה

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 0 & -9 & 8 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

כדי לא להתעסק עם מספרים לא שלמיים, נבצע את פעולת השורה $R_1 \leftrightarrow R_4$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 2 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & -9 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

עתה אפשר להביא לצורה קנונית את העמודה הראשונה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & -9 & 8 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} :R_1 - R_2 \rightarrow R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -7 & -2 & -3 \\ 0 & -9 & 8 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} :R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$$

עתה נתפל באותו אופן בשורה שניה, שלישית ורביעית.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -7 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 10 & 8 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} :R_3 - R_2 \rightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -7 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 10 & 8 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$16. \text{ כמה פתרונות למערכת } \begin{cases} x + y + mz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = m \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases} ?$$

תשובה: פתרון אחד עבור $m \neq 3$ ורצף חד-פרמטרי של פתרונות עבור $m = 3$.

פתרון:

המטריצה המורחבת של המערכת היא $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 2 \\ 3 & 4 & 2 & m \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. פעולות השורה

פעולת השורה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 2 \\ 0 & 1 & 2-3m & m-6 \\ 0 & 1 & -1-2m & -3 \end{pmatrix}$ $R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2, R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3$ מביאות למטריצה

בשלב הזה אנחנו מוכרחים להבדיל בין שני מקרים, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 2 \\ 0 & 1 & 2-3m & m-6 \\ 0 & 0 & -3+m & 3-m \end{pmatrix}$ $R_3 - R_2 \rightarrow R_3$ מביאה למטריצה

כאשר $m \neq 3$ וכאשר $m = 3$.

המקרה $m \neq 3$

כאן אפשר לבצע את פעולת השורה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 2 \\ 0 & 1 & 2-3m & m-6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} : \frac{1}{m-3} R_3 \rightarrow R_3$ לכן לכל מערכת עם $m \neq 0$

ש פתרון אחד בלבד.

המקרה $m = 3$

כאן המטריצה היא $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \frac{1}{m-3} R_3 \rightarrow R_3$ לכן למעשה במערכת יש שני משוואות עם שלושה

נעלמים, למערכת כזאת יש אינסוף פתרונות. יותר מדויק, הפתרונות מהווים משפחה חד־פרמטרית: בתור הפרמטר החופשי

נוח לבחור למשל את x_3 אזי $t = x_3$, $x_2 = 7t - 3$, $x_1 = 5 - 10t$.

$$17. \text{ מצא עבור אלו ערכים של פרמטר } a \text{ למערכת } \begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases} \text{ אין פתרון, יש פתרון יחיד}$$

או יש אינסוף פתרונות.

תשובה: כאשר $a = 1$ אינסוף פתרונות, מהווים משפחה דו־פרמטרית.

כאשר $a = -2$ למערכת אין פתרון.

כאשר $a \neq 1, -2$ למערכת יש פתרון יחיד.

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ המטריצה המורחבת של המערכת היא}$$

$$R_3 - aR_1 \longrightarrow R_3, R_2 - R_1 \longrightarrow R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{pmatrix}$$

כדי לבטל את האיבר $1-a$ במקום השני בשורה השלישית, אנחנו נצטרך לחלק ב־ $1-a$, לכן יש שתי אפשרויות

לגבי a .

$$1. \underline{a = 1}$$

כאן המטריצה מקבלת את הצורה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן למערכת יש אינסוף פתרונות. מספר פרמטרים חופשיים שווה למספר נעלמים פחות מספר משוואות לא טריוויאליות בצורה קנונית, ז"א $3 - 1 = 2$.

2. במקרה הזה מותר לבצע את הפעולות $\frac{1}{a-1}R_2 \rightarrow R_2, \frac{1}{1-a}R_3 \rightarrow R_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 - R_2 \rightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & 1 \end{pmatrix}$$

אנחנו שוב מוכרחים להבדיל בין ערכים שונים של a :

$$\underline{a = -2} \quad (\text{א})$$

המטריצה היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

השורה האשלישית מציגה סתירה לוגית $0 = 1$, לכן למערכת הזאת אין פתרונות.

$$\underline{a \neq -2} \quad (\text{ב})$$

אחרי פעולת השורה $R_3 - R_2 \rightarrow R_3$ מביאים את המטריצה לצורה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{pmatrix}$$

לכן למערכת יש פתרון אחד ורק אחד.

18. נתונה מערכת משוואות לינאריות הומוגנית עם המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{pmatrix} .$$

מצא עבור אלו

ערכים ממשיים של הפרמטר a למערכת יש פתרון יחיד.

תשובה: $a \neq 1$

פתרון: מצא את הצורה הקנונית של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$R_3 - aR_2 \longrightarrow R_3, \quad R_2 - aR_1 \longrightarrow R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 - a^3 \\ 0 & 1 - a^3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 - a^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - a^3 \end{pmatrix}$$

כדי להגיע לצורה נורמלית, צריך לבצע את פעולות השורה $R_2 \xrightarrow{\frac{1}{1-a^3}} R_2$ ו- $R_3 \xrightarrow{\frac{1}{1-a^3}} R_3$. אבל הפעולות

האלו חוקיות אם ורק אם $a^3 - 1 \neq 0$. למשווה $a^3 - 10$. ישפתרון ממשי אחד בלבד, $a = 1$, לכן ששתי הפעולות שורה

האחרונות ניתן לבצע אם ורק אם $a \neq 1$.

$$19. \quad \text{נתונה מערכת המשוואות} \quad \cdot \begin{cases} x_1 - x_2 + ax_3 = 2 \\ x_1 - ax_2 + x_3 = 1 + a \\ x_1 + ax_2 - x_3 = -2a \end{cases}$$

מצא עבור אלו ערכי a יש למערכת פתרון יחיד? אינסוף פתרונות? אין פתרון כלל? עבור אותם ערכי a עבורם יש אינסוף פתרונות, מצא את ההצגה הפרמטרית של קבוצת הפתרונות.

תשובה:

1. עבור $a = -1$ משפחה חד־פרמטרית של פתרונות: $x_1 = 1, x_2 = -(t + 1), x_3 = t$.

2. עבור $a = 1$ אין פתרון.

3. עבור $a \neq \pm 1$ פתרון אחד.

פתרון:

נשתמש במטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 2 \\ 1 & -a & 1 & 1+a \\ 1 & a & -1 & -2a \end{array} \right)$$

$$R_3 + R_2 \rightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 2 \\ 1 & -a & 1 & 1+a \\ 2 & 0 & 0 & 1-a \end{array} \right)$$

$$\frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 2 \\ 1 & -a & 1 & 1+a \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1-a}{2} \end{array} \right)$$

$$R_1 - R_3 \rightarrow R_1$$

$$R_2 - R_3 \rightarrow R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & a & \frac{a+3}{2} \\ 0 & -a & 1 & \frac{3a+1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1-a}{2} \end{array} \right)$$

$$R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1-a}{2} \\ 0 & -a & 1 & \frac{3a+1}{2} \\ 0 & -1 & a & \frac{a+3}{2} \end{array} \right)$$

$$R_3 + R_2 \rightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1-a}{2} \\ 0 & -a & 1 & \frac{3a+1}{2} \\ 0 & -(a+1) & a+1 & 2(a+1) \end{array} \right)$$

העת יש שתי אפשרויות לגבי a .

המקרה כאשר $a = -1$

במקרה הזה המטריצה היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

זאת צורה מדורגת של המטריצה, ויש בה שורת אפס. לכן עבור $a = -1$ למערכת יש אינסוף פתרונות.

כדי למצוא אותם, נרשום את המערכת המתאימה:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

רואים כי x_1 הוא קבוע, וניתן לבחור x_2 או x_3 בתור פרמטר חופשי. ניקח את x_3 כפרמטר חופשי: $x_3 = t$, אזי

המשוואה השנייה מגדירה $x_2 = -1 - x_3 = -1 - t$. לכן כל הפתרונות של המשוואה הנתונה עבור $a = -1$ נמצאים

במשפחה $x_3 = t, x_2 = -(t+1), x_1 = 1$.

המקרה כאשר $a \neq -1$

במקרה הזה מותר לבצע את פעולת Gauß

$$:-\frac{1}{a+1}R_3 \rightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1-a}{2} \\ 0 & -a & 1 & \frac{3a+1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1-a}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -a & 1 & \frac{3a+1}{2} \end{array} \right)$$

$$R_3 + aR_2 \rightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1-a}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1-2a}{a+1} \\ 0 & 0 & 1-a & \frac{7a+1}{2} \end{array} \right)$$

כאשר $a = 1$, המטריצה היא

$$\cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

יש סתירה בשורה השלישית, לכן עבור $a = 1$ למערכת אין פתרון.

כאשר $a \neq \pm 1$, נבצע את הפעולה $:\frac{1}{1-a}R_3 \rightarrow R_3$

$$, \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1-a}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1-2a}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7a+1}{2a-2} \end{array} \right)$$

ז"א עבור כל $a \neq \pm 1$ למשוואה יש פתרון אחד.

$$\cdot \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ ax_1 + (1-a)x_2 + (2-a)x_3 + (1-a)x_4 = 0 \end{cases}$$

מצא עבור אלו ערכי a למערכת יש שני נעלמים חופשיים.

תשובה: $a = 4$

נרשום את המטריצה של המערכת:

$$\text{ונביא אותה לצורה מדורגת.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ a & 1-a & 2-a & 1-a \end{pmatrix}$$

$$R_1 + 2R_2 \rightarrow R_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ a & 1-a & 2-a & 1-a \end{pmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ a & 1-a & 2-a & 1-a \end{pmatrix}$$

$$-R_1 \rightarrow R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ a & 1-a & 2-a & 1-a \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5}R_2 \rightarrow R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ a & 1-a & 2-a & 1-a \end{pmatrix}$$

ההמשך של שימוש בתהליך Gauß תלוי בערך של a . כאן יש שתי אפשרויות שונות: $a = 0$ ו- $a \neq 0$:

המקרה $a = 0$

במקרה הזה המטריצה היא

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 - R_2 \rightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\frac{5}{8}R_3 \rightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

זאת הצורה המדורגת עבור $a = 0$. נכתוב את המערכת שהמטריצה המדורגת מציגה אותה:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_3 + x_4 = 2\frac{3}{5}x_4 - 2x_4 + x_4 = \frac{1}{5}x_4 \\ x_2 = -\frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = \frac{4}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_4 = \frac{3}{5}x_4 \\ x_3 = -2x_4 \end{cases} \quad \text{לכן}$$

לכן עבור כל ערך של המשתנה x_4 הערכים של x_2, x_1 ו- x_3 מוגדרים. במילים אחרות, הנעלם x_4 הוא חופשי, לאומת

זאת, x_2, x_1 ו- x_3 הם נעלמים תלויים. כמוכן, יכולנו לבחור כל אחד מהנעמים x_1, x_2, x_3, x_4 כנעלם חופשי, המערכת

המדורגת אומרת לנו של שאר הנעמים הם תלויים. המסכנה: עבור $a = 0$ למערכת המקורית יש נעלם חופשי אחד בלבד,

לכן $a = 0$ זה לא המקרה המבוקש.

המקרה $a \neq 0$

במקרה הזה אנו יכולים לבצע את פעולות השורה הבאות:

$$\frac{1}{a}R_3 \rightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{1-a}{a} & \frac{2-a}{a} & \frac{1-a}{a} \end{pmatrix}$$

$$R_3 - R_1 \rightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{a+1}{a} & \frac{2}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

השלב הבא הוא שימוש בפעולה $\frac{a}{a+1}R_3 \rightarrow R_3$, לכן שוב חייבים להתבונן בשני מקרים שונים: $a = -1$ ו- $a \neq 0, -1$:

המקרה $a = -1$

במקרה הזה המטריצה היא

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

כמו במקרה $a = 0$, אנחנו רואים שלמערכת יש נעלם חופשי, לכן $a = -1$ הוא לא מקרה מבוקש.

המקרה $a \neq 0, -1$

$$\frac{a}{a+1}R_3 \rightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{a+1} & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}$$

$$R_3 - R_2 \rightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2(4-a)}{5(a+1)} & \frac{4-a}{5(a+1)} \end{pmatrix}$$

שוב, כדי לבצע את הפעולה $\frac{5(a+1)}{2(4-a)}R_3 \rightarrow R_3$, לכן שוב חייבים להתבונן בשני מקרים שונים: $a = 4$ ו- $a \neq 0, -1, 4$:

המקרה $a = 4$

במקרה הזה המטריצה היא

$$\text{ולכן המערכת המדורגת מכילה 2 משוואות בלבד:} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = 0 \end{cases}$$

לכן

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \\ x_1 = 2x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{4}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 + x_3 + x_4 = \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 \end{cases}$$

רואים שיש כאן שני נעלמים חופשיים (ושניים תלויים). לכן $a = 4$ הוא המקרה מבוקש.

המקרה $a \neq 0, -1, 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2(4-a)}{5(a+1)} & \frac{4-a}{5(a+1)} \end{pmatrix}$$

$$\frac{5(a+1)}{2(4-a)} R_3 \rightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

יש כאן נעלם חופשי אחד בלבד, לכן זה לא המקרה המבוקש.

פרק 1

Cramer כלל

$$21. \quad \text{פתור את המערכת.} \quad A = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 = 4 \end{cases} \quad \text{ב"ע כלל Cramer.}$$

פתרון: נסמן ב- Δ את הדטרמיננטה של המערכת:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 10 - 9 = 1,$$

ב- Δ_1 את הדטרמיננטה המתקבלת מ- Δ ע"י החלפת העמודה הראשונה בעמודה של ההגפים הימנים של המערכת, ז"א

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 5 - 12 = -7,$$

ובאותו אופן, נסמן ב- Δ_2 את הדטרמיננטה המתקבלת מ- Δ ע"י החלפת העמודה השנייה בעמודה של ההגפים הימנים של המערכת:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 8 - 3 = 5.$$

אזי, לפי כלל Cramer,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7}{1} = -7 \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5}{1} = 5$$

חלק III

השיטה הקרטזית

("גיאומטריה אנליטית")

פרק 2

וקטורים במשור E_2

22. בטרפז $ABCD$ נתון ש- $\lambda = \frac{AD}{BC}$. נסמן $\vec{AC} =: a$, $\vec{BD} =: b$. בטא את הוקטורים $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ ו- $\vec{DA}$ באמצעות a ו- b .

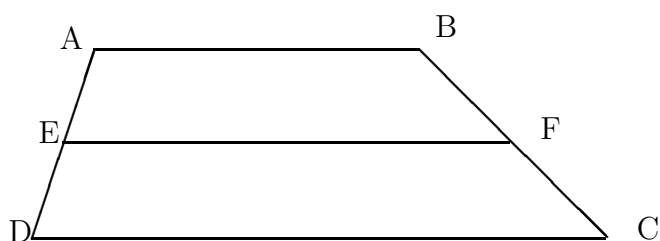
23. הוכח ב"ע וקטורים את המשפט על הקטע אמצעים בטרפז.

פתרון: המשפט אומר שקטע המחבר את אמצעי השוקיים בטרפז

1. מקביל לבסיסים,

2. שווה למחצית סכומם.

נקח טרפז $ABCD$:



24. ננתונה מקבילית $PQRS$, כך ש- K היא נקודה האמצעית של הצלעה QR ו- O מסמן את

נקודת החיתוך של האלכסונים. נסמן $\vec{a} := \vec{PQ}$, $\vec{b} := \vec{PS}$. בטה את הוקטורים $\vec{QS}$, $\vec{RO}$, $\vec{KS}$ כצורפים ליניאריים של a ו- b .

25. $a + b = b + a$ עבור כל a, b

.26 $(a + b) + c = a + (b + c)$ עבור כל a, b, c ;

$$27. \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b \quad \text{עבור כל } a, b, \lambda;$$

פתרון: נניח $\lambda > 1$. נסמן $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{BC}$, אזי $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC}$. נסמן ב- D את הנקודה שמקיימת את התנאי $\vec{AD} = \lambda \vec{a}$, וב- E את הנקודה המקיימת $\vec{DE} = \lambda \vec{b}$. אזי

1. הנקודות A, C, E שייכות לאותו ישר;

$$2. \frac{DE}{BC} = \lambda.$$

זה נובע ש- $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, לכן $\vec{AE} = \lambda \cdot \vec{AC}$.

ההוכחות עבור המקרים $0 < \lambda < 1$, $-1 < \lambda < 0$ ו- $\lambda < -1$ דומות.

28. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ עבור כל a, λ, μ ;

29. $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ עבור כל a, λ, μ

פרק 3

המכפלה הסקלרית בין וקטורים

את הנורמה (האורך) $\|a\|$ של וקטור a ניתן לחשב בעזרת המכפלה הסקלרית ע"י הנוסחה $\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$.

30. הוכח כי לכל ארבע נקודות A, B, C, D מתקיים

$$\vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{BD} + \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$$

31. חשב את $\|a - b\|$ אם ידוע ש- $\|a\| = 13$, $\|b\| = 19$ ו- $\|a + b\| = 24$.

תשובה: $\|a - b\| = 22$

פתרון: באור שהנורמה היא מספר לא שלילי, יותר נוח לעבוד עם הרבוע של הנורמה, $\|a - b\|^2 = \langle a - b, a - b \rangle$. לפי תכונות של מכפלה סקלרית, ניתן לפתוח את הסוגריים כפותחים אותם באלגברה רגילה: $\|a - b\|^2 =$

$$\begin{aligned}\|a - b\|^2 &= \langle a - b, a - b \rangle = \langle a, a \rangle - \langle a, b \rangle - \langle b, a \rangle + \langle b, b \rangle = \\ &= \|a\|^2 - 2\langle a, b \rangle + \|b\|^2 = 13^2 - 2\langle a, b \rangle + 19^2 = \\ &= 169 + 361 - 2a \cdot b = 530 - 2\langle a, b \rangle.\end{aligned}$$

לכן הבעיה היא למצוא את המספר $a \cdot b$, הגורם שלא נתון ישיר. כדי לגלות אותו, נשתמש בנתון $\|a + b\| = 24$:

$$\begin{aligned}24^2 = 576 &= \|a + b\|^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = \\ &= \|a\|^2 + 2a \cdot b + \|b\|^2 = 13^2 + 2a \cdot b + 19^2 = 530 + 2a \cdot b.\end{aligned}$$

מכאן מקבלים $a \cdot b = 23$, לכן $\|a - b\|^2 = 530 - 2a \cdot b = 530 - 46 = 484$, $\|a - b\| = \sqrt{484} = 2 \cdot \sqrt{121} = 2 \cdot 11 = 22$.

דרך אחרת (יותר קצרה):

$$\begin{aligned}\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 &= (a + b) \cdot (a + b) + (a - b) \cdot (a - b) = \\ &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b + a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = \\ &= 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2).\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\|a - b\|^2 &= 2(\|a\|^2 + \|b\|^2) - \|a + b\|^2 = \\ &= 2 \cdot (13^2 + 19^2) - 24^2 = 2 \cdot (169 + 361) - 576 = 2 \cdot 530 - 576 = 484.\end{aligned}$$

סופית,

$$\|a - b\| = \sqrt{484} = 2 \cdot \sqrt{121} = 2 \cdot 11 = 22.$$

32. נתון ש- $\|a\| = 5$, $\|b\| = 8$, ושהזווית θ בין הוקטורים a ו- b שווה ל- $\frac{\pi}{3}$. מצא את $\|a + b\|$

ואת $\|a - b\|$.

תשובה: $\|a + b\| = \sqrt{129}$, $\|a - b\| = 7$

פתרון: לפי ההגדרה של המכפלה הסקלרית,

$$a \cdot b = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos \theta = 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 20,$$

לכן

$$\begin{aligned} \|a + b\|^2 &= (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + a \cdot b = \\ &= \|a\|^2 + 2a \cdot b + \|b\|^2 = 5^2 + 2 \cdot 20 + 8^2 = 25 + 40 + 64 = 129 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|a - b\|^2 &= (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + a \cdot b = \\ &= \|a\|^2 - 2a \cdot b + \|b\|^2 = 5^2 - 2 \cdot 20 + 8^2 = 25 - 40 + 64 = 49, \end{aligned}$$

זאת אומרת ש- $\|a + b\| = \sqrt{129}$, $\|a - b\| = 7$.

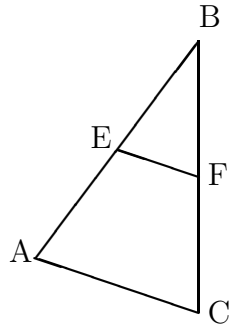
פרק 4

וקטורים ב- E_3

33. הוכח כי הקטע המחבר את האמצעין של שתי צלעות במשולש מקביל לצלע השלישית.

פתרון:

נסמן ב- E את הנקודה האמצעית של הצלע AB וב- F את הנקודה האמצעית של הצלע BC .



$$\vec{EF} = \vec{BF} - \vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{BA} - \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}(\vec{BA} - \vec{BC}) = \frac{1}{2}\vec{AC} \quad \text{ברור ש-} \vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{BA} \text{ וגם } \vec{BF} = \frac{1}{2}\vec{BC} \text{ נשים לב על}$$

קבלנו $\vec{EF} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ ז"א שהוקטורים $\vec{EF}$ ו- $\vec{AC}$ מקבילים.

34. נתונים שני וקטורים u ו- v מאונכים זה לזה ואורכם שווים. חשב את הזווית בין u לבין $v - u$.

תשובה: $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

פתרון: נסמן $l = \|u\| = \|v\|$ ואת הזווית בין u לבין $v - u$ ב- α . הוקטורים u ו- v מאונכים זה לזה, ז"א $\langle u, v \rangle = 0$.

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v - u \rangle}{\|u\| \cdot \|v - u\|} = \frac{\langle u, v \rangle - \langle u, u \rangle}{\|u\| \cdot \|v - u\|} = \frac{0 - \|u\|^2}{\|u\| \cdot \|v - u\|} = -\frac{\|u\|}{\|v - u\|}$$

נשאר לחשב את $\|v - u\|$:

$$\begin{aligned} \|v - u\|^2 &= \langle v - u, v - u \rangle = \langle v, v - u \rangle - \langle u, v - u \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \langle v, u \rangle - \langle u, v \rangle + \langle u, u \rangle \\ &= \|v\|^2 - 0 - 0 + \|u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2 = 2l^2 \end{aligned}$$

לכן $\|v - u\| = \sqrt{2}l$.
סופית, $\cos \alpha = -\frac{l}{\sqrt{2}l} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

35. הוקטורים $u, v \in E_3$ נתונים במערכת קרטזית מסויימת ע"י קואורדינטות:

$$[u] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$[v] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. מצא את קואורדינטות של כל הוקטורים w הניצבים גם ל- u וגם ל- v .

תשובה: $[w] = \begin{pmatrix} 12t \\ 3t \\ -2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ עבור כל ערך של הסקלר הממשי t .

פתרון: הוקטור w מאונך לוקטור u , לכן $\langle u, w \rangle = 0$. באותו אופן, $\langle v, w \rangle = 0$. אזי הקואורדינטות נסמן

$$[w] = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

של הוקטור w הן פתרונות למערכת של שתי משוואות הומוגניות:

$$\begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 + 6\xi_3 = 0 \\ 2\xi_2 + 3\xi_3 = 0 \end{cases}$$

המערכת היא שקולה למערכת מדורגת

$$\begin{cases} \xi_1 + 6\xi_3 = 0 \\ \xi_2 + \frac{3}{2}\xi_3 = 0 \end{cases}$$

למערכת הזאת יש אינסוף פתרונות שתלויים בפרמטר אחד, נסמן אותו ב- t :

$$[w] = \begin{cases} \xi_1 = 12t \\ \xi_2 = 3t \\ \xi_3 = -2t \end{cases} \quad \text{המסקנה:}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 12t \\ 3t \\ -2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4.2 מכפלה וקטורית

4.2.1 מבוא תיאורטי

מכפלה וקטורית נניח u, v שני וקטורים. נסמן ב- $u \times v$ את הוקטור המוגדר ע"י שלושה כללים חדשים:

$$1. \|u \times v\| \text{ שווה לשטח של המקבילית הנוצר ע"י הוקטורים}$$

$$u \text{ ו- } v$$

$$2. u \times v \text{ מאונך גם ל- } u \text{ וגם ל- } v.$$

$$3. \text{ השלישייה } (u, v, u \times v) \text{ חייבת להיות ימנית (כמו שאנחנו רגילים לשרטט את הצירים } x, y, z).$$

דוגמא: נקבע במרחב מערכת צירים כלשהי, ונסמן כרגיל ב- i, j, k את הוקטורי היחידה המתאימים. אזי

$$1. i \times j = k$$

$$2. j \times i = -k$$

$$3. j \times k = i$$

$$4. k \times j = -i$$

$$5. k \times i = j$$

$$6. i \times k = -j$$

תכונות של מכפלה וקטורית

$$1. v \times u = -u \times v$$

$$2. u \times u = 0$$

$$3. u \times v = 0 \text{ אם ורק אם } u \text{ ו- } v \text{ תלויים ליניארית}$$

$$4. (\lambda u) \times v = \lambda(u \times v)$$

$$5. u \times (v + w) = u \times v + u \times w$$

חישוב מכפלה וקטורית בקואורדינטות נניח שבמערכת צירים מסויימת הקואורדינטות של וטורים u ו- v הן

$$u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \text{ אֵזִי}$$

4.2.2 בעיות פתורות

36. מצא את השטח של המקבילית הנוצרת על ידי הוקטורים

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k} \quad \text{ו-} \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

פתרון: השטח S של המקבילית שווה לנורמה של הוקטור $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$S = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$$

לכן נמצא את הוקטור $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 9\mathbf{k}.$$

לכן

$$S = \|3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 9\mathbf{k}\| = \sqrt{9 + 25 + 81} = \sqrt{115}.$$

פרק 5

ישרים במשור E_2

37. רשום את המשוואה הקרטזית ומצא הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך הנקודה $Q(1, -1)$

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ המאונך לוקטור}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = 4t + 1 \\ x_2(t) = 3t - 1 \end{cases} \quad \text{תשובה: } 3x_1 - 4x_2 = 7$$

פתרון: הוקטור $\mathbf{n}$ הוא וקטור נורמלי לישר, לכן המשוואה הקרטזית לישר היא $-3x_1 + 4x_2 = c$. יותר נח לרשום את המשוואה בצורה $3x_1 - 4x_2 = c$. ההצבה $x_1 = 1, x_2 = -1$ (הקואורדינטות של הנקודה Q) נותנת $c = 7$, לכן משוואת הישר היא $3x_1 - 4x_2 = 7$.

בשביל הצגה פרמטרית אנחנו צריכים למצוא וקטור כיוון $\mathbf{v}$. הוקטור $\mathbf{n}$ מאונך לכל וקטור כיוון של הישר, לכן בתור וקטור כיוון מתאים כל וקטור שמקיים את התנאי $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, למשל, הוקטור $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. ידוע שהישר עובר דרך הנקודה

$$Q(1, -1). \text{ נסמן } \vec{OQ} = \mathbf{q} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ לכן מקבלי את ההצגה הפרמטרית הבא:}$$

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{v} + \mathbf{q}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = 4t + 1 \\ x_2(t) = 3t - 1 \end{cases}$$

38. רשום את המשוואה הקרטזית ומצא הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך הנקודה $Q(3, 2)$

ומקביל לציר ה- x .

תשובה:

$$\begin{cases} \text{הצגה קרטזית: } y = 2 \\ \text{הצגה פרמטרית: } \begin{cases} x(t) = 3t + 3 \\ y(t) = 2 \end{cases} \end{cases}$$

פתרון:

1. קודם נמצא את ההצגה הקרטזית. המשוואה של כל ישר שמקביל לציר x היא $y = c$. הישר המבוקש עובר דרך

נקודה $(3, 2)$, לכן $c = 2$. סופית, ההצגה הקרטזית של הישר היא

$$y = 2.$$

2. כדי לרשום הצגה פרמטרית כלשהי, נקח עוד נקודה שמקיימת את התנאי $y = 2$, למשל הנקודה $P(0, 2)$. אזי ניתן

להשתמש בוקטור $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ בתור וקטור כיוון. לכן $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ הצגה פרמטרית של הישר.

אפשר לרשום אותה גם בצורה מפורטת:

$$\begin{cases} x(t) = 3t + 3 \\ y(t) = 2 \end{cases}.$$

פרק 6

מישורים במרחב E_3

39. רשום את המישור העובר דרך הנקודות $A(3, -2, 1)$, $B(1, 0, 2)$ ו- $C(1, 1, -1)$.

$$\begin{cases} x(s, t) = -2s - 2t + 3 \\ y(s, t) = 2s + 3t - 2 \\ z(s, t) = s - 2t + 1 \end{cases} \quad , 7x + 6y + 2z = 11 \quad \text{תשובה:}$$

פתרון:

1. כדי למצוא הצגה פרמטרית של המישור, נסמן $\mathbf{r}(s, t) = \mathbf{u}s + \mathbf{v}t + \mathbf{a}$ של המישור, נסמן $\mathbf{u} := \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} := \overrightarrow{AC}$, כמו כן, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$,

וקטור המיקום של A . העמודות קואורדינטות של הוקטורים האלו הן

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 - 3 \\ 0 - (-2) \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 - 3 \\ 1 - (-2) \\ -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן קבלנו הצגה פרמטרית של המישור:

$$\mathbf{r}(s, t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

או, בצורה אחרת,

$$\begin{cases} x(s, t) = -2s - 2t + 3 \\ y(s, t) = 2s + 3t - 2 \\ z(s, t) = s - 2t + 1 \end{cases}$$

2. כדי למצוא הצגה קרטזית של המישור (משוואה), צריך למצוא וקטור אורתוגונלי לוטורים $\mathbf{u}$ ו- $\mathbf{v}$, ז"א וקטור

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{שמקיים את התנאים}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = 0,$$

אזי המשוואה של המישור היא $ax + by + cz = d$ כאשר את d ניתן למצוא ע"י הצבת קואורדינטות של אחד

מהנקודות A, B, C . נמצא את $\mathbf{n}$:

$$\begin{cases} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle = -2a + 2b + c = 0 \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = -2a + 3b - 2c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$R_2 - R_1 \rightarrow R_2$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) R_1 \rightarrow R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3.5 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

נקח פתרון לא טריויאלי $a = 7, b = 6, c = 2$: $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ אזי המשוואה היא $7x + 6y + 2z = d$. הצבת

הקואורדינטות $x = 1, y = 0, z = 2$ של הנקודה C נותנת $d = 11$, לכן המשוואה המבוקשת היא

$$7x + 6y + 2z = 11.$$

פרק 7

ישרים במרחב E_3

$$40. \quad \text{רשום את הישר} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \quad \text{בצורה פרמטרית.}$$

$$\text{תשובה:} \quad \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \\ z(t) = -t \end{cases} \quad x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ניתן גם לרשום את התשובה בצורה

פתרון: להצגה פרמטרית אנו צריכים וקטור כיוון v ווקטור המקום q של אחת הנקודות שבישר. כל זה אפשר

$$\text{לקבל אם ידועות שתי נקודות בישר, ז"א שני פתרונות של המערכת} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \quad \text{המטריצה של המערכת (הלא}$$

$$\text{הומוגנית) היא} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad \text{נבצע דירוג של המטריצה:}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

לכן כל פתרון נתון ע"י תנאים $x = 1, y + z = 0$. נקח שני פתרונות, נגיד $x = 1, y = z = 0$ ו- $x = y = 1, z = -1$. בשפת

$$\text{גיאומטריה ז"א שבחרנו שתי נקודות בישרת } Q(1, 0, 0) \text{ ו- } P(1, 1, -1) \text{ נסמן} \quad v := \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q := \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{כאשר } O \text{ נקודת ראשית של מערכת הצירים. אזי} \quad r(t) = vt + q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{היא הצגה פרמטרית של הישר.}$$

$$41. \text{ רשום את המשוואה שך המשור } \cdot \begin{cases} x(s, t) = 1 + s - t \\ y(s, t) = 2 + s + 2t \\ z(s, t) = -1 - s + 2t \end{cases}$$

תשובה: $4x - y + 3z = 1$

פתרון: נרשום את המשור בצורה וקטורית: $\mathbf{r}(s, t) = \mathbf{u}s + \mathbf{v}t + \mathbf{q}$ כאשר $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{q} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

משוואה של משור היא $Ax + By + Cz + D = 0$ כאשר $\mathbf{n} := \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ וקטור נורמלי. הוקטור $\mathbf{n}$ מאונך לכל וקטור

שמחבר שתי נקודות במישור, בפרט הוא מאונך לוקטורים $\mathbf{u}$ ו- $\mathbf{v}$. לפנינו שתי דרכים למצוא את הוקטור $\mathbf{n}$.

דרך אחת הוקטור $\mathbf{n}$ הוא פתרון למערכת משוואות $\begin{cases} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = 0 \end{cases}$ כאשר $\langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle$ מסמן את המכפלה הפנימית. באופן מפורש,

המטריצה של המערכת היא $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\begin{cases} A + B - C = 0 \\ -A + 2B + 2C = 0 \end{cases}$

לכן $A = \frac{4}{3}C, B = -\frac{1}{3}C$. נקח $C = 3$, אזי $A = 4, B = -1$, לכן $4x - y + 3z + D = 0$ משוואת המשור היא $4x - y + 3z + D = 0$

דרך אחרת ניתן להשתמש במכפלה וקטורית:

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \\ -(1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)) \\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

לכן משוואת המשור היא $4x - y + 3z + D = 0$

כדי למצוא את D , נציב את השעורים של הנקודה $Q(1, 2, -1)$ במשוואה $4x - y + 3z + D = 0$:

$$4 \cdot 1 - 2 + 3 \cdot (-1) + D = 0 \implies D = -1$$

42. רשום את משוואות המישורים הניצבים למישור $3x - 7y + z = 0$ אשר מרחקם לישר

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{שווה ל- } 3\sqrt{3}$$

תשובה: $28x + 17y + 30z = 476 - \sqrt{3 \cdot 1973}$

פתרון:

קודם כל מצא וקטור נורמלי $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ של המישור המבוקש. הוקטור הזה מאונך גם לוקטור הנורמלי $\mathbf{n}_1 :=$

$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} -28 \\ -17 \\ -30 \end{pmatrix}$ של המישור הנתון וגם לוקטור הכיוון $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ של הישר הנתון. לכן נקח $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

המשוואה של המישור המבוקש היא $28x + 17y + 30z + D = 0$ ונשאר למצוא את D . התנאי לחיפוש אחרי D הוא

המרחק בין המישור החדש ובין הישר הנתון. נקח נקודה על הישר, נגיד, $P(8, 6, 5)$, אז:

$$3\sqrt{3} = \frac{28 \cdot 8 + 17 \cdot 6 + 30 \cdot 5 + D}{\sqrt{28^2 + 17^2 + 30^2}} = \frac{476 + D}{\sqrt{1973}}$$

$$D = 3 \cdot \sqrt{\frac{1973}{3}} - 476 = \sqrt{3 \cdot 1973} - 476 \approx -399.06 \quad \text{לכן}$$

43. רשום את המשוואה הקרטזית ומצא הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך הנקודה $Q(3, 7, 0)$

ומקביל לציר ה- x .

פתרון:

$$\begin{cases} y = 7 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{הצגה קרטזית:}$$

$$\begin{cases} x(t) = t + 3 \\ y(t) = 7 \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad \text{הצגה פרמטרית:}$$

פתרון:

1. לצגה פרמטרית אנחנו צריכים קודם כל את וקטור הכיוון. נתון שהישר המבוקש מקביל לציר x , לכן ניתן

לקחת את וקטור הכיוון הסטנדרטי של הציר x , ז"א את הוקטור $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. לכן ההצגה הפרמטרית היא

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אפשר לרשום אותה גם בצורה מפורטת:

$$\begin{cases} x(t) = t + 3 \\ y(t) = 7 \\ z(t) = 0 \end{cases}.$$

2. נמצא את ההצגה הקרטזית. הישר הוא חיתוך של שני משורים, הראשון נתון ע"י המשוואה $y = 7$, והשני ע"י

המשוואה $z = 0$. זה נותן הצגה קטזית של הישר:

$$\begin{cases} y = 7 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$44. \text{ מצא את המרחק בין הנקודה } M(3, 0, 4) \text{ לישר } \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}.$$

תשובה: $\sqrt{17}$

פתרון:

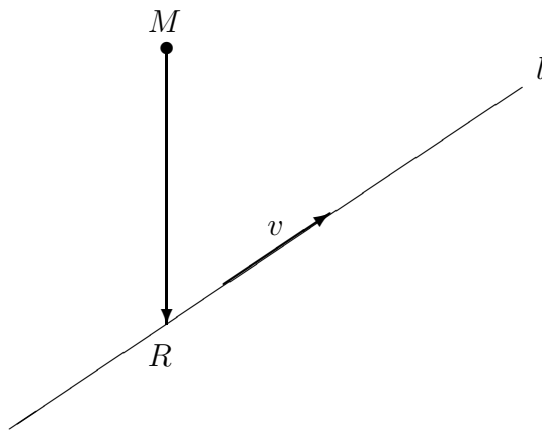
קודם נמטה את הישר בצורה פרמטרית $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{q}$. הישר נתון כחיתוך של שני משורים, עם וקטורים נורמליים

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ו- } \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ לכן וקטור הכוון של הישר הוא}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{בתור וקטור המצב ניתן לקחת } \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ לכן מצנו פרמטריזציה של הישר:}$$

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



ועתה, כדי למצוא את המרחק בין הנקודה M ובין הישר, צריך למצוא את הנקודה R על הישר, כך שהוקטור $\overrightarrow{MR}$ יהיה ניצב לישר, ז"א ניצב לוקטור $\mathbf{v}$, ז"א $\langle \overrightarrow{MR}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

הנקודה R תלויה בפרמטר t , לכן גם הוקטור $\overrightarrow{MR}$ הוא למעשה משפחת וקטורים תלויה ב- t :

$$\overrightarrow{MR} = \begin{pmatrix} t-3 \\ 2t+1 \\ 2t-4 \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{MR}, \mathbf{v} \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} t-3 \\ 2t+1 \\ 2t-4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = (t-3) + 2 \cdot (2t+1) + 2 \cdot (2t-4) \\ &= 9t - 9 = 0 \end{aligned}$$

לכן עבור $t = 1$ הוקטורים מאונכים זה לזה,
$$\overrightarrow{MR} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ו- $MR = \|\overrightarrow{MR}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$

חלק IV

מטריות

יש שלושה סוגים של מטריצות אלמנטריות:

1.

את כל אחד משלוש פעולות Gauß עם מטריצה A ניתן לבצע ע"י כפל במטריצה האלמנטרית המתאימה E . הביטוי

EA מביא למטריצה שקולת שורות. הביטוי AE מביא

45. מצא את המטריצה המדורגת שורות עבור $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ בעזרת כפל בנטריצות

אלמנטריות.

46. מצא את המטריצה ההופכית A^{-1} עבור

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

בעזרת כפל בנטריות

אלמנטריות.

47. חשב את המטריצה

$$\cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n$$

48. חשב את המטריצה $f(A)$ כאשר $f(t) = x^3 - 3x + 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

lla rof $Ae_i = Be_i$ taht hcus $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}$ teL ?eurt si gniwollof eht rehtehW .49

redisnoc :tniH($A = B$ nehT $\mathbb{R}^n$ fo sisab dradnats eht gnieb $(e_1, \dots, e_n)$ htiw , $i = 1, \dots, n$
.)yl etarapes $m > n$ dna $m = n$, $m < n$ sesac eht

50. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ונסמן $L := \{B \in \text{Mat}_2 : AB = BA\}$. הוכח ש- L תת מרחב של Mat_2 ומצא ב- L בסיס.

פתרון: נניח $B, C \in L, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, אזי $AB = BA, AC = CA$ ולכן $A(\alpha B + \beta C) = \alpha AB + \beta AC = (\alpha B + \beta C)A$.
 קבע איך נראת מטריצה שמתחלפת עם A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha + \gamma & \beta + \delta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha + \beta \\ \gamma & \gamma + \delta \end{pmatrix}$$

לכן כדי למצוא את המטריצה הכללית $B \in L$, צריך לפתור מערכת משוואות

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \delta = \alpha \end{cases} \quad \text{או} \quad \begin{cases} \alpha + \gamma = \alpha \\ \beta + \delta = \alpha + \beta \\ \delta = \gamma + \delta \end{cases}$$

בסיכום $B \in L$ אם ורק אם $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. בגלל ש- $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ נסמן $N := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, אזי קבענו של את כל $B \in L$ ניתן לרשום כצירוף לינארי של המטריצות I, N , ז"א $L = \text{Span}(I, N)$. מצד שני, ברור שהמטריצות I, N בלתי תלויות לינארית (אחרת N היתה מטריצה סקלרית!), לכן (I, N) בסיס בשביל L .

51. הוכח כי מטריצה הופכית יחידה.

פתרון: תהי $A \in \text{Mat}_n$ ונניח של- A יש שתי מטריצות הופכיות, B ו- C . לפי ההגדרה של מטריצה הופכית, $BA = AB = I$ וגם $CA = AC = I$ כאשר I מסמן את המטריצה היחידה ב- Mat_n . אזי $C = IC = (BA)C = B(AC) = BI = B$.
לכן $C = B$.

52. מכפלה של מטריצות הפיכות היא מטריצה הפיכה.

פתרון: תהינה $A, B \in \text{Mat}_n$ הפיכות, נסמן ב- A^{-1}, B^{-1} את המטריצות ההופכיות. נכפול את המטריצה AB מצד שמאל במטריצה $B^{-1}A^{-1}$:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

לפי ההגדרה של המטריצה ההופכית, $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$. יש שתי מטריצות הופכיות, B ו- C . לפי ההגדרה של מטריצה הופכית, $BA = AB = I$ וגם $CA = AC = I$ כאשר I מסמן את המטריצה היחידה ב- Mat_n . אזי

$$C = IC = (BA)C = B(AC) = BI = B$$

לכן $C = B$.

חלק V

דטרמיננטות

53. חשב את הדטרמיננטה

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

תשובה: -8

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{R_2 - R_3 \rightarrow R_2 \\ R_3 - R_1 \rightarrow R_3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{הוצאת גורם המשותף}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_1 - C_3 \rightarrow C_1}{=} 2 \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{פיתוח לפי שורה 3}}{=} 2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2(2 - 6) = -8.$$

54. חשב את הדטרמיננטה

$$\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

תשובה: -3

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{= \\ R_2 - R_4 \rightarrow R_2 \\ R_3 - R_4 \rightarrow R_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{= \\ \text{פיתוח לפי עמודה 1}}}{=} (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{=}{R_2 + R_1 \rightarrow R_2}$$

$$\stackrel{=}{R_2 + R_1 \rightarrow R_2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{=}{R_3 + R_2 \rightarrow R_3} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{= \\ \text{דטרמיננטה מושלשת}}}{=} -1 \cdot 1 \cdot 3 = -3.$$

55. נניח שהמטריצה A נילפוטנטית, ז"א שקיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש- $A^k = 0$. הוכח שהמטריצה A אינה

הפיכה.

פתרון:

מטריצה A אינה הפיכה אם ורק אם $\det A = 0$. התכונה האופיינית של דטרמיננטה היא הזהות $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. כתוצאה מזה, $\det(A^k) = (\det A)^k$. אבל נתון ש- $A^k = 0$, לכן $\det(A^k) = \det 0 = 0$, וזה $(\det A)^k = \det(A^k) = \det 0 = 0$, וזה אפשרי רק אם $\det A = 0$.

56. הוכח שהנקודות $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, ו- $R(x_3, y_3)$ נמצאות באותו ישר אם ורק אם

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

פתרון:

1. הקודות P, Q, R נמצאות באותו ישר אם"ם הוקטורים $\overrightarrow{PQ}$ ו- $\overrightarrow{PR}$ תלויים ליניארית. נרשום את הקואורדינטות של

הוקטורים האלו במערכת הצירים הנתונה:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

הוקטורים תלויים ליניארית אם"ם

$$\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. לפי תכונות בסיסיות של הדטרמיננטה,

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 - x_1 \\ y_2 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ y_1 & y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \quad (7.1)$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ y_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ בגלל ש-}$$

3. ועתה, נחשב את הדטרמיננטה $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$. נפתח אותה לפי העמודה השלישית:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

מכיוון ש-

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{vmatrix}$$

לכן

$$(7.2) \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{vmatrix}$$

4. ע"י הנוסחאות (7.1) ו- (7.2), מגיעים למסקנה ש- $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$, לכן הנקודות P, Q, R

$$\cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{שייכות לאותו ישיר אס"ס}$$

חלק VI

מרחבים וקטוריים

מושגים בסיסיים

מרחב וקטורי קבוצה V עם 2 פעולות, אחת נקראת חיבור והשניה כפל בסקלר. הפעולות חייבות לקיים את התנאים הבאים:

$$1. \quad x + y = y + x \quad \text{לכל } x, y \in V$$

תת-מרחב וקטורי תת-קבוצה $L \subset V$ המקיימת את שני התנאים הבאים:

$$1. \quad \text{אם } x, y \in L \text{ אז } x + y \in L$$

$$2. \quad \text{אם } x \in V \text{ ו- } \lambda \in \mathbb{R} \text{ אז } \lambda x \in L$$

57. קבע האם הקבוצה $L := \{\alpha t^2 + \beta t + 1 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ מהווה תת־מרחב של $\mathbb{R}_2[t]$. אם כן,

מצא את המימד של L .

תשובה: L אינה תת־מרחב

פתרון: לפי ההגדרה, $x(t) \in L$ אם ורק אם האיבר החופשי של $x(t)$ שווה ל־1. נניח $x(t), y(t) \in L$ אזי האיבר

החופשי של הפולינום $x + y$ שווה ל־2, לכן $x + y \notin L$ ז"א L אינה סגורה ביחס לחיבור וקטורים.

$$58. \quad \text{קבע האם תת־קבוצה } L := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \xi_n = \xi_1 \right\} \text{ מהווה תת־צרחב וקטורי ב־} \mathbb{R}^n.$$

אם כן, מצא את המימד של L .

תשובה: $\dim L = n - 1$

פתרון:

נבדוק שתת־הקבוצה L סגורה ביחס לחיבור ב־ $\mathbb{R}^n$:

$$\text{נניח } x, y \in L \text{ אז } x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \text{ כאשר } \xi_n = \xi_1 \text{ ו־ } y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} \text{ כאשר } \eta_n = \eta_1. \text{ הסכום, } x + y = \begin{pmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \\ \dots \\ \xi_n + \eta_n \end{pmatrix},$$

גם מקיים אותו תנאי: $\xi_n + \eta_n = \xi_1 + \eta_1$ לכן $x + y \in L$

נבדוק שתת־הקבוצה L סגורה ביחס לפעולת הסקלרים ב־ $\mathbb{R}^n$:

$$\text{נניח } x \in L \text{ אז } x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \text{ כאשר } \xi_n = \xi_1 \text{ ונקח } \lambda \in \mathbb{R}. \text{ אזי } \lambda x = \begin{pmatrix} \lambda \xi_1 \\ \lambda \xi_2 \\ \dots \\ \lambda \xi_n \end{pmatrix} \text{ ברור ש־ } \lambda \xi_n = \lambda \xi_1 \text{ לכן}$$

$\lambda x \in L$

בתור בסיס של L ניתן לבחור למשל

$$.e_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \dots, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הבסיס מכיל $n - 1$ וקטורים.

59. תהי $A \in \text{Mat}_{m \times n}$. קבע האם קבוצת הפתרונות L של המשוואה $Ax = 0$ מהווה תת־מרחב

של $\mathbb{R}^n$.

תשובה: כן

פתרון:

נניח $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ שני פתרונות, ז"א ש־ $Ax_1 = 0$ ו־ $Ax_2 = 0$ אזי $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 + 0 = 0$ ז"א גם

$$x_1 + x_2 \in L$$

נניח כעת $x \in L$ ו־ $\lambda \in \mathbb{R}$, אזי $A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda \cdot 0 = 0$ לכן $\lambda x \in L$.

60. תהי $A \in \text{Mat}_{m \times n}$ ויהי $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$. קבע האם קבוצת הפתרונות L של המשוואה $Ax = b$

מהווה תת־מרחב של $\mathbb{R}^n$.

תשובה: לא

פתרון: $A0 = 0 \neq b$ לכן הקבוצה L אינה מכילה וקטור אפס.

61. תהי $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ויהי $U := \{B \in \text{Mat}_2(\mathbb{R}) : AB = B\}$. הוכח ש- U תת מרחב של

$\text{Mat}_2(\mathbb{R})$. מצא בסיס ל- U ואת $\dim U$.

תשובה: $\dim U = 2$, בסיס ב- U : (C_1, C_2) כאשר

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: נקח $B_1, B_2 \in \text{Mat}_2(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. אזי $AB_1 = B_1$ ו- $AB_2 = B_2$, לכן

$$A(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) = \lambda_1 AB_1 + \lambda_2 AB_2 = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2,$$

ז"א $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 \in U$. קבענו שהקבוצה U סגורה ביחס לצירופים לינאריים, לכן היא תת מרחב וקטורי.

כדי למצוא בסיס ואת המימד של U , נסמן $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. אזי ניתן לרשום את ההמשוואה $AB = B$ כמערכת

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ 2x_1 + x_3 = x_3 \\ 2x_2 + x_4 = x_4 \end{array} \right. \quad \text{של 4 משוואות לינאריות:}$$

הפתרון הוא $x_1 = x_2 = 0$. המסקנה: $B \in U$ אם ורק אם

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נניח כי $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$. אנחנו רואים ש- $U = \text{Span}(C_1, C_2)$. נוכיח שהוקטורים C_1, C_2 בלתי תלויים לינארית. נניח כי $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$.

$$0 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{אזי } \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

לסקלרים λ_1, λ_2 מסויימים. זה מוכיח איתלות לינארית.

המסקנה: הוקטורים C_1 ו- C_2 בלתי תלויים לינארית ופורשים את U לכן מהבים בסיס ב- U . בפרט, $\dim U = 2$.

תלות לינארית

- צירוף לינארי $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$ טריוויאלי אם כל המקדמים הם אפסים: $\alpha_i = 0$ עבור כל $i = 1, 2, \dots, k$.
- מערכת הוקטורים $x_1, x_2, \dots, x_k$ תלויה לינארית אם קיים צירוף לינארי לא טריוויאלי ששווה לוקטור אפס: $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0$ ולא כל מקדמים α_i שווים לאפס. אחרת, נאמר שהמערכת היא בלתי תלויה לינארית.
- עבור מערכת וקטורים $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$, נסמן ב- $\text{Span}(x_1, \dots, x_k)$ את הקבוצה של כל הצירופים הלינאריים

של $x_1, x_2, \dots, x_k$

$$\text{Span}(x_1, \dots, x_k) := \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i : \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

תת מרחבים וקטוריים

62. הוכח שכל מערכת וקטורים שמכילה וקטור אפס תלויה לינארית.

פתרון: נתבונן במערכת וקטורים $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, 0)$ (ז"א ש- $x_k = 0$). אזי צירוף לינארי

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_{k-1} + 1 \cdot 0$$

שווה לוקטור 0 והצירוף אינו טריוואלי, כי $\alpha_k = 1 \neq 0$. לכן כל המערכת תלויה לינארית.

63. הוכח שכל מערכת וקטורים שמכילה שני וקטורים שווים זה לזה תלויה לינארית.

פתרון: נתבונן במערכת וקטורים $(x_1, x_2, \dots, x_k)$. ע"י שינוי במספור של הוקטורים (אם יש צורך), ניתן לשים את

שני הוקטורים השווים בתכילה, ז"א ניתן להניח ש־ $x_1 = x_2 = x$:

$$(x, x, x_3, \dots, x_k).$$

אזי צירוף לינארי

$$1 \cdot x + (-1) \cdot x + 0 \cdot x_3 + \dots + 0 \cdot x_k$$

שווה לוקטור 0 והצירוף אינו טריוואלי, כי $\alpha_k = 1 \neq 0$. לכן כל המערכת תלויה לינארית.

64. הוכח שהפונקציות $\sin x$, $\cos x$ ו- e^{2x} , אינן תלויות לינארית.

פתרון: נניח, בניגוד, שקיימים מספרים $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ כאלה ש- $\lambda \sin x + \mu \cos x + \nu e^{2x} = 0$ לכל x . אזי זה נכון גם

ל- $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$:

$$\begin{cases} \lambda \sin 0 + \mu \cos 0 + \nu e^0 = 0 \\ \lambda \sin \frac{\pi}{2} + \mu \cos \frac{\pi}{2} + \nu e^\pi = 0 \\ \lambda \sin \pi + \mu \cos \pi + \nu e^{2\pi} = 0 \end{cases}$$

ז"א

$$\begin{cases} \mu + \nu = 0 \\ \lambda + \nu e^\pi = 0 \\ -\mu + \nu e^{2\pi} = 0 \end{cases}$$

למערכת הזאת יש רק פתרון טריוויאלי: $\lambda = \mu = \nu = 0$ לכן רק צירוף לינארי של הפונקציות $\sin x$, $\cos x$, e^{2x}

מתאפס.

65. תת קבוצה (קבוצה חלקית) $W \subset V$ היא תת מרחב של V אם ורק אם לכל k וקטורים

$$x_1, x_2, \dots, x_k \in W \text{ ולכ } k \text{ סקלרים } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \text{ הצירוף הלינארי } \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \text{ שייך ל-} W.$$

פתרון:

1. לפי ההגדרה, W מרחב וקטורי בעצמו, לכן כל צירוף לינארי של וקטורים ב- W שוב שייך ל- W .

2. נניח שכל צירוף לינארי של וקטורים מ- W שוב שייך ל- W . אזי זה נכון גם עבור שני וקטורים $x, y \in W$:

$\lambda x + \mu y \in W$ עבור כל $\lambda, \mu \in F$. בפרט, אנו יכולים לקחת $\lambda = 1$ ו- $\mu = 1$, מגיעים למסקנה ש- $x + y \in W$.

ז"א שהקבוצה W סגורה ביחס לפעולת חיבור של וקטורים. ועתה נשים $\mu = 0$, מגיעים למסקנה $\lambda x \in W$, ז"א

שהקבוצה W סגורה ביחס לפעולת כפול בסקלר. לכן W תת מרחב וקטורי של V .

66. נניח $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$. אזי $\text{Span}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ תת מרחב וקטורי של V .

פתרון:

נניח $u, v \in \text{Span}(x_1, x_2, \dots, x_k)$, אזי הוקטורים האלו צירופים לינאריים של $x_1, x_2, \dots, x_k$:

$$u = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \quad v = \sum_{i=1}^k \beta_i x_i$$

1. סגירות ביחס לחיבור: נוכיח כי $u + v \in \text{Span}(x_1, x_2, \dots, x_k)$

$$u + v = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i = \sum_{i=1}^k (\alpha_i x_i + \beta_i x_i) = \sum_{i=1}^k (\alpha_i + \beta_i) x_i,$$

שוב קיבלנו צירוף לינארי של אותם וקטורים $x_1, x_2, \dots, x_k$, לכן $u + v \in \text{Span}(x_1, x_2, \dots, x_k)$

2. סגירות ביחס לכפל לסקלר: נוכיח כי עבור כל $\lambda \in F$

מתקיים $\lambda u \in \text{Span}(x_1, x_2, \dots, x_k)$

$$\lambda u = \lambda \cdot \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^k (\lambda \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^k (\lambda \alpha_i) x_i,$$

שוב קיבלנו צירוף לינארי של אותם וקטורים $x_1, x_2, \dots, x_k$, לכן $\lambda u \in \text{Span}(x_1, x_2, \dots, x_k)$

בסיסים במרחבים וקטוריים

67. מצא בסיס ומימד של התת מרחב $W := \text{Span}(u_1, u_2, u_3) \subset \mathbb{R}^4$ כאשר

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

השלים את הבסיס שמצאתה עד לבסיס של המרחב $\mathbb{R}^4$.

תשובה:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ בסיס ב- } W.$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ בסיס ב- } \mathbb{R}^4.$$

פתרון:

1. כדי למצוא בסיס ב- W , נרשום את העמודות u_1, u_2, u_3 כעמודות של מטריצה אחת, ונביא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -4 & -3 & -8 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

אותה על ידי פעולות עמודה בלבד לצורה מדורגת. אזי בכל שלב אנו נקבל מטריצה שעמודיה יהיו וקטורים מהתת

מרחב W :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -4 & -3 & -8 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 - \widetilde{C}_1 \rightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & -8 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} C_1 + 4\widetilde{C}_2 \rightarrow C_1 \\ C_3 + 8\widetilde{C}_2 \rightarrow C_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -6 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3 - 3\widetilde{C}_1 \rightarrow C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 - 2\widetilde{C}_3 \rightarrow C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{לכן הוקטורים } w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ מהווים בסיס ב- } W.$$

(אגב, החישוב שעשינו אומר שהוקטורים u_3, u_2, u_1 בלתי תלויים לינארית. לכן יכולנו בעקרון לקחת אותם בתור בסיס של W . אבל יותר קשה להשלים אותם עד לבסיס ב- $\mathbb{R}^4$.)

$$2. \text{ נסמן } x := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ברור שהכל אחת מהמערכות } x, w_1, x, w_2 \text{ או } x, w_3 \text{ בת"ל. צריך לוודא אבל שכל המערכת}$$

$$w_1, w_2, w_3, x \text{ בלתי תלויה לינארית. נחשב את הדטרמיננטה}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

הדטרמיננטה שונה מ-0, לכן הוקטורים

$$w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ מהווים בסיס ב- } \mathbb{R}^4.$$

חלק VII

העתקות ליניאריות

פרק 8

מושגים בסיסיים

העתקה לינארית T מכילה שלושה נתונים:

תחום: מרחב וקטורי U

טווח: מרחב וקטורי V

כלל התאמה: לכל וקטור $x \in U$ קיים וקטור $y \in V$ יחיד. במצב כזה כותבים $y = Tx$ ואומרים ש- y הוא תמונה של x , וגם ש- x הוא מקור של y . כלל ההתאמה T אמור לקיים שני תנאים:

$$1. \quad T(x + y) = Tx + Ty \quad \text{לכל } x, y \in U$$

$$2. \quad T(\lambda x) = \lambda Tx \quad \text{לכל } x \in U \text{ ו-} \lambda \in \mathbb{R}$$

במילים אחרות, ההעתקה T היא לינארית אם ורק אם היא שומרת צירופים לינאריים, ז"א אם

$$T\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^m \alpha_k T x_k$$

$$\text{לכל } x_1, x_2, \dots, x_m \in U \text{ ולכל } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$$

הגרעין של ההעתקה לינארית T זה הקבוצה של (כל) המקורות של הוקטור $0 \in V$. הסמן של הגרעין של ההעתקה T הוא $\ker T$:

$$\ker T := \{x \in U \mid Tx = 0\}$$

חיפוש הגרעין של ההעתקה הלינארית הנתונה, קשור לשאלה על מספר פתרונות של מערכת מסויימת של משוואות לינאריות הומוגניות.

התמונה של ההעתקה לינארית $T: U \rightarrow V$ זה הקבוצה של (כל) הוקטורים $y \in V$ שיש להם לפחות מקור אחד. הסמן של התמונה של ההעתקה T הוא $\operatorname{Im} T$. לכן $y \in \operatorname{Im} T$ אם ורק אם קיים $x \in U$ כך ש- $Tx = y$.

כשמחפשים את התמונה של ההעתקה הלינארית הנתונה, פותרים מערכת מסויימת של משוואות לינאריות לא הומוגניות.

נניח נתונה העתקה לינארית $T: U \longrightarrow V$. עבור $x \in U$ נסמן $y := Tx$. במצב הזה y נקרא **התמונה** של x ו- x הוא **מקור** ל- y .

לכל וקטור במחב הוקטורי $y \in V$ יכול להיות מקור אחד, אינסוף מקורות, או יכול להיות של- y אין מקור כלל.

68. נתונה העתקה לינארית $T: U \longrightarrow V$. $e_1, \dots, e_n \in U$ תל $\text{Im } T = \text{span}\{Te_1, \dots, Te_n\}$.

$\text{Span}(Te_1, \dots, Te_n)$
erom on era ereht $Te_1, \dots, Te_n$ srotcav eht gnoma taht eton ,won n naht

69. הוכח כי ההעתקה $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix}$ היא לינארית.

70. נניח U מרחב וקטורי ממימד m , נניח B בסיס של U . אזי כלל ההתאמה $x \mapsto [x]_B$ מגדיר

העתקה לינארית $U \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

71. ההעתקה הלינארית $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ נתונה ע"י הכלל $Tx = Ax$ כאשר $x \in \mathbb{R}^3$ ו-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \text{ מצא בסיס כלשהו של הגרעין } \ker T \text{ וכלשהו בסיס של התמונה } \operatorname{Im} T.$$

$$\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^2, \ker T = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון:

$$.T \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi - 2\eta \\ 2\xi + \eta - \zeta \end{pmatrix} \quad \text{72. ההעתקה } T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ נתונה ע"י הנוסחה}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{מצא את כל המקורות של הוקטור}$$

פתרון: צריך למצוא ξ, η, ζ כך ש-

$$\begin{pmatrix} \xi - 2\eta \\ 2\xi + \eta - \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

או, במילים אחרות, למצוא את כל הפתרונות למערכת המשוואות הלינאריות

$$\begin{cases} \xi - 2\eta = 1 \\ 2\xi + \eta - \zeta = 3 \end{cases}$$

המטריצה המורחבת של המערכת היא $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right)$, נשתמש בתהליך Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right)$$

הגענו למערכת המשוואות $\begin{cases} \xi = \frac{2}{5}\zeta + \frac{7}{5} \\ \eta = \frac{1}{5}\zeta + \frac{1}{5} \end{cases}$ לכן יתן לקחת את ζ בתואר פרמטר חופשי. יותר נוח אבל לקחת את הפרמטר t המוגדר ע"י התנאי $\zeta = 5t$. אזי

$$\begin{cases} \xi = 2t + \frac{7}{5} \\ \eta = t + \frac{1}{5} \\ \zeta = 5t \end{cases}$$

לכן המקור של $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ קבוצה (איסופית) של וקטורים

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1.4 \\ 0.2 \\ 0.0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

73. האם קיימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\text{כך ש-} T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ו- } T \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

פתרון: כל שלושה וקטורים במרחב הדו מימדי $\mathbb{R}^2$ תלויים לינארית. נמצא את הסקלרים λ, μ, ν כך ש- $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} = 0$ הסקלרים λ, μ, ν הם פתרון למערכת משוואות הומוגנית עם המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

הגענו למערכת משוואות $\begin{cases} \lambda - 2\nu = 0 \\ \mu + 3\nu = 0 \end{cases}$, אחד מאינסוף פתרונות לא טריוויאליים: $\nu = 1, \mu = -3, \lambda = 2$:

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} = 0$$

ההעתקה הלינארית T קיימת אם ורק אם הוקטורים $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ נמצאים באותה תלות, ז"א -

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{נבדוק:}$$

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \neq 0.$$

מסקנה: ההעתקה T אינה קיימת.

74. תהי $T: V \longrightarrow W$ העתקה לינארית. הוכח כי T חד חד ערכית אם ורק אם $\ker T = 0$.

ע"י פעולות ה־Gauß $R_2 - R_1 \longrightarrow R_2$ ו־ $R_1 - R_2 \longrightarrow R_1$ מביאים את A לצורה מדורגת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

רואים שפתרונות למערכת מהווים משפחה חד־פרמטרית (מספר הנעלמים פחות מספר המשוואות הוא $3 - 2 = 1$). לכן

$$\dim \ker T = 1 \text{ והבסיס של } \ker T \text{ מהווה מוקטור אחד, שהוא כל וקטור}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ למשל, הוקטור } \begin{cases} \xi_1 - \xi_3 = 0 \\ \xi_2 + 2\xi_3 = 0 \end{cases} \text{ שמקיים את התנאי } x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \ker T$$

פתרון:

נסמן ב- (u_1, u_2, u_3) את הבסיס הסטנדרטי במרחב $\mathbb{R}^3$, ז"א

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ברור ש-} \quad Tu_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, Tu_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, Tu_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

של וקטורי הבסיס הן העמודות של המטריצה A . בגלל ש- $\text{Im } T = \text{Span}(Tu_1, Tu_2, Tu_3)$, המימד $\dim \text{Im } T =$

$\dim \text{Span}(Tu_1, Tu_2, Tu_3)$ שווה לדרגה $\text{rk } A$ של המטריצה A . אבל הנוסחה (8) אומרת ש- $\text{rk } A = 2$.

76. נניח ש- $\dim V = n$, קבע בסיס כלשהו B ב- V . הוכח שההעתקה הלינארית $T: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$

הנתונה ע"י הכלל $Tx := [x]_B$ היא איסומורפיסם.

77. נקבע מטריצה $A \in \text{Mat}_{m \times n}$, ונגדיר העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ע"י הכלל $Tx := Ax$.

נסמן ב- c_i את העמודות של $A: A = (c_1, \dots, c_n)$. הוכח כי $\text{Im } T = \text{Span}(c_1, \dots, c_n)$.

78. נתונים העתקה לינארית $T : U \longrightarrow V$ וקבוצת וקטורים $x_1, x_2, \dots, x_l \in U$.

הוכח שאם הוקטורים $Tx_1, \dots, Tx_l$ בלתי תלויים לינארית, אז גם הוקטורים $x_1, \dots, x_l$ בלתי

תלויים לינארית.

האם הטענה הפוכה נכונה?

פתרון: נניח שהוקטורים $x_1, \dots, x_l$ תלויים לינארית, ז"א שקיימים מספרים $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ לא כולם שווים ל-0 המקיימים

$$\sum_{k=1}^l \alpha_k x_k = 0. \text{ הלינאריות של } T \text{ אומרת ש- } T\left(\sum_{k=1}^l \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^l \alpha_k Tx_k \text{ וגם } T0 = 0. \text{ לכן}$$

$$T\left(\sum_{k=1}^l \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^l \alpha_k Tx_k = 0,$$

במילים אחרות, קבלנו שהוקטורים $Tx_1, \dots, Tx_l$ תלויים לינארית, בניגוד לנתונים. לכן ההשערה שהוקטורים $x_1, \dots, x_l$

תלויים לינארית אינה נכונה.

הטענה שאם הקבוצה $x_1, \dots, x_l$ בלתי תלויים לינארית, אז גם הקבוצה $Tx_1, \dots, Tx_l$ בלתי תלוייה לינארית, לא

נכונה כשרואים בדוגמה של ההעתקה $T = 0$: למרות שוקטורים $x, y \in U$ בת"ל, הוקטורים $Tx = Ty = 0$ בוודאי תלויים

לינארית.

79. ההעתקה הלינארית $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ נתונה ע"י הכלל $Tx = Ax$ כאשר $x \in \mathbb{R}^3$ ו-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

מצא בסיס כלשהו של הגרעין $\ker T$ וכלשהו בסיס של התמונה $\operatorname{Im} T$.

80. ההעתקה הלינארית $T : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$ נתונה ע"י הכלל $Tx := \dot{x}$ כאשר $x(t)$ רב-איבר

מעלה 0, 1 או 2, ו- $\dot{x}$ מסמן את הנגזרת של x . מצא את הגרעין $\ker T$ ואת התמונה $\operatorname{Im} T$ של ההעתקה T .

81. האם קיימת העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ שמעבירה את המשור

$$? \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ לנקודה } s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

פתרון:

נסמן

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אזי המשור מהווה מהוקטורים $\alpha u_1 + \beta u_2 + v$ כאשר $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. רוצים שיהיה $T(\alpha u_1 + \beta u_2 + v) = w$. נשתמש בלינאריות של T : $\alpha T u_1 + \beta T u_2 + T v = w$ לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. בפרט זה נכון כאשר $\alpha = \beta = 0$, כאשר $\alpha = 1, \beta = 0$, וכאשר $\alpha = 0, \beta = 1$.

$$T v = w$$

$$T u_1 + T v = w$$

$$T u_2 + T v = w$$

לכן

$$T u_1 = 0$$

$$T u_2 = 0$$

$$T v = w$$

בגלל ש- $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, הוקטורים u_1, u_2, v בלתי תלויים לינארית, לכן בחירה של שלושת הוקטורים $T u_2, T u_1$, ו- $T v$ קובעת את העתקה היחידה T .

82. האם קיימת העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ המעתיקה את המשור

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{על המשור } 2x - 2y - 6z = 1$$

פתרון: מימד של המשור שווה ל-2, והמימד של הקבוצה השניה הוא 3 (מימד של מרחב $\mathbb{R}^4$ פחות מספר המשוואות, ז"א $4 - 1 = 3$). הגענו לסתירה לוגית, בגלל שמימד של קבוצה לא יכול להיות קטן ממימד של תמונתה. הטענה הזו היא מסקנה של המשפט הידוע: אם $x_1, x_2, \dots, x_k$ מערכת וקטורים תלויה לינארית ו- T העתקה לינארית, אז המערכת $Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_k$ גם תלויה לינארית.

פרק 9

קואורדינטות. מטריצות יצוג

.83 **a teL** **pam raenil** **eb** **nevig** **yb** **eht** **elur** **$Tx := Ax$** **erehw** **$A \in \text{Mat}_{n \times m}$**

nehT **A** **$=$** **$[T]_{E_m}^{E_n}$**

84. נניח שההעתקה הלינארית $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ מוגדרת ע"י התנאי $Tx := Ax$ כאשר $A \in M_{n \times m}$

מטריצה מסויימת. הוכח כי T איזומורפיסם אם"ס A מטריצה הפיכה.

פתרון:

1.

נניח שהמטריצה A הפיכה, ונוכיח שההעתקה T חח"ע ועל.

85. נקבע במרחב וקטורי V , $\dim V = n$ בסיס B. הוכח כי הכלל $Tx = [x]_B$ מגדיר איזומורפיזם

$$V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$.b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, B = (b_1, b_2, b_3), x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} : [x]_B \text{ מצא את } .86$$

.87 **מצא את** $: [x]_B$ $, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, B = (b_1, b_2, b_3), b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$,b_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = (b_1, b_2, b_3, b_4), X = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{pmatrix} : [x]_B \textbf{מצא את} \textbf{.88}$$

$$.b_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

89. מצא את המטריצה $[T]$ בבסיס הסטנדרטי: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 - \xi_3 \\ \xi_1 - 2\xi_2 \end{pmatrix}$$

מצא את המטריצה $[T]$ בבסיס הסטנדרטי: $f : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $f(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) =$

$$\cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ 3\gamma \end{pmatrix}$$

$$f \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix}, f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

מצא את המטריצה $[T]$ בבסיס הסטנדרטי:

$$f \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ בבסיס הסטנדרטי: } [T] \text{ מטריצה}$$

מצא את המטריצה $[T]$ בבסיס הסטנדרטי: $T : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$, $f(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) =$

$$.2\beta t^2 - \gamma t + \alpha$$

מצא את המטריצה $[T]$ בבסיס הסטנדרטי: $f : M_2 \longrightarrow M_2$, $T(X) := AX$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, X \in M_2$$

האופרטור $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ נתון ע"י כללים:

$$T \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

היצוג $[T]_E^E$ של T בבסיס הסטנדרטי E מצא את מטריצת

פרק 10

מטריצת המעבר. החלפת בסיסים

נתונים 2 בסיסים, $B := (b_1, \dots, b_n)$ ו- $\Gamma := (c_1, \dots, c_n)$ של אותו מרחב וקטורי V . אם לפרש בתמימות את B ו- Γ כמטריצות שורה, ניתן להגדיר את מטריצת המעבר ע"י הנוסחה

$$\Gamma = BM_B^\Gamma$$

או, באופן יותר פורמלי,

$$c_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ji} b_j, \quad i = 1, \dots, n$$

כאשר $M_B^\Gamma = (\mu_{ij})_1^n$.

תכונות של מטריצת המעבר

• המטריצה M_B^Γ הפיכה.

$$\bullet (M_B^\Gamma)^{-1} = M_\Gamma^B.$$

$$\bullet M_B^\Delta = M_\Gamma^B M_\Delta^\Gamma.$$

• $M_B^B = I_n$ כאשר I_n מסמן את מטריצת היחידה.

10.0.1 שימוש של מטריצת המעבר

לכל $x \in V$ $[x]_\Gamma = M_B^\Gamma [x]_B$ כאשר $[x]_B$ מסמן את עמודת קואורדינטות של x בבסיס B .

נתונים שני בסיסים במרחב הוקטורי $\mathbb{R}^4$: $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ ו- $\Gamma = (c_1, c_2, c_3, c_4)$

$$b_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{כאשר}$$

$$c_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מצא את המטריצות M_B^Γ ו- M_Γ^B .

פתרון:

נשתמש בבסיס הסטנדרטי $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ כבסיס עזר.

$$E = M_E^\Gamma \Gamma, \Gamma = M_\Gamma^E E, \text{ לכן } \Gamma = M_E^\Gamma M_B^E B, \Gamma = M_E^\Gamma E$$

$$\Gamma = M_E^\Gamma (M_E^B)^{-1} B$$

העמודות של המטריצה M_E^B , הן פשוט b_1, b_2, b_3, b_4 :

$$M_E^B = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

בשלב הזה, נבדוק שהמערכת b_1, b_2, b_3, b_4 מהווה בסיס. מספיק לבדוק שהוקטורים בלתי תלויים לינארית. זה נכון כי

$$\det M_E^B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -13$$

שונה מ־0. באותו אופן, המערכת Γ גם בסיס, בגלל שהדטרמיננטה

$$\det M_E^\Gamma = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13$$

גם שונה מ־0. נחשב את המטריצה M_B^E :

$$-\frac{1}{13} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$-\frac{1}{13} \left(\begin{array}{ccc} \left| \begin{array}{ccc} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{ccc} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \\ \\ - \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \\ \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \\ \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right| \end{array} \right)^{\top}$$

$$-\frac{1}{13} \left(\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \quad - \left| \begin{array}{ccc} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \\ \\ - \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right| \quad - \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \\ \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \quad - \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \\ \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| \quad - \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right| \end{array} \right)^{\top}$$

90. יהי $V = \text{Span}(\cos t, \sin t)$. נסמן $B = (\sin t, \cos t)$, $\Gamma = (\cos t, \sin t)$, ונגדיר אופרטור

$T : V \longrightarrow V$ ע"י הכלל $Tx := 2\ddot{x} + \dot{x}$. רשום את המטריצות $[T]_B^B$ ו- $[T]_\Gamma^B$ ומצא את הערכים העצמיים של T .

פתרון:

מטריצות המעבר היא $[T]_B^B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ לכן $T(\cos t) = -\sin t - 2\cos t$, $T(\sin t) = -2\sin t + \cos t$

$$M_F^B = M_B^\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ לפי הנוסחה}$$

$$[T]_\Gamma^B = M_\Gamma^B \cdot [T]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ נקבל } [T]_A^\Delta = M_A^B \cdot [T]_B^\Gamma \cdot M_\Gamma^\Delta$$

כדי למצוא את הערכים העצמיים, נשתמש במטריצת היצוג $[T]_B^B$:

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & -1 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = -2 \pm i$$

91. העתקה ליניארית $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ נתונה ע"י כלל ההתאמה

$$T \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3+i)\xi_1 \\ i\xi_2 \end{bmatrix}$$

מצא את מטריצת הייצוג $[T]_{\Gamma}^{\Phi}$ כאשר $\Phi = (f_1, f_2)$, $\Gamma = (g_1, g_2)$

$$g_2 = \begin{bmatrix} 1+2i \\ 1+i \end{bmatrix}, g_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -6+2i \end{bmatrix}, f_1 = \begin{bmatrix} 6-2i \\ 12-4i \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\Gamma}^{\Phi} = \begin{bmatrix} 8+16i & -6-2i \\ -4 & -4i \end{bmatrix} \quad \text{תשובה:}$$

פתרון: דרך ראשונה:

1. נמצא את התמונות של וקטורי הבסיס Φ :

$$T(f_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2-6i \end{bmatrix}, T(f_1) = \begin{bmatrix} 20 \\ 4+12i \end{bmatrix}$$

2. נמצא את הקואורדינטות של התמונות לפי הבסיס Γ . נמצא קודם את הקואורדינטות של הוקטור $T(f_1)$

$$\zeta_2, \zeta_1 \text{ (מרוכבים) המקיימים את התנאי } \begin{bmatrix} 20 \\ 4+12i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

$$\zeta_1 g_1 + \zeta_2 g_2 = \zeta_1 \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix} + \zeta_2 \begin{bmatrix} 1+2i \\ 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 4+12i \end{bmatrix}.$$

זאת מערכת משוואות לא הומוגניות. נמצא את הפתרון בעזרת המטריצה המורחבת:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-i & 1+2i & 20 \\ 1 & 1+i & 4+12i \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1+2i & 4-8i \\ 1 & 1+i & 4+12i \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1+i & 4+12i \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1+i & 4+12i \\ 0 & 1 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8+16i \\ 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

לכן $\zeta_2 = -4, \zeta_1 = 8 + 16i$ ז"א ש- $[T(f_1)]_\Gamma = \begin{pmatrix} 8 + 16i \\ -4 \end{pmatrix}$. פעולות השורה שביצענו הן

$$R_1 - (1 - i)R_2 \longrightarrow R_1$$

$$\frac{1}{-1 + 2i} R_1 \longrightarrow R_1$$

$$R_1 \longleftrightarrow R_2$$

$$R_1 - (1 + i)R_2 \longrightarrow R_1$$

נבדוק את התוצאה שלנו:

$$(8 + 16i) \begin{bmatrix} 6 - 2i \\ 12 - 4i \end{bmatrix} + (-4) \begin{bmatrix} 0 \\ -6 + 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 4 + 12i \end{bmatrix}$$

באופן דומה,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 - i & 1 + 2i & 0 \\ 1 & 1 + i & -2 - 6i \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -6 - 2i \\ 0 & 1 & -4i \end{array} \right)$$

$$[T(f_2)]_\Gamma = \begin{pmatrix} -6 - 2i \\ -4i \end{pmatrix} \text{ ז"א ש- } \zeta_2 = -4i, \zeta_1 = -6 - 2i \text{ לכן}$$

נבדוק את התוצאה שלנו:

$$(-6 - 2i) \begin{bmatrix} 6 - 2i \\ 12 - 4i \end{bmatrix} + (-4i) \begin{bmatrix} 0 \\ -6 + 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 - 6i \end{bmatrix}$$

$$[T]_\Gamma^\Phi = \begin{bmatrix} 8 + 16i & -6 - 2i \\ -4 & -4i \end{bmatrix} : [T(f_2)]_\Gamma \text{ ו- } [T(f_1)]_\Gamma \text{ הן } [T]_\Gamma^\Phi \text{ המטריצה } 3. \text{ העמודות של}$$

1. נשתמש בנוסחה $[T]_{\Gamma}^{\Phi} = (M_E^{\Gamma})^{-1} [T]_E^{\Phi} M_E^{\Phi}$ כאשר E מסמן את הבסיס התקין ב- $\mathbb{C}^2$: $E = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ את

המטריצות $[T]_E^{\Phi}$ ו- M_E^{Φ} קל לרשום:

$$[T]_E^{\Phi} = \begin{bmatrix} 3+i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad M_E^{\Phi} = \begin{bmatrix} 6-2i & 0 \\ 12-4i & -6+2i \end{bmatrix} \quad M_E^{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1-i & 1+2i \\ 1 & 1+i \end{bmatrix}$$

2. נהפוך את המטריצה M_E^{Γ} לפי הנוסחה $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$

$$(M_E^{\Gamma})^{-1} = \frac{1}{1-2i} \begin{bmatrix} 1+i & -1-2i \\ -1 & 1-i \end{bmatrix} = \frac{1+2i}{5} \begin{bmatrix} 1+i & -1-2i \\ -1 & 1-i \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1+3i & 3-4i \\ -1-2i & 3+i \end{bmatrix}$$

אזי

$$[T]_{\Phi}^{\Gamma} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1+3i & 3-4i \\ -1-2i & 3+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3+i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-i & 1+2i \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+16i & -6-2i \\ -4 & -4i \end{bmatrix}$$

MATLAB /octave code:

```
pkg load symbolic
```

```
TEE=sym([3+i 0;0 i]);
```

```
MGa=sym([1-i 1+2i; 1 1+i]);
```

```
MPh=sym([6-2i 0;12-4i -6+2i]);
```

```
TPhGa=simplify(MGa^-1*TEE*MPh);
```


פרק 11

ערכים עצמיים וקטורים עצמיים

92. נניח שאופרטור A הפיך. הוכח כי ל- A וגם ל- A^{-1} יש אותם וקטורים עצמיים.

חלק VIII

מרחבים אוקלידיים

פרק 12

מכפלה פנימית ואורתוגונליות

בהמשך $\langle x, y \rangle$ מסמן מכפלה פנימית במרחב וקטורי V .

93. נניח שהוקטור $u \in V$ מאונך לוקטורים $v, w \in V$. הוכח שהוקטור u מאונך גם לוקטור

$$v - w.$$

פתרון:

נתון: $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle = 0$, נחשב את $\langle u, v - w \rangle$:

$$\langle u, v - w \rangle = \langle u, v \rangle - \langle u, w \rangle = 0 - 0 = 0 \text{ לכן } u \text{ מאונך ל-} v - w.$$

94. נסמן ב־ V את המרחב הוקטורי $\mathbb{R}_2[t]$ עם מכפלה פנימית

$$\langle x, y \rangle := \int_0^1 x(t)y(t) dt \quad \text{עבור כל } x, y \in V.$$

מצא ערכים של הפרמטר α שעבורם המערכת $(t, t^2 - \alpha)$ אורתוגונלית.

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{תשובה:}$$

פתרון: המערכת $(t, t^2 - \alpha)$ אורתוגונלית אם ורק אם $\langle t, t^2 - \alpha \rangle = 0$. נחשב את הביטוי הזה, לפי ההגדרה של

המכפלה הפנימית ב־ V :

$$\langle t, t - \alpha \rangle = \int_0^1 t(t^2 - \alpha) dt = \int_0^1 (t^3 - \alpha t) dt = \left. \frac{t^4}{4} \right|_0^1 - \alpha \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2}.$$

רואים שהמכפלה הפנימית $\langle t, t - \alpha \rangle = \int_0^1 t(t^2 - \alpha) dt = \int_0^1 (t^3 - \alpha t) dt = \left. \frac{t^4}{4} \right|_0^1 - \alpha \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2}$ שווה לאפס

אם ורק אם $\alpha = \frac{1}{2}$.

95. נתונים הוקטורים $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ו- $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ נסמן $U := \text{Span}(v_1, v_2)$.

1. בעזרת תהליך Gram–Schmidt מצא בסיס אורתונורמלי עבור U .

2. מצא את ההיטל $\text{Pr}_U(x)$.

3. מצא בסיס עבור $U^\perp$.

4. מצא את ההיטל $\text{Pr}_{U^\perp}(x)$.

96. בעזרת תהליך Gram–Schmidt מצא בסיס אורתונורמלי במרחב $\mathbb{R}_2[t]$ עם המכפלה הפנימית

$$\langle x, y \rangle := \int_0^1 x(t)y(t) dt$$

$$u_3 = \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1), u_2 = \sqrt{3}(2t - 1), u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: נתחיל עם הבסיס הסטנדרטי, $(1, t, t^2)$:

$$x_1(t) = 1$$

$$x_2(t) = t$$

$$x_3(t) = t^2$$

$$v_1(t) = 1$$

$$v_2(t) = x_2(t) - \frac{\langle x_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = t - \frac{\int_0^1 t dt}{\int_0^1 dt} = t - \frac{1}{2}$$

$$v_3(t) = x_3(t) - \frac{\langle x_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle x_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 = t^2 - \frac{\int_0^1 t^2 dt}{1} - \frac{\int_0^1 t^2(t - \frac{1}{2}) dt}{\int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2 dt} \left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$= t^2 - \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \left(t - \frac{1}{2}\right) = t^2 - t + \frac{1}{6}$$

כדי לקבל מערכת אורתונורמלית, צריך לנרמל את הוקטורים v_1, v_2, v_3 :

$$\begin{aligned}\|v_1\|^2 &= \langle v_1, v_1 \rangle = \int_0^1 dt = 2 \\ \|v_2\|^2 &= \langle v_2, v_2 \rangle = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \\ \|v_3\|^2 &= \langle v_3, v_3 \rangle = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^4 + t^2 + \frac{1}{36} - 2t^3 + \frac{t^2}{3} - \frac{t}{3}\right) dt = \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} = \frac{1}{180}\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{v_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ u_2 &= \sqrt{12} v_2 = \sqrt{3}(2t - 1) \\ u_3 &= \sqrt{180} v_3 = \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)\end{aligned}$$

בדיקת אורתונורמליות של המערכת u_1, u_2, u_3 ב"ע התוכנה MAXIMA:

```
define(u1(t),1);
define(u2(t),sqrt(3)*(2*t-1));
define(u3(t),sqrt(5)*(6*t^2-6*t+1));
integrate(u1(t)*u2(t),t,0,1);
integrate(u1(t)*u3(t),t,0,1);
integrate(u2(t)*u3(t),t,0,1);
integrate(u1(t)*u1(t),t,0,1);
integrate(u2(t)*u2(t),t,0,1);
integrate(u3(t)*u3(t),t,0,1);
```

97. יהי $V = C_{[-1,1]}$, המרחב הוקטורי של פונקציות רציפות על הקטע $[-1, 1]$ עם מכפלה פנימית

$$1. \langle x, y \rangle := \int_{-1}^1 x(t)y(t) dt \text{ עבור כל } x, y \in V.$$

מצא בסיס אורתונורמלי בתת־מרחב $U := \text{Span}(1, t + 1, t^2)$.

2. מצא את ההיטל של $x(t) := t^4$.

3. מצא את ההיטל של $x(t) := t^5$.

פרק 13

העתקות גיאומטריות

98. מצא את ההיטל $\text{Pr}_v(x)$ של הוקטור $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ על הוקטור

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. המרחב הוא $\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הרגילה.

תשובה: 0

פתרון: $\langle x, v \rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$, ז"א שהוקטורים x ו- v אורתוגונליים זה לזה. לכן ההיטל הוא אפס:

$$\text{Pr}_v(x) = 0$$

99. מצא את $\text{proj}_v(x)$:

$U = \mathbb{R}^2[t]$ עם המכפלה הפנימית $\langle x, y \rangle := \int_{-1}^1 x(t)y(t) dt$, $x(t) = t^2$, $v(t) = |t|$

פתרון: לפי ההגדרה גיאומטרית של מכפלה פנימית, $\langle x, v \rangle = \text{proj}_v(x) \cdot \|v\|$. לכן $\text{proj}_v(x) = \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|}$. נחשב את מכפלה הפנימית:

$$\langle x, v \rangle = \int_{-1}^1 |t| \cdot t^2 dt = 2 \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{2}$$

$$\langle v, v \rangle = \int_{-1}^1 |t|^2 dt = \langle v, v \rangle = \int_{-1}^1 t^2 dt = 2 \int_0^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$$

לכן $\text{proj}_v(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

100. נתון המרחב הוקטורי $\mathbb{R}_5[t]$ עם מכפלה פנימית $\langle x, y \rangle := \int_{-1}^1 t^2 x(t) y(t) dt$. נסמן $L :=$

$\text{Span}(1, t)$. מצא את המרחק בין הוקטור t^5 לתת־מרחב L .

תשובה: $\|w\| = \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{13}}$

פתרון:

1. המרחק שווה לנורמה של הוקטור

$w := t^5 - P_L(t^5)$ כאשר $P_L(t^5) = \langle t^5, u_1 \rangle u_1 + \langle t^5, u_2 \rangle u_2$ בסיס אורתונורמלי כלשהו של התת־מרחב L .

2. הבסיס הסטנדרטי $(1, t)$ כבר אורתוגונלי:

$$\langle 1, t \rangle = \int_{-1}^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_{-1}^1 = 0.$$

לכן נשאר לנרמל את הוקטורים:

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

$$\langle t, t \rangle = \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{t^5}{5} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{5}$$

מכאן הבסיס האורתונורמלי הוא $u_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad u_2(t) = \sqrt{\frac{5}{2}}$

3. נמצא את הקיבוב הלינארי של t^5 , או, במילים אחרות, את ההיטל של t^5 על התת־מרחב L :

$$\langle t^5, u_1 \rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 t^7 dt = 0$$

$$\langle t^5, u_2 \rangle = \sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^1 t^8 dt = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{t^9}{9} \Big|_{-1}^1 = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2}{9}$$

לכן יכולי למצוא את ההיטל:

$$P_L(t^5) = \langle t^5, u_1 \rangle u_1 + \langle t^5, u_2 \rangle u_2 = 0u_1 + \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2}{9} u_2 = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2}{9} \sqrt{\frac{5}{2}} t = \frac{5}{9} t$$

4. נמצא את הנורמה של $w = t^5 - P_L(t^5) = t^5 - \frac{5t}{9}$:

$$\|w\|^2 = \left\| t^5 - \frac{5t}{9} \right\|^2 = \left\langle t^5 - \frac{5t}{9}, t^5 - \frac{5t}{9} \right\rangle = \int_{-1}^1 t^2 \left(t^5 - \frac{5t}{9} \right)^2 dt =$$

$$= \int_{-1}^1 \left(t^{12} - \frac{10t^8}{9} + \frac{25t^4}{81} \right) dt = \frac{t^{13}}{13} - \frac{10t^9}{81} + \frac{5t^5}{81} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{13} - \frac{20}{81} + \frac{10}{81} = \frac{32}{13 \cdot 81}$$

לכן

$$\|w\| = \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{13}}$$

101. יהי $L := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^4 \xi_i = 0 \right\}$ תת מרחב במרחב וקטורי $\mathbb{R}^5$ עם מכפלה פנימית רגילה.

מצא את ההיטל האורתוגונלי של הוקטור

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ על התת-מרחב } L^\perp.$$

פתרון: אם לפרש את L כי "משור", ברור שוקטור המקדמים $e := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא וקטור נורמלי ל- L , לכן $L^\perp =$

$\text{Span}(e)$, ואז ההיטל של x על $L^\perp$ שווה ל-

$$P_{L^\perp}(x) = \frac{\langle x, e \rangle}{\langle e, e \rangle} e = \frac{1+2+3+2}{1+1+1+1} e = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}.$$

פרק 14

מרחבים הרמיטיים (אוניטריים)

102. נתונים 3 וקטורים $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -i \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$ במרחב הרמיטי $\mathbb{C}^3$ עם

המכפלה הפנימית הסטנדרטית. על ידי תהליך Gram—Schmidt מצא בסיס אורתונורמלי עבור תת־מרחב $\text{Span}(x_1, x_2, x_3)$.

פתרון: נבדוק האם המערכת תלויה לינארית: $\det(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} i & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -i & -1 & -i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} i & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ i & 1 & i \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -i \end{vmatrix} = i(0 \cdot (-i) - 2 \cdot (-1)) = i(2) = 2i \neq 0$

לכן המערכת x_1, x_2, x_3 תלויה לינארית. ברור אבל שהוקטורים x_1, x_2 אינם תלויים לינארית, לכן מהבים בסיס ל־ $\text{Span}(x_1, x_2, x_3) = \text{Span}(x_1, x_2)$.

נשתמש בתהליך Gram—Schmidt כדי לקבל בסיס אורתונורמלי. בהתחלה נבנה בסיס אורתונורמלי (v_1, v_2) :

$$v_1 := x_1$$

$$\langle v_1, v_1 \rangle = \langle x_1, x_1 \rangle = |i|^2 + 1^2 + |-i|^2 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\langle x_2, v_1 \rangle = \langle x_2, x_1 \rangle = 2 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{1} + (-1) \cdot \overline{-i} = -2i - 2 = -3i$$

$$v_2 := x_2 - \frac{\langle x_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = x_2 + i v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-i \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

כדי לנרנל את המערכת שקבלנו, נחשב גם את $\|v_2\|^2$:

$$\langle v_2, v_2 \rangle = |2-i|^2 + |i|^2 = 2^2 + 1^2 + 1 = 6 \quad (\text{נזכור ש- } |\alpha + i\beta|^2 = \alpha^2 + \beta^2).$$

כדי לקבל בסיס אורתונורמלי,

נשאר לנרמל את v_1, v_2 :

$$u_1 := \frac{v_1}{\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$
$$u_2 := \frac{v_2}{\sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2-i \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

103. הוכח שבכל מרחב הרמיטי V מרחב הרמיטי מתקיים

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle + \langle x + y, x + y \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \\ &= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned}$$