

אלגברה לניארות

חלק א'

מרחבים וקאורייס - 122

המצב ההדדי בין ישראלים במרחב - 142

מאריצוג - 204

מאריצוג אלאמאדיוג - 228

צארא'נאוג - 241

מערכת של משוואות ליניאריות

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix} \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 - x_2 = 8 \end{cases} \quad \times 2$$

$$\begin{matrix} R_1 \\ 2R_2 \end{matrix} \begin{matrix} 2x_1 + x_2 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 = 16 \end{matrix}$$

$$3x_2 = -6 \quad | \times \frac{1}{3}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 8 \end{array} \right)$$

המטרה
המורה
של המערכת

קריטריון מערכת משוואות

$$\begin{matrix} R_1 - 2R_2 \\ R_2 \end{matrix}$$

$$\left\{ \begin{matrix} R_1 - 2R_2 \\ R_2 \end{matrix} \right\} \text{ פתרון} = \left\{ \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix} \right\} \text{ פתרון} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x_2 = -6 \\ x_1 - x_2 = 8 \end{cases}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 8 \\ 3x_2 = -6 \end{cases} \quad \times \frac{1}{3}$$

התוצאה:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 8 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\text{קריטריון} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 8 \\ x_2 = -2 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 - x_2 = 8 \end{cases} \text{ מערכת}$$

$$\begin{array}{c}
 R_1 \\
 R_2
 \end{array}
 \begin{array}{cc|c}
 x_1 & x_2 & \\
 \hline
 2 & 1 & 10 \\
 1 & -1 & 8
 \end{array}
 \sim
 \begin{array}{c}
 R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1 \\
 \sim
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 x_1 \quad x_2 \\
 \hline
 0 \quad 3 \quad | \quad -6 \\
 1 \quad -1 \quad | \quad 8
 \end{array}
 \sim$$

Row

המטרה היא להפוך את המטריצה למאונך

$$\begin{array}{c}
 R_1 \\
 R_2
 \end{array}
 \begin{array}{cc|c}
 x_1 & x_2 & \\
 \hline
 1 & -1 & 8 \\
 0 & 3 & -6
 \end{array}
 \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2}
 \begin{array}{c}
 x_1 \quad x_2 \\
 \hline
 1 \quad -1 \quad | \quad 8 \\
 0 \quad 1 \quad | \quad -2
 \end{array}$$

המטרה היא להפוך את המטריצה למאונך

המטרה היא להפוך את המטריצה למאונך

$$\begin{array}{c}
 R_1 = (2 \quad 1 \mid 10) \\
 R_2 = (1 \quad -1 \mid 8)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 R_1 = (2 \quad 1 \mid 10) \\
 2R_2 = (2 \quad -2 \mid 16)
 \end{array}$$

$$R_1 - 2R_2 = (0 \quad 3 \mid -6)$$

$$\begin{cases}
 x_1 - x_2 = 8 \\
 x_2 = -2
 \end{cases}$$

1. המטרה היא להפוך את המטריצה למאונך

2. המטרה היא להפוך את המטריצה למאונך

$$\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \end{array} \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -3 \\ -4x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 2R_1 \\ \end{array} \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = -6 \\ -4x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} +$$

$$R_2 + 2R_1 \quad \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = -6 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

!! נראה שיש כאן תלות

המערכת היא:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & 6 \end{array} \right) \sim$$

המערכת היא: $2x_1 - x_2 = -3$ "משוואה אחת"

$$x_2 = 2x_1 + 3$$

כל ערך של x_1 נותן ערך של x_2 : אינסוף

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \leftarrow x_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -13 \end{pmatrix} \leftarrow x_1 = -8$$

$$R_2 + 2R_1 \rightarrow R_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 = -\frac{3}{2}$$

אינסוף פתרונות

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ -4x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \quad \times 2$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 6 \\ -4x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \quad +$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 6 \\ 0 = 12 \end{cases} \quad \nexists \quad \text{אין פתרון}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

$$R_2 + 2R_1 \rightarrow R_2$$

~

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \end{array} \right)$$

$$0 = 12$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 12 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{כיוון} \\ \text{כיוון} \\ \text{כיוון} \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + kx_2 - 1 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 + kx_3 = 6 \\ 3x_1 + kx_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 - x_3 - 7x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & | & \\ 1 & 0 & -2 & 1 & | & 6 \\ \textcircled{2} & -1 & 1 & -3 & | & 0 \\ \textcircled{9} & -3 & -1 & -7 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & | & 6 \\ 0 & -1 & 5 & -5 & | & -12 \\ \textcircled{9} & -3 & -1 & -7 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & | & 6 \\ 0 & -1 & 5 & -5 & | & -12 \\ 0 & \textcircled{-3} & 17 & -16 & | & -50 \end{pmatrix} \sim \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 & | & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 2 & | & 12 \end{pmatrix}}{(0 \ -1 \ 5 \ -5 \ | \ -12)} \begin{matrix} R_2 \\ 2R_1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & | & 6 \\ 0 & 1 & -5 & 5 & | & 12 \\ 0 & \textcircled{-3} & 17 & -16 & | & -50 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 + 3R_2 \rightarrow R_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & | & 6 \\ 0 & 1 & -5 & 5 & | & 12 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & -1 & | & -14 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{2} R_3 \rightarrow R_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & | & 6 \\ 0 & 1 & -5 & 5 & | & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & | & -7 \end{pmatrix}$$

נימך לבדוק את x_4
 "כערכת חופש"
 לבדוק יש אינסוף פתרונות

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 12 \\ x_3 - \frac{1}{2}x_4 = -7 \end{cases}$$

גרמיה 4
 גרמיה 3

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ \textcircled{6} & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & \textcircled{-3} & -27 & 21 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -7 \\ \textcircled{3} & -1 & 3 & 14 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3}$$

$R_2 - 2R_3 \rightarrow R_2$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 8 & -12 & -4 & -20 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{8}R_3 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -7 \end{array} \right)$$

22/3N 23/3

קיבלנו מטריצה מורחבת של מערכת עקולה:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ x_2 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = -\frac{5}{2} \\ x_3 + 9x_4 = -7 \end{cases}$$

$$x_3 + 9x_4 = -7$$

x_3, x_4 נבחר
כמשתנים "חופשי"

נגז' x_4 כחופשי

$$x_3 = -9x_4 - 7$$

$$x_2 = \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}(-9x_4 - 7) + \frac{1}{2}x_4 - \frac{5}{2} = -\frac{27}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{21}{2} = -13x_4 - \frac{21}{2}$$

בחינו עזרן של x_4 קובעו עינין של x_2

$$x_1 = 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 + 4 = 3\left(-13x_4 - \frac{21}{2}\right) - 5(-9x_4 - 7) - 6x_4 + 4 =$$

$$= (-39 + 45 - 6)x_4 - \frac{63}{2} + 35 + 4 = 8\frac{1}{2}$$

במקרה x_1 הוא קבוע!

מספר המשוואות בצורה מורחבת $4 - 3 = 1$ מספר פרימיטיבים (מספר צרכות חופשי)

עבור אלו ערכים של a למערכת יש פתרון יחיד, אין פתרון, יש אינסוף פתרונות?

$$\begin{cases} x + az = 1 \\ y + z = 2 \\ 2x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

כל ערך a נותן מערכת מסווגת

x, y, z משתנים

המערכת המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 9 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 9-2a & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-2a & -14 \end{array} \right)$$

$R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3$ $R_3 - 8R_2 \rightarrow R_3$

2 מקרים שונים:

1) $1-2a \neq 0$

2) $1-2a = 0$

"אלכסון"

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{1-2a} \end{array} \right)$$

1) $a \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ ניתן לבצע את הפעולה: $\frac{1}{1-2a} R_3 \rightarrow R_3$, נקבל מערכת ה

בצורה המצויה באלכסון
אין אפסים

נסקנה: עבור $a \neq \frac{1}{2}$ למערכת יש פתרון יחיד

(2) $a = \frac{1}{2} \Rightarrow$ המערכת היא מתגור:

פתרון עבור $a = \frac{1}{2}$ למערכת אין פתרון.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array} \right)$$

סגורה לאזו'ג

תשובה: עבור $a \neq \frac{1}{2}$ למערכת יש פתרון יחיד

עבור $a = \frac{1}{2}$ למערכת אין פתרון.

אין ערכי a שעבורם למערכת יש אינסוף פתרונות.

עבור גלוי ערכים של a למערכת יש פתרון יחיד, אין פתרון, יש אינסוף פתרונות?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = m \\ x_1 + 4x_2 + 16x_3 = m^2 \end{cases}$$

המטריצה הנוכחית

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \textcircled{1} & 2 & 6 & m \\ \textcircled{1} & 4 & 16 & m^2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_3 - R_2 \rightarrow R_3 \\ R_2 - R_1 \rightarrow R_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & m-1 \\ 0 & \textcircled{2} & 10 & m^2 - m \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & m-1 \\ 0 & 0 & 0 & (m-1)(m-2) \end{array} \right)$$

משוואה 2
עם 3 נעלמים

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 5x_3 = m-1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & m-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=2 \\ (ik) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נניח, $x_3 = t$ נעלם חופשי :

כל ערך של t קובע פתרון.
יש אינסוף פתרונות

$$x_2 = -5x_3 + m - 1 = -5t + m - 1 \quad \text{ש/כ}$$

$$x_1 = -x_2 - x_3 + 1 = -(-5t + m - 1) - t + 1 = 4t - m + 2$$

למערכת אין פתרון

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & m-1 \\ 0 & 0 & 0 & (m-1)(m-2) \end{array} \right) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq 1, 2 \quad (2^{\circ})$$

ת/א/ה:

עבור	$m = 1$	למערכת יש אינסוף פתרונות.
עבור	$m = 2$	למערכת יש אינסוף פתרונות.
עבור	$m \neq 1, 2$	למערכת אין פתרון.

אין ערכים של m שעבורם למערכת יש פתרון יחיד.

$$\begin{cases} ax_1 + 2x_2 + (a-1)x_3 = 2 \\ ax_1 + (a-1)x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2ax_1 + 2x_2 + (a-1)x_3 = 2 \end{cases}$$

הצגת המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & a-1 & 2 \\ \textcircled{a} & a-1 & 2 & 2 \\ 2a & 2 & a-1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & a-1 & 2 \\ 0 & a-3 & 3-a & 2 \\ \textcircled{2a} & 2 & a-1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{a} & 2 & a-1 & 2 \\ 0 & a-3 & 3-a & 2 \\ 0 & -2 & 1-a & -2 \end{array} \right)$$

$\frac{1}{a} R_1 \rightarrow R_1$

$$a \neq 0 \quad (^\circ 1)$$

$$a = 0 \quad (^\circ 2)$$

יש בסיס יחיד 2 אפשרויות להמשך:

$a \neq 0$ (i)

$$\frac{1}{a} R_1 \rightarrow R_1 \quad \sim \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{a} & \frac{a-1}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & a-3 & 3-a & 2 \\ 0 & -2 & 1-a & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2} R_3 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{a} & \frac{a-1}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & a-3 & 3-a & 2 \\ 0 & 1 & \frac{a-1}{2} & 1 \end{array} \right) \quad \sim \quad R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{a} & \frac{a-1}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & 1 & \frac{a-1}{2} & 1 \\ 0 & a-3 & 3-a & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - (a-3) R_2 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{a} & \frac{a-1}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & 1 & \frac{a-1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(3-a)(a+1)}{2} & -(a+1) \end{array} \right) \sim$$

$R_i + \lambda R_j \rightarrow R_i$
 $\lambda R_i \rightarrow R_i \quad (\lambda \neq 0)$
 $R_i \leftrightarrow R_j$

! $a \neq 3$

$a = -1$ (°a

$a = 3$ (°b

$a \neq -1, 3$ (°c

א"כר חוב"ל י"ך
 $a \neq -1, 3$ ו"כר

י"כר חוב"ל

י"כר חוב"ל

"י"כר חוב"ל"

$R_i \rightarrow R_i$

✓ $a = 0$

✓ $a = -1$

✓ $a = 3$

$a \neq 0, -1, 3$

סיכום: יש 4 מקרים שונים, לפי איך נראה צורת המערכת:

$a = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & | & 2 \\ 0 & -3 & 3 & | & 2 \\ 0 & -2 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & | & 2 \\ 0 & -3 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + \frac{2}{3}R_2 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & \frac{10}{3} \\ 0 & -3 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

כבר רואים שמערכת יש ∞ פתרונות.
נוגד: x_1 יכול לקבל כל ערכים.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & -1 & | & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & | & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & | & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 - x_3 = -\frac{2}{3}$$

$$x_3 = \frac{10}{3}$$

$$x_2 = x_3 - \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$x_1 = t$$

"הפגיון הבלתי נראה"

$$\begin{pmatrix} t \\ \frac{8}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

אנחנו בדיוק ככה.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

רג כיון:

אנסוף פתירות, פרמטר אחד

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

אין פתרון

2 פתרונות במילי 3, מוצר 2

$$3 - 2 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2$$

$$x_2 - x_3 = 1$$

$$x_3 =: t \quad (\text{בחר})$$

$$x_2 = t + 1$$

$$x_1 = 2x_2 - 2x_3 - 2 = 2(t+1) - 2t - 2 = 0$$

$$a = -1$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix}$$

"ה פתרון הכללי"

$$a = 3$$

תשובה: אין פתרון

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{a} & \frac{a-1}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & 1 & \frac{a-1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(3-a)(a+1)}{2} & -(a+1) \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{2}{(3-a)(a+1)} R_3 \rightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{a} & \frac{a-1}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & 1 & \frac{a-1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a-3} \end{array} \right)$$

$$a \neq 0, -1, 3$$

3, 2, 1

3, 2, 1

כל המכנים החיוביים נחלקים במכס

$$\left(\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right)$$

כל מכס

$$x_3 = \frac{2}{a-3}$$

$$x_2 = 1 - \frac{a-1}{2} x_3 = 1 - \frac{a-1}{a-3} = \frac{a-3-a+1}{a-3} = \frac{-2}{a-3}$$

$$x_1 = -\frac{2}{a} x_2 - \frac{a-1}{a} x_3 + \frac{2}{a} = \frac{4}{a(a-3)} - \frac{2(a-1)}{a(a-3)} + \frac{2(a-3)}{a(a-3)} =$$

$$= \frac{4 - 2(a-1) + 2(a-3)}{a(a-3)} = \frac{\cancel{4} - 2a + \cancel{2} + 2a - \cancel{6}}{a(a-3)} = 0$$

3, 2, 1

$$\left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{2}{3-a} \\ \frac{2}{a-3} \end{array} \right)$$

תשובה: עבור $a = 0, -1$ לא מדובר יש אינסוף פתרונות

עבור $a = 3$ לא מדובר אין פתרון

עבור $a \neq 0, -1, 3$ לא מדובר יש פ. יחיד

מערכות של משוואות ליניאריות הומוגניות

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

אפשרות האחרת היא:

Homogeneous systems of
linear equations

Systems of Homogeneous linear
equations

למערכת של משוואות הומוגניות יש תמיד פתרון:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

הוא נקרא הפתרון הטריוויאלי

Trivial solution

לכן למשוואות הומוגניות
יש תמיד 2 אפשרויות:

(1) פתרון יחיד (זהו טריוויאלי)

(2) אינסוף פתרונות.

לפי כלל גוסארד

$$\begin{pmatrix} \boxed{7} & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2 - R_3 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & -9 \\ \boxed{2} & -5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_3 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & -9 \\ 0 & -29 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & -9 \\ 0 & -29 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 12 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -29 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 12 & -9 \\ 0 & -29 & 22 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 - R_2 \rightarrow R_1$$

$$R_1 - R_3 \rightarrow R_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 12 & -9 \\ 0 & \boxed{-29} & 22 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{29} R_2 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 12 & -9 \\ 0 & 1 & -\frac{22}{29} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר 2 הוא מספר שלם

נראה שיש פתרון כללי $3-2=1$

!!! כלל גוסארד

$$\begin{cases} x_3 = 29t \\ x_2 = \frac{22}{29} x_3 = \frac{22}{29} (29t) = 22t \\ x_1 = -12x_2 + 9x_3 = -12 \cdot 22t + 9 \cdot 29t = (9 \cdot 29 - 12 \cdot 22)t = 129t \end{cases} \begin{cases} x_1 + 12x_2 - 9x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{22}{29}x_3 = 0 \end{cases} \quad x_2 = \frac{22}{29}x_3$$

אנחנו נרצה להגיע למצב

$$\begin{cases} 2x + y - z + w = 1 \\ -x + 2y + z + 4w = 0 \end{cases}$$

1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim R_1 + 2R_2 \rightarrow R_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 5 & 1 & 9 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 9 & 1 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} -R_1 \rightarrow R_1 \\ \frac{1}{5} \cdot R_2 \rightarrow R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0.2 & 1.8 & 0.2 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x - 2y - z - 4w = 0 \\ y + \frac{1}{5}z + \frac{9}{5}w = \frac{1}{5} \end{cases}$$

תוצאה: $4 - 2 = 2$

מספר משוואות = 3 < 4 = מספר נעלמים

ניתן לבטל x, y וקבל z, w (במספרים). (פרמטרים)
 יש לנו שתי משוואות ב-2 נעלמים z, w (1)
 "free" z, w

(2) x, y תלויים ב- z, w

נבחר x, y, z, w וקבל s, t

$$y = -\frac{1}{5}z - \frac{9}{5}w + \frac{1}{5} = -s - 9t + \frac{1}{5}$$

$$x = 2y + z + 4w = 2(-s - 9t - \frac{1}{5}) + 5s + 20t =$$

$$= -2s - 18t - \frac{2}{5} + 5s + 20t = 3s + 2t - \frac{2}{5}$$

אנחנו יכולים לכתוב את התוצאה בצורה הבאה:

$$\begin{cases} x = 3s + 2t - \frac{2}{5} \\ y = -s - 9t + \frac{1}{5} \\ z = 5s \\ w = 5t \end{cases}$$

הצורה המצומצמת

של s, t

התוצאה היא:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2/5 \\ 1/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כל $x \in V$ זן $2x = 0$ נן $3x = 0$.

$$\text{הנני} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad \boxed{1}$$

הנני $x_1 = 0$
 $x_2 = 0$

"הינני"

הנני $x_1 = 0$
 $x_2 = 0$

לכן, למשל, הנני $x_1 = 0$ ו- $x_2 = 0$:
 (1) $x_1 = 0$ ו- $x_2 = 0$
 (2) $x_1 = 0$ ו- $x_2 = 0$

למשל, הנני $x_1 = 0$ ו- $x_2 = 0$:
 (1) $x_1 = 0$ ו- $x_2 = 0$
 (2) $x_1 = 0$ ו- $x_2 = 0$

∴ 3, 1, 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

∴ 3, 1, 2

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

2

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & -9 \\ 0 & 4 & -9 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -9 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_3$ $R_1 - 7R_3 \rightarrow R_1$ $R_2 - 5R_3 \rightarrow R_2$ $R_1 - R_2 \rightarrow R_1$

$R_1 \leftrightarrow R_3$ $\frac{1}{4}R_2 \rightarrow R_2$

$3 - 2 = 1$

$$\begin{aligned}
 X_2 &= \frac{9}{4} X_3 \\
 X_1 &= X_2 - 2X_3 = \\
 &= \frac{9}{4} X_3 - 2X_3 = \frac{1}{4} X_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + 2X_3 = 0 \\ X_2 - \frac{9}{4} X_3 = 0 \end{cases}$$

אשר אבחנו בכמה (ים) בל' מס' הערות:
 זרבים.

תוצאה:

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 9t \\ x_3 = 4t \end{cases}$$

"משוואות"
 "משוואות"

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

זרבים משוואות:

משוואות כוללות t

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} t$$

10% בגבולות

$$2 \rightarrow 12N \quad (\text{non-zero}) \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = a$$

non-zero

$$\text{non-zero} \quad \text{and} \quad \text{non-zero} \quad \text{and} \quad \text{non-zero}$$

$$b := \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$a + b := \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{non-zero}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$

$$a + b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1

$$b - a = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$a - b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

λ scalar

λ scalar

$$\lambda a := \begin{pmatrix} \lambda \alpha_1 \\ \lambda \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$(-3)a = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2

המשפט של קרן $b := \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, $a := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ נקרא קוורנט

המשפט של קרן A, B, C, D

$$\begin{cases} Ax_1 + Bx_2 = 0 \\ Cx_1 + Dx_2 = 0 \end{cases}$$

המשפט של קרן $a + b$ (1) '5K

המשפט של קרן λa (2)

$$\begin{cases} A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0 \\ C\alpha_1 + D\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x_1 \leftarrow \alpha_1 \\ x_2 \leftarrow \alpha_2 \end{matrix}}$$

$$\Leftrightarrow \text{free} \quad a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \frac{\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots}{\textcircled{1}}$$

$$\begin{cases} A\beta_1 + B\beta_2 = 0 \\ C\beta_1 + D\beta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x_1 \leftarrow \beta_1 \\ x_2 \leftarrow \beta_2 \end{matrix}}$$

$$\Leftrightarrow \text{free} \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} A=2 & B=-1 \\ C=-4 & D=2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{free} \quad \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{l}
 x_1 \leftarrow \alpha_1 + \beta_1 \\
 x_2 \leftarrow \alpha_2 + \beta_2
 \end{array}
 \quad : \text{||} > 0 \quad
 \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \end{pmatrix} : \text{||} 3$$

$$\begin{aligned}
 A(\alpha_1 + \beta_1) + B(\alpha_2 + \beta_2) &= A\alpha_1 + A\beta_1 + B\alpha_2 + B\beta_2 = \\
 &= \underbrace{(A\alpha_1 + B\alpha_2)}_{=0} + \underbrace{(A\beta_1 + B\beta_2)}_{=0} = \\
 &= 0 + 0 = 0
 \end{aligned}$$

$$C(\alpha_1 + \beta_1) + D(\alpha_2 + \beta_2) = 0 \quad : \text{||} 0 \text{ k} \quad 1 \sim 1/2$$

$$z = 5s$$

! 3s' 7Cm2

$$w = 5t$$

$$y = -\frac{1}{5}z - \frac{9}{5}w = -s - 9t$$

$$x = 2y + z + 4w = -2s - 18t + 5s + 20t = 3s + 2t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s + 2t \\ -s - 9t \\ 5s \\ 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s + 2t \\ -s - 9t \\ 5s + 0t \\ 0s + 5t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3s \\ -1 \\ 5s \\ 0s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ -9t \\ 0t \\ 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} t$$

$| \Rightarrow \exists s, t \in \mathbb{R}$
 such that

$$\Leftrightarrow a := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$s, t \in \mathbb{R} \text{ such that } \begin{cases} x = 3s + 2t \\ y = -s - 9t \\ z = 5s \\ w = 5t \end{cases}$$

$\therefore \exists \mathbb{R}$

$s a + t b$

a, b are spanning vectors in $\mathbb{R}^4$:

ל"ו בחשון תשפ"א

כ"ו

מערכת כו"א $\sqrt{A}$ הומוגן

המטריצה המורחבת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

1

$$R_3 - R_2 \rightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim$$

$$R_3 - R_1 \rightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1$$

$$0 = 1 \quad \text{סתירה}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

0 0 0 | *

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \text{בסיס}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \boxed{2}$$

מערכת 2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

מערכת 3
מערכת 2

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

1
3-2=1

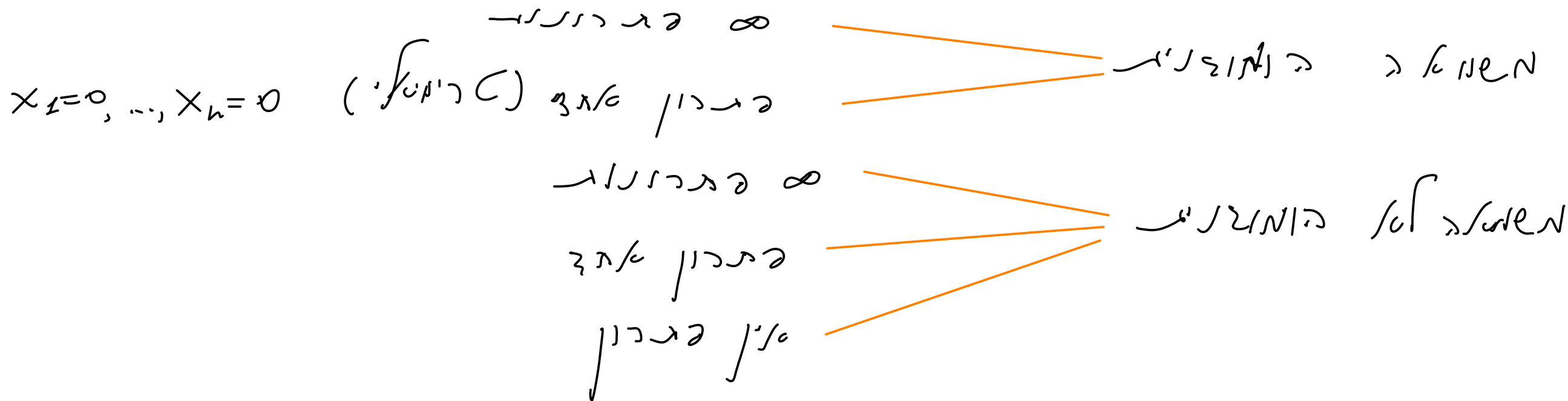
$(x_1 \text{ חופשי}, x_2 \text{ חופשי}, x_3 \text{ חופשי})$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases}$$

תוצאה:
כדי שיהיה t חופשי

מקרה כללי: m משוואות
 n נעלמים

2 אפשרויות: משוואה הנמוגה
משוואה לא הנמוגה



משפט דומנטי:

$$(1) \quad m < n \Leftrightarrow \infty \text{ פתונוג}$$

$$(2) \quad m \geq n \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (a) \quad m' = n \Leftrightarrow \text{הן פ. ריוואלי} \\ (b) \quad m' < n \Leftrightarrow \infty \text{ פתונוג} \end{array} \right\}$$

m משפאל

n נעלמיס

m' משפאל בצורה מזדג

משפט לא דומנטי:

$$(1) \quad m < n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \infty \text{ פתונוג} \\ \text{פ. ריוואלי} \end{array} \right]$$

$$(2) \quad m \geq n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{פ. ריוואלי} \\ \infty \text{ פתונוג} \end{array} \right]$$

תכלי בצורה מזדג

תכלי בצורה מזדג

3

$$\begin{cases} x + az = 1 \\ y + z = 2 \\ 2x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

אפשר להחליט, אבל בפרט a

עבור כל a לא ייתכן

(1) ∞ ערכים

(2) ערכים אחדים ?

(3) ∞ ערכים

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 9-2a & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 8R_2 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & ? & -18 \end{array} \right)$$

המשפט של קרן

המשפט של קרן $\Leftrightarrow 1-2a \neq 0$ (1)
 $a \neq \frac{1}{2}$
 $3-3=0$
 3 משוואות ב-3 נקודות

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-2a & -18 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{1-2a} R_3 \rightarrow R_3} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{18}{2a-1} \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 + ax_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = \frac{18}{2a-1} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

אין פתרון

$$\Leftrightarrow \frac{1-2a=0}{a=\frac{1}{2}}$$

אם $a = \frac{1}{2}$ לא קיימת פתרון
 אם $a \neq \frac{1}{2}$ קיימת פתרון

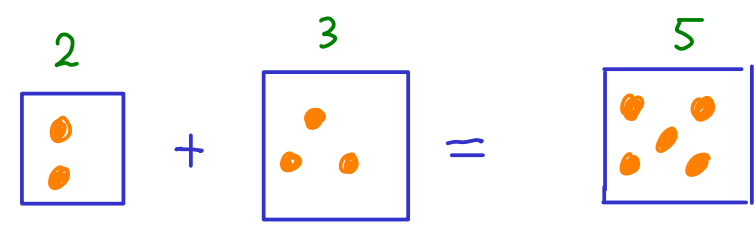
row 2 $\leftarrow$ row 2 - row 1

$$\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x + y + z + w = 2 \end{cases}$$

4

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

2. חשבון ויכוחים



חבורת $\mathbb{Z}$: $2 + 3 = 5$

$\mathbb{Z} : 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$2 + (-3) = -1$

$2 - 3 = -1$

$m + n = n + m$

$(m + n) + k = m + (n + k)$

$n = 0 = n$

$3 + (-3) = 0$

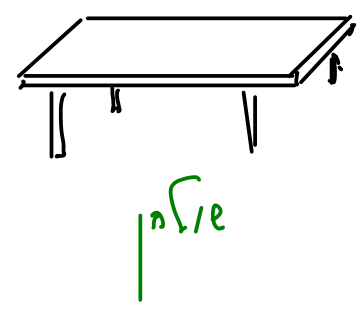
צריך להגדיר "מספר שלילי"

$n + 0 = n$: 0 "מספר"

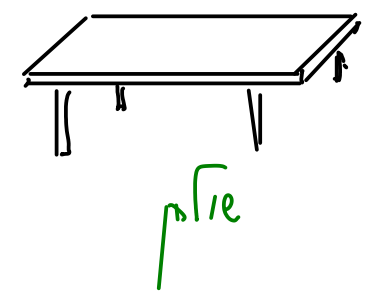
a, b

X קבוצת שלמות

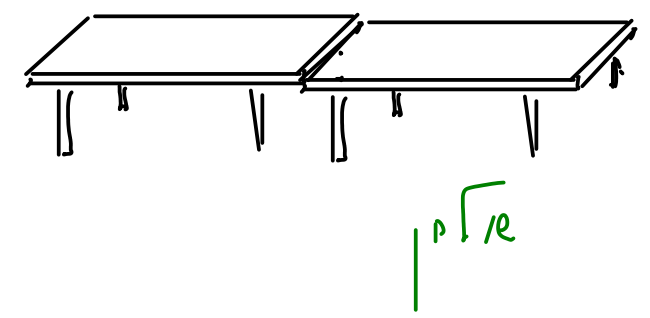
$\forall n \exists m : m + n = 0$
↑
קיים



++



=



נימך להגדיר בעזרת "חבור" X -ה

Y קבוצת שלם בקבוצת שלם
לא בקבוצת שלם

$$v = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

קבוצה של סמוכות 2 :

ניגן להצטרף "סגור" $\rightarrow u+v$ ² ^{סמוכות} ^{מכונה} ²

$$u+v = \begin{pmatrix} 1+(-3) \\ 2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

"סגור"

$$u = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

"סגור" ^{סמוכות}

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad -u = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$u+0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = u$$

$$u = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} - v \quad \text{"ניגן" להצטרף}$$

$$-u = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \end{pmatrix}$$

~~$$u \cdot v = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 16 \end{pmatrix}$$~~

~~$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$~~

~~$$x \neq 0$$~~

~~$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$~~

~~$$y \neq 0$$~~

~~$$x \cdot y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$~~

$$u+v = v+u$$

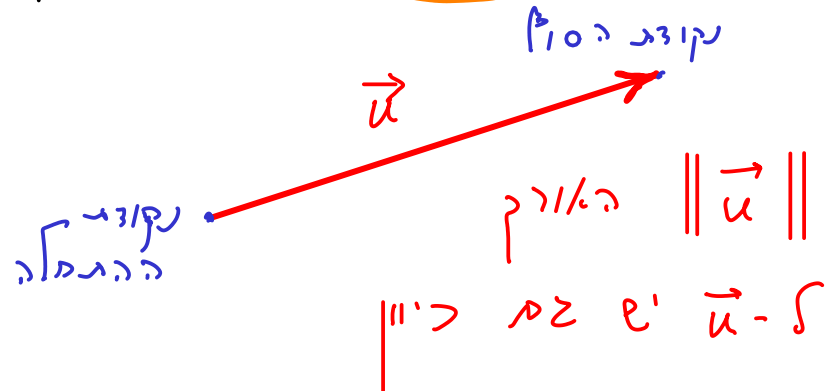
$$(u+v)+w = u+(v+w)$$

$$\exists 0 : u+0 = u$$

$$\forall u \exists v : u+v = 0$$

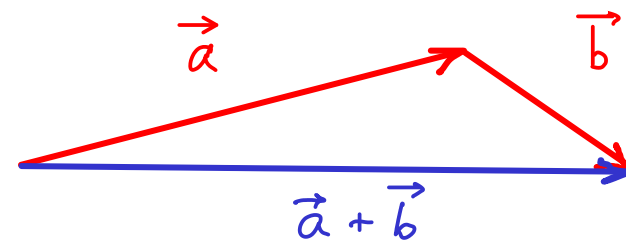
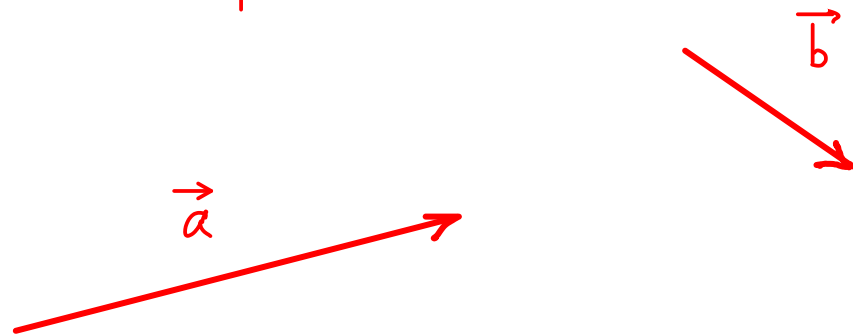
$$| \vec{a} | + | \vec{b} | = | \vec{a} + \vec{b} |$$

$$| \vec{a} | = \text{וקטור}$$

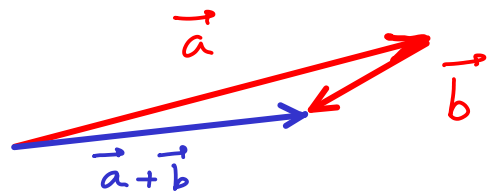
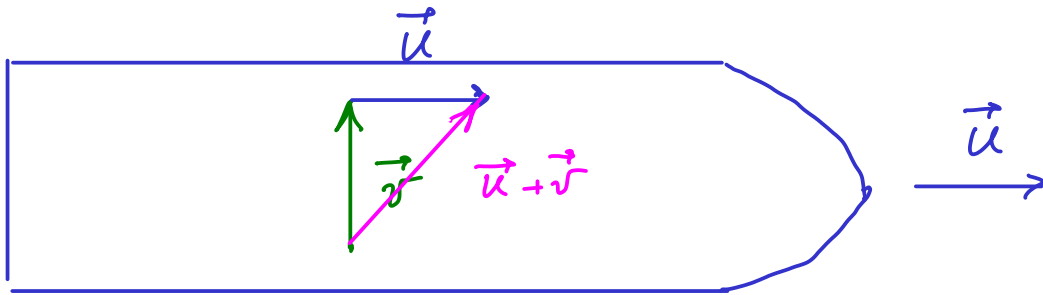


ערכים מכוונים	ערכים שאינם מכוונים
מחיבור	למכארה (חום)
תאורה	מסה
כוח	

הסכום של 2 וקטורים חיפשיים:



כלל המשולש



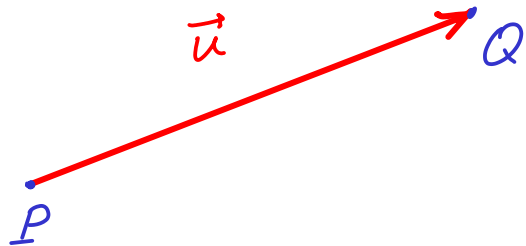
3

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (1)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (2)$$

$$\exists \vec{0} : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad (2)$$

$$\forall \vec{a} \exists \vec{b} : \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \quad (3)$$

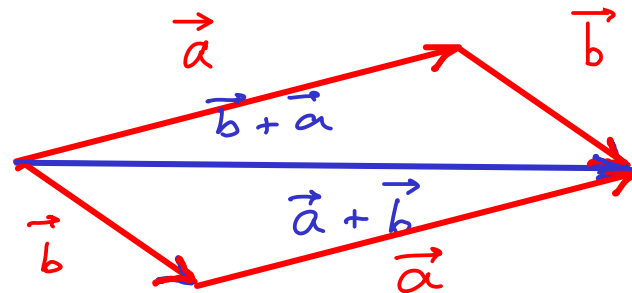


הוקטור $\vec{u}$ מתחיל ב- P

ונוגה ל- Q

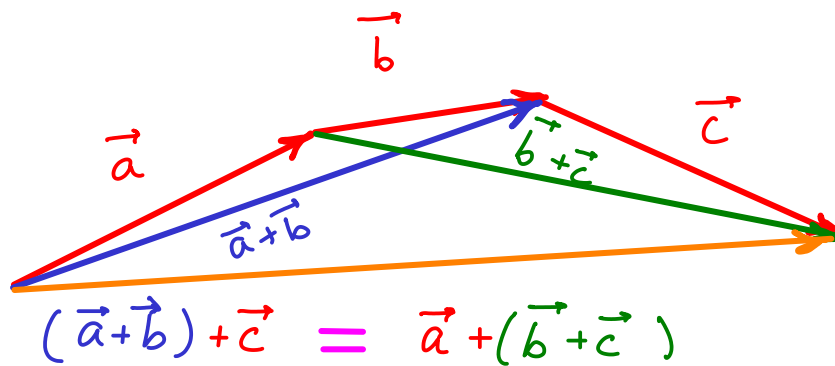
$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$$

אנחנו



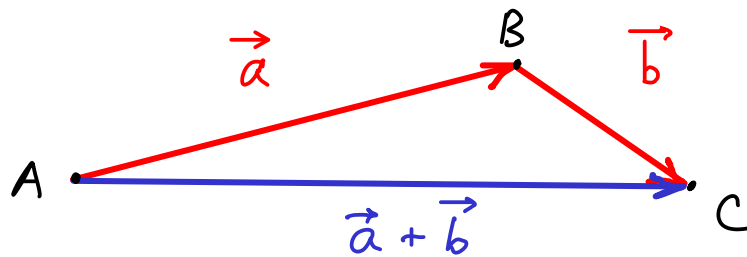
(*)

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$



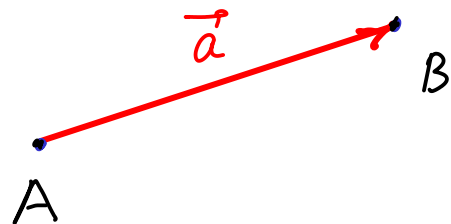
(*)

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$



אנחנו יכולים לכתוב את זה בצורה הבאה:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



$$\vec{0} := \overrightarrow{AA}$$

"הקטור" "הזה הוא" נקרא

2

קטור מסלול הקטור אפס

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} \quad \text{נקרא}$$

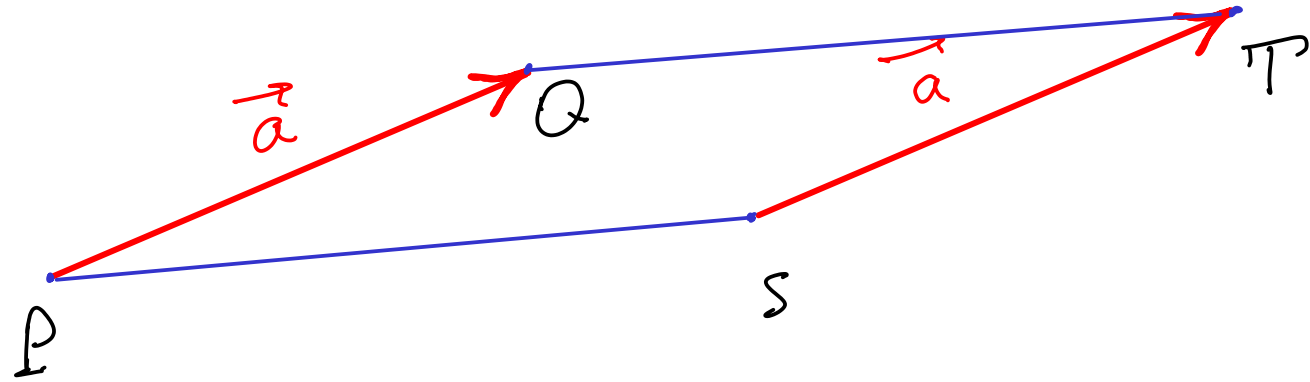
$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{0} \quad \text{הוא זהה ל-} \overrightarrow{BA} \quad \text{הקטור}$$

$$\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$$

3

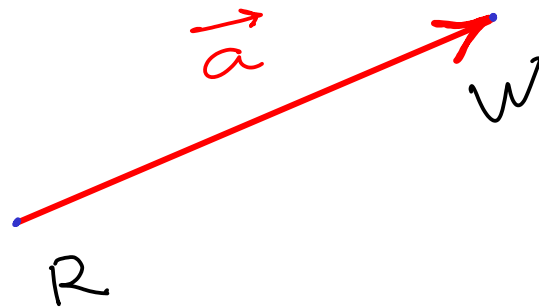
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$$

$\vec{a} + \vec{b} = 0$: $\vec{b}$ קטור מסלול $\vec{a}$



כלל: מקבילים הם כיוון תופסים:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{RW}$$



וקטור = תל = קלף ישר מכון = שוה קו

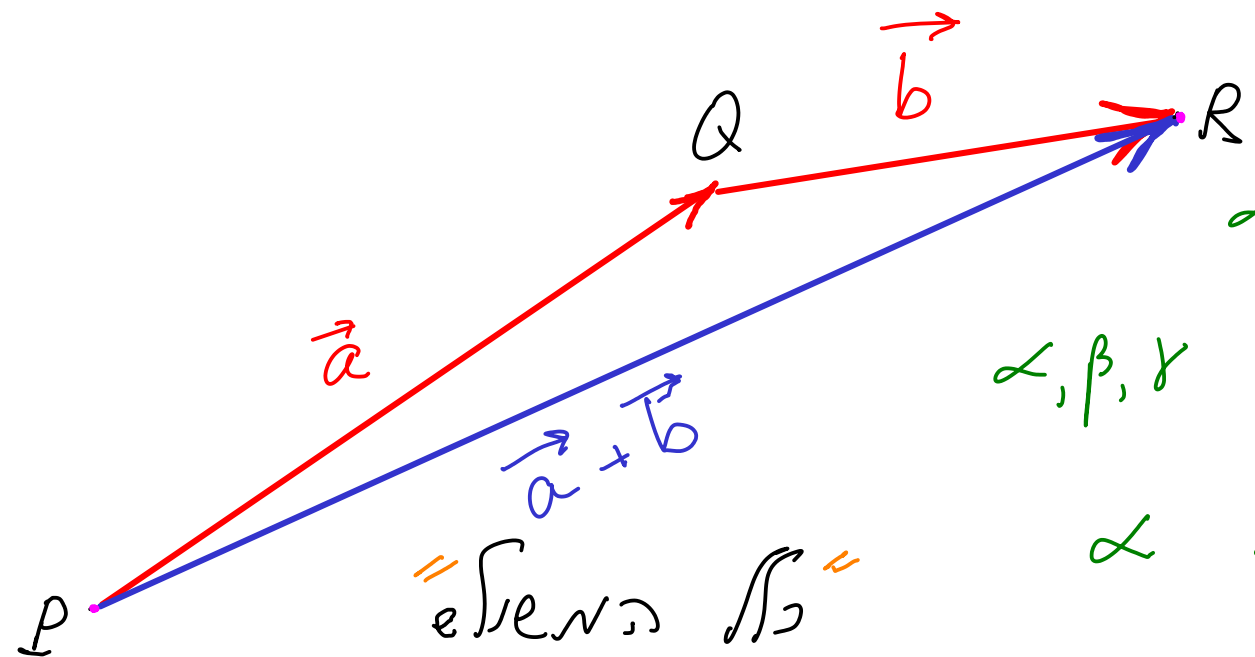
לוקטור יש מורק וכיוון

① וקטור = שוה מכון הם כיוון
② $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{ST}$ מכון ש $PQTS$ מקבילים.

ח'ג'ר וקט'ר

$\vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{u}, \vec{x}$ וקט'ר
 $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu, \dots$ סקלרים
 s, t וקט'ר

$\vec{a} + \vec{b} \leftarrow \vec{a}, \vec{b}$ סה"כ
 נק"מ בכוון $\vec{a}$ ובעזרת מסביר



$\angle, \beta$ כ"פ

$\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(1)

α, β, γ כ"פ

$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

(2)

α כ"פ

$\alpha + 0 = \alpha$: 0 סביר

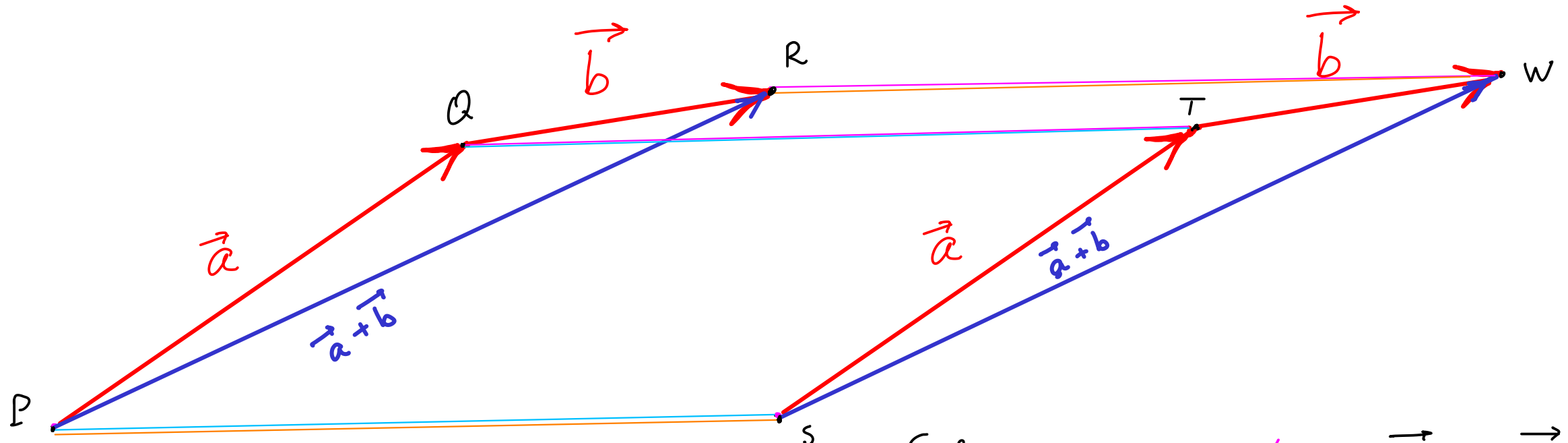
(3)

סגור סכום

$\vec{PQ} + \vec{QR} =: \vec{PR} \quad ||$

$\alpha + \beta = 0$: β קיים α כ"פ (4)

הסכום $\vec{a} + \vec{b}$ הוא הווקטור החל מ- P ונגמר ב- R



$$\vec{PQ} = \vec{ST}$$

$$\Leftrightarrow \text{משולש } PQR \cong \text{משולש } STW$$

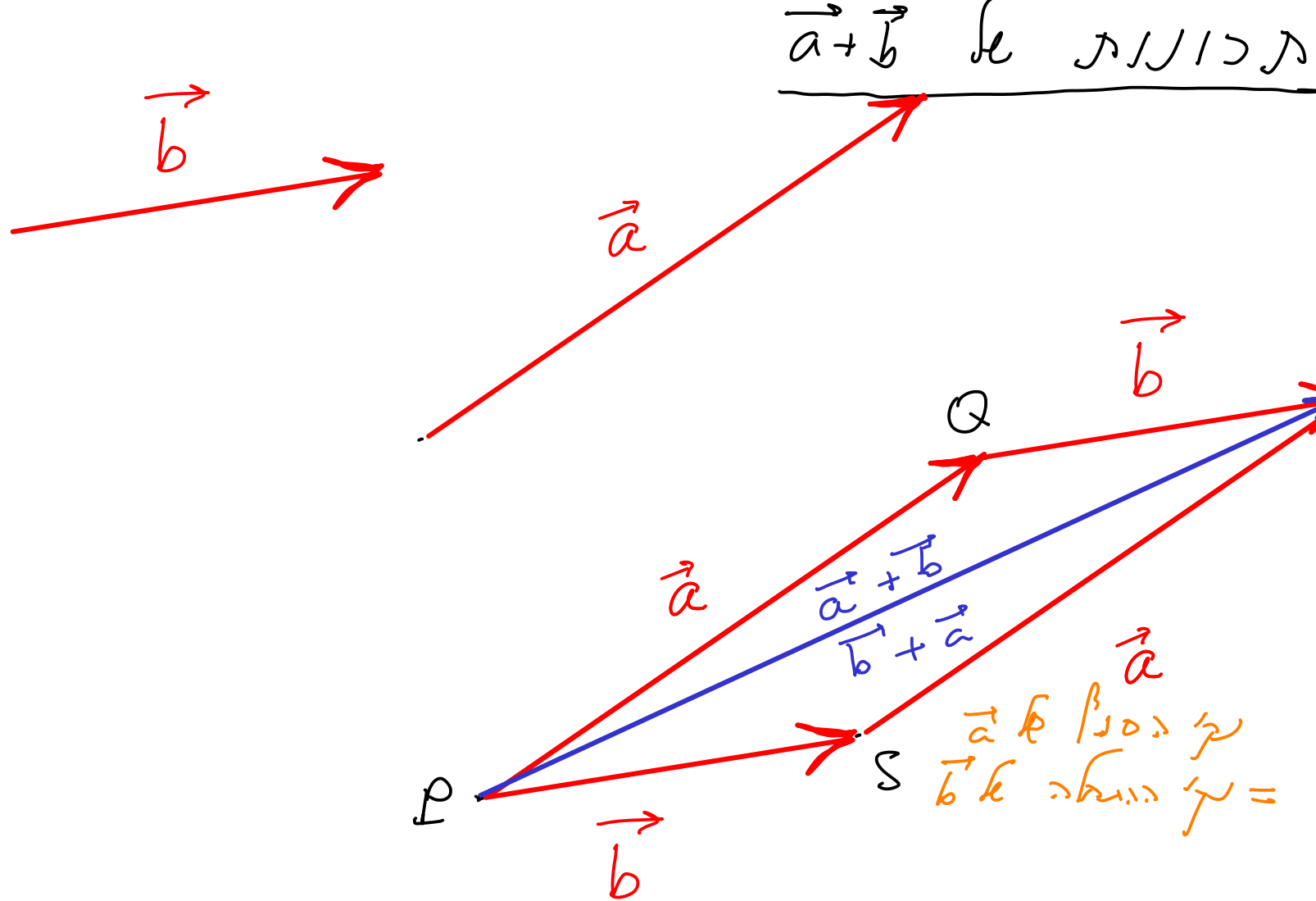
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{משולש } PQR \\ \text{משולש } STW \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{PQ} = \vec{ST} \\ \vec{QR} = \vec{TW} \end{cases}$$

$$12 + 37 + 8 = 12 + 8 + 37 = (12 + 8) + 37 = 20 + 37 = 57$$

$$37 + 8 = 8 + 37$$

$$(12 + 8) + 37 = 12 + (8 + 37)$$



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \underline{\underline{\text{כיוון}}}$$

$$\vec{PQ} = \vec{SR} = \vec{a} \quad \underline{\text{כיוון}}$$

$$\vec{PS} = \vec{QR} = \vec{b}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR} \quad \text{'s/c'}$$

$$\vec{a} + \vec{b} \quad \underline{\text{כיוון}}$$

$$\vec{a} \text{ הכיוון} = \vec{b} \text{ הכיוון}$$

$$\vec{b} + \vec{a} = \vec{PS} + \vec{SR} = \vec{PR}$$

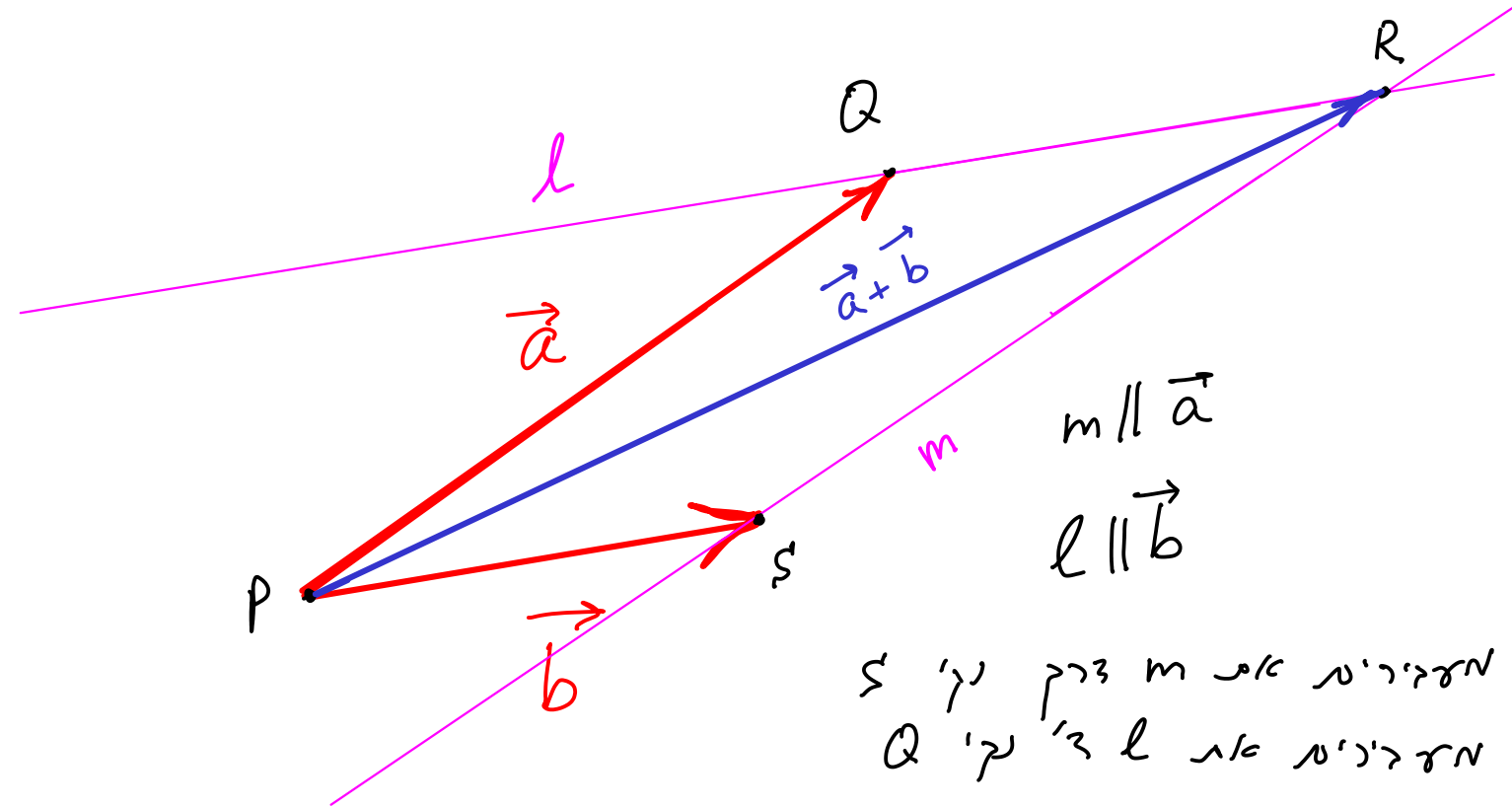
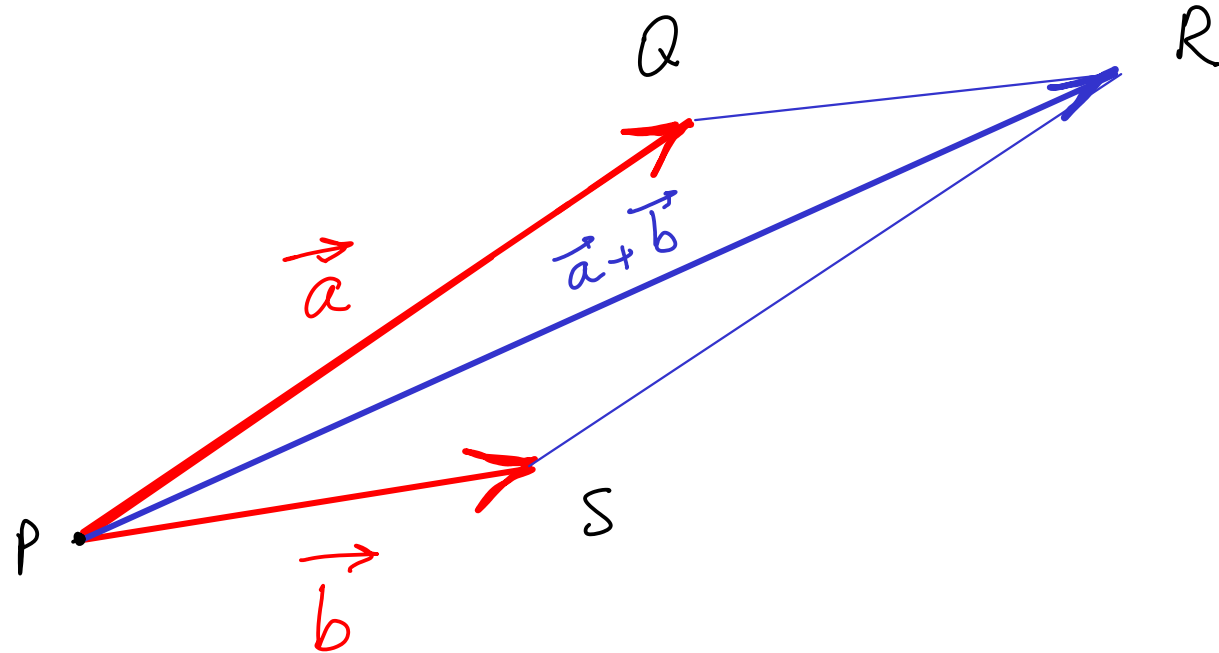
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{כיוון, } \vec{PR} = \vec{PR}$$

See

ההוכחה מראה לנו של תלופי למיבור הנקראים:

* כל המשולש: משולשים $\triangle PQR$ המשולש.

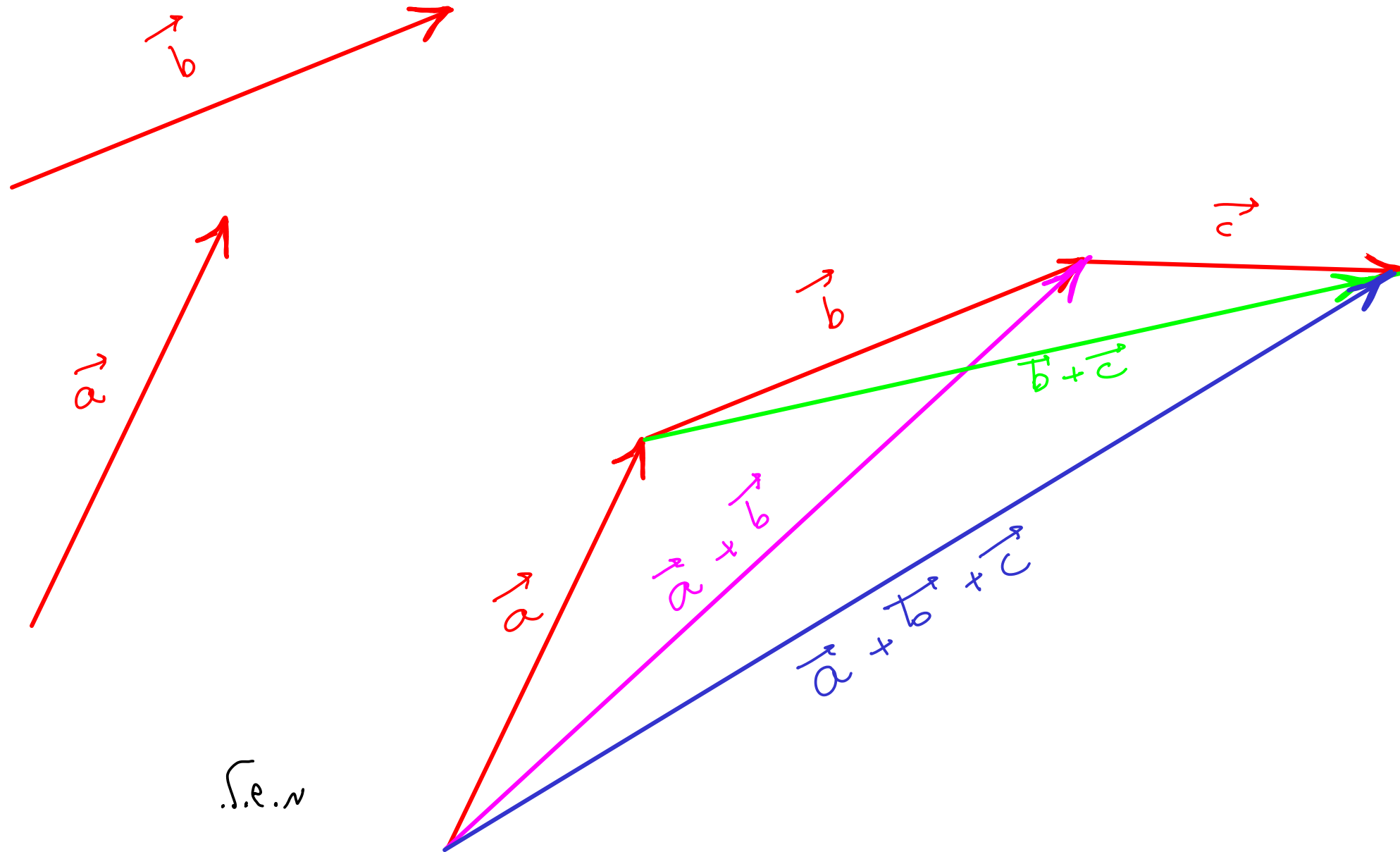
* כל המקבילים: משולשים $PQRS$ המקבילים.



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{PR}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad \text{סדרה} \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ סדרה} \quad \underline{\underline{\text{Coen}}}$$

הוכחה:



f.e.n

משפט תמיד נקלוג $\vec{0}$.

הוכחה: נגדיר $\vec{0} = \overrightarrow{QQ}$

(נקלוג).

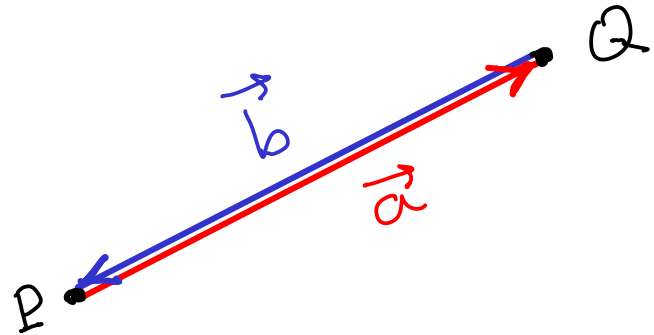
$$\overrightarrow{RR} = \vec{0} \quad \text{נז}$$

אם נלך נקלוג אחר

$$\vec{a} + \vec{0} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ} = \overrightarrow{PQ} = \vec{a} \quad \text{נז} \quad \vec{a} = \overrightarrow{PQ}$$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad \text{בקבוצה}$$

ד.ל.נ



$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

כפי שרואים

ד.ל.נ

הנקלוג $\vec{0}$ הוא נקלוג יחיד שמקבל לכל נקלוג אחר.

משפט לכל נקלוג $\vec{a}$ קיים נקלוג $\vec{b}$: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$

הוכחה: נגדיר $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$, $\vec{b} := \overrightarrow{QP}$ נקלוג

$\vec{b}$ נקלוג הנקלוג $\vec{a}$ -ל

כדור שגם $\vec{a}$ נגדיר $\vec{b}$

כפל וקטורי בסקלר

$$\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a} \quad \text{מסתבר ש } \vec{a} \text{ הת'בון}$$

1

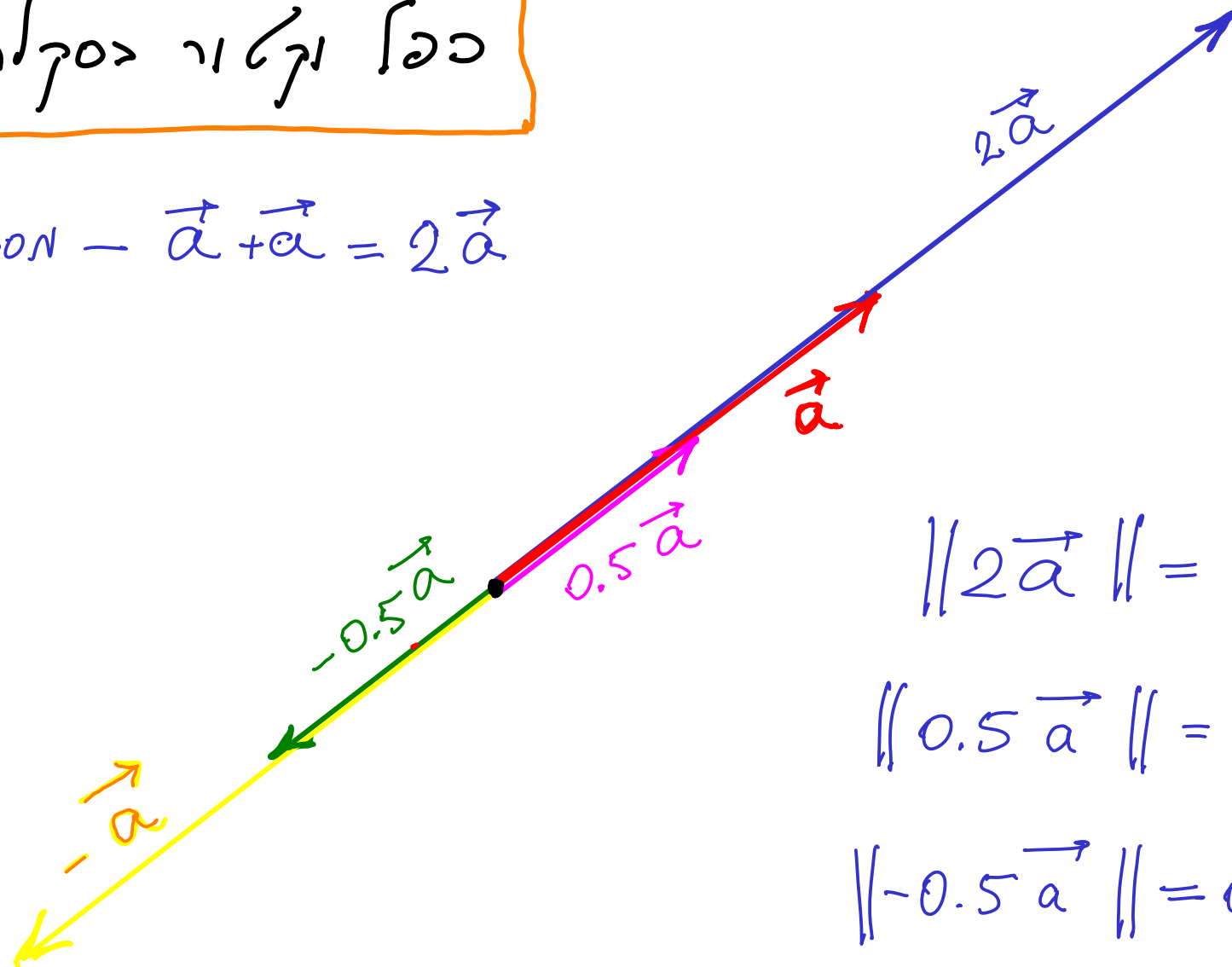
הקט'ב

$$\lambda = 2 > 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2} > 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} < 0$$

$$\lambda = -1 < 0$$



$$\|2\vec{a}\| = 2 \cdot \|\vec{a}\|$$

$$\|0.5\vec{a}\| = 0.5\|\vec{a}\|$$

$$\| -0.5\vec{a} \| = 0.5 \cdot \|\vec{a}\|$$

אם $\lambda = 0$

|| נסמן ב- $\|\vec{a}\|$ - האורך של $\vec{a}$

כסא וקטור בסקלר

נמון: וקטור $\vec{a}$
נמון: סקלר λ

שזר וקטור חדש $\lambda \vec{a}$ "ז"

! נמ' 3 $\|\vec{a}\| \geq 0$

$\|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$ (K)

הכיוון של $\lambda \vec{a}$ = הכיוון של $\vec{a}$ כש $\lambda > 0$ (ב)

הפוך כיוון של $\vec{a}$ שבו $\lambda < 0$

ה"מ כו'ים:

$(\alpha + \beta) \gamma = \alpha \gamma + \beta \gamma$ (ד)

$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ (1)

$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ (5)

$(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$

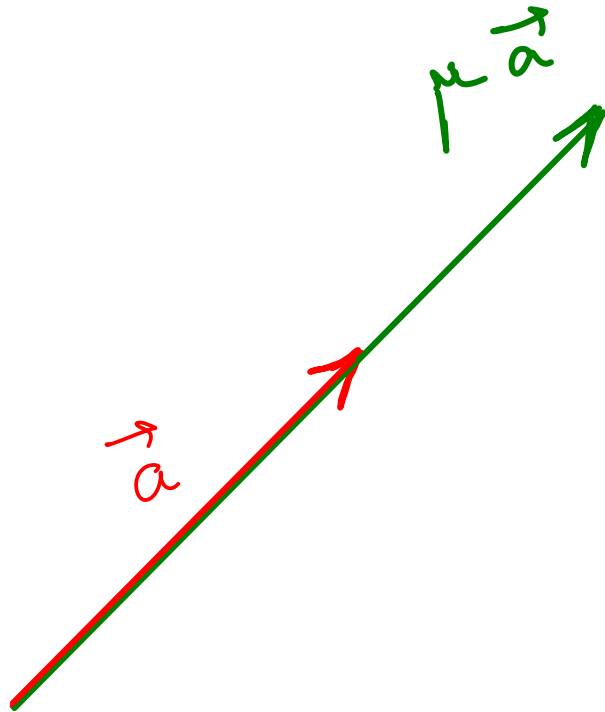
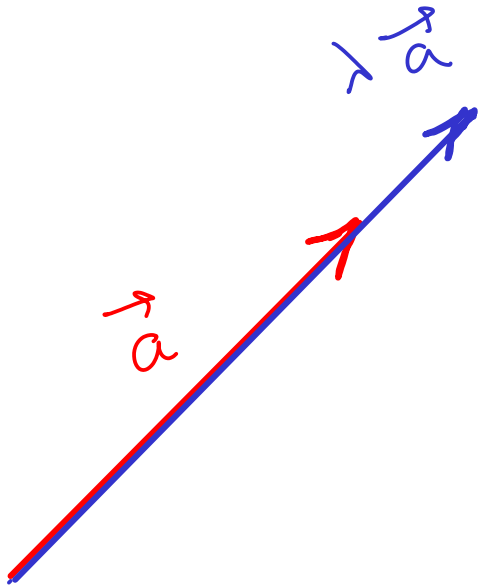
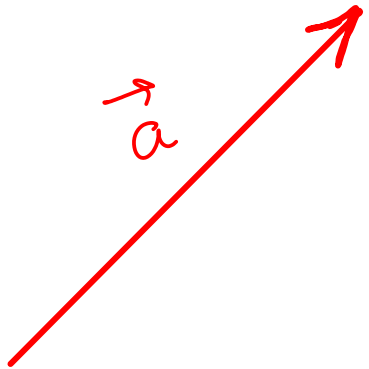
$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$

$(\lambda\mu) \vec{a} = \lambda(\mu \vec{a})$

למשל עבור $\vec{a}$ וקטור $\vec{a}$ וסדר λ, μ סקלרים

$$(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a} \quad \text{חוק השלישי}$$

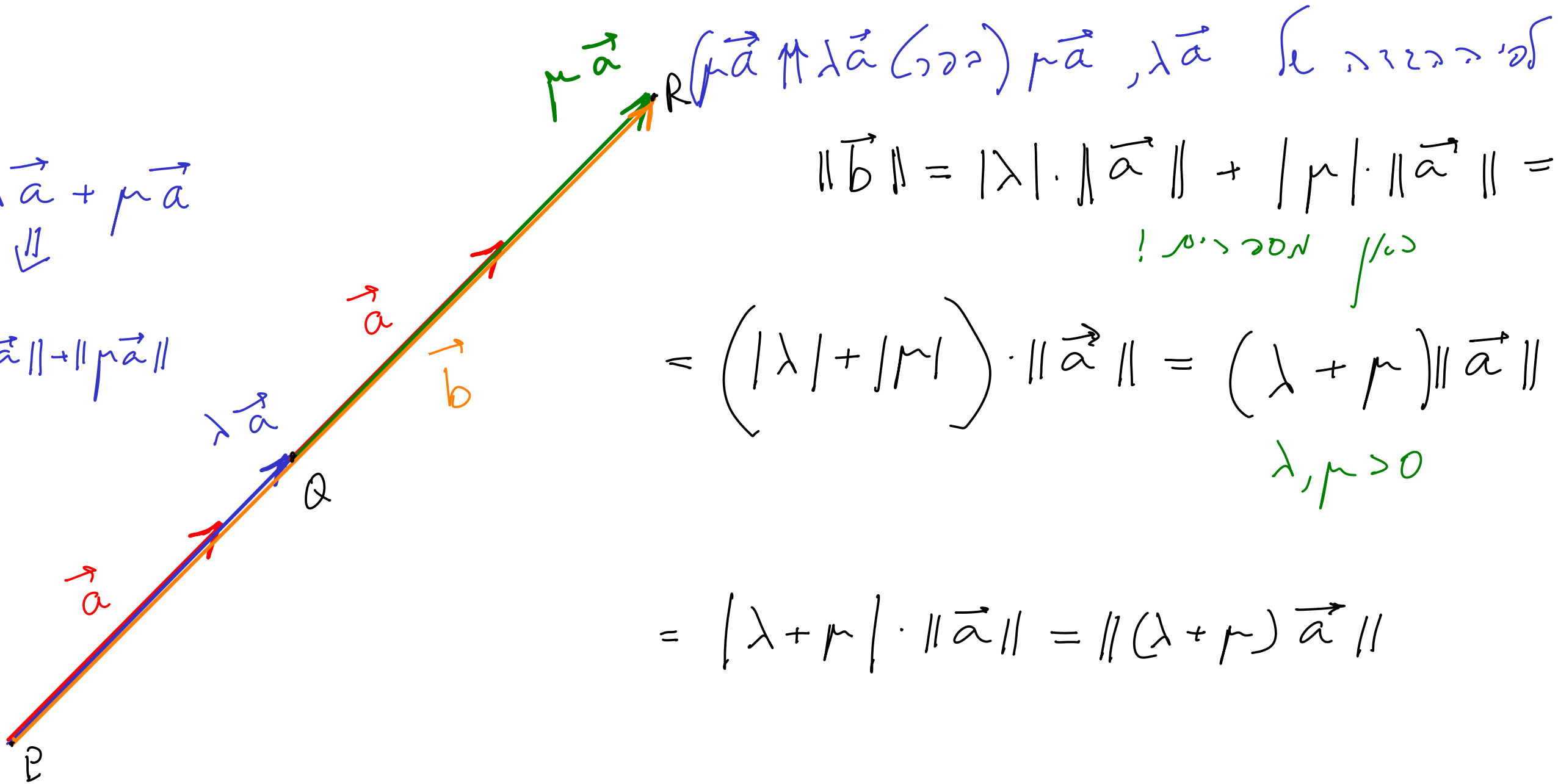
הוכחה במקרה 1) $\lambda, \mu > 1$



$$\vec{b} := \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$$

$\Downarrow$

$$\|\vec{b}\| = \|\lambda \vec{a}\| + \|\mu \vec{a}\|$$



$$R(\mu \vec{a} \uparrow \lambda \vec{a} \text{ (opp) } \mu \vec{a}, \lambda \vec{a} \text{ in same direction})$$

$$\|\vec{b}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\| + |\mu| \cdot \|\vec{a}\| =$$

! same direction

$$= (|\lambda| + |\mu|) \cdot \|\vec{a}\| = (\lambda + \mu) \|\vec{a}\| =$$

$\lambda, \mu > 0$

$$= |\lambda + \mu| \cdot \|\vec{a}\| = \|(\lambda + \mu) \vec{a}\|$$

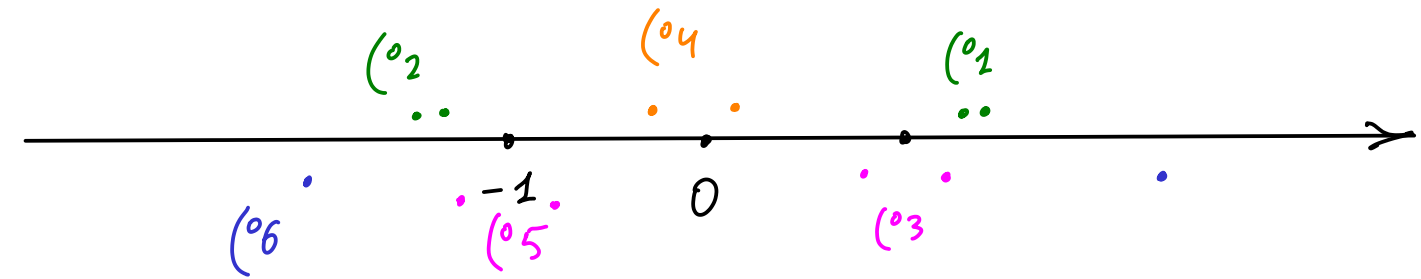
$\vec{b} = (\lambda + \mu) \vec{a}$ כיוון, $\lambda > 0$
 $\vec{b} = \vec{PR} = \vec{PQ} + \vec{QR} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$, $\mu > 0$

חסקע:

$$(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$$

$\lambda > 1, \mu > 1$ המקרה $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$

תרגיל: לכתוב את הגרסה $\lambda > 1, -1 < \mu < 0$

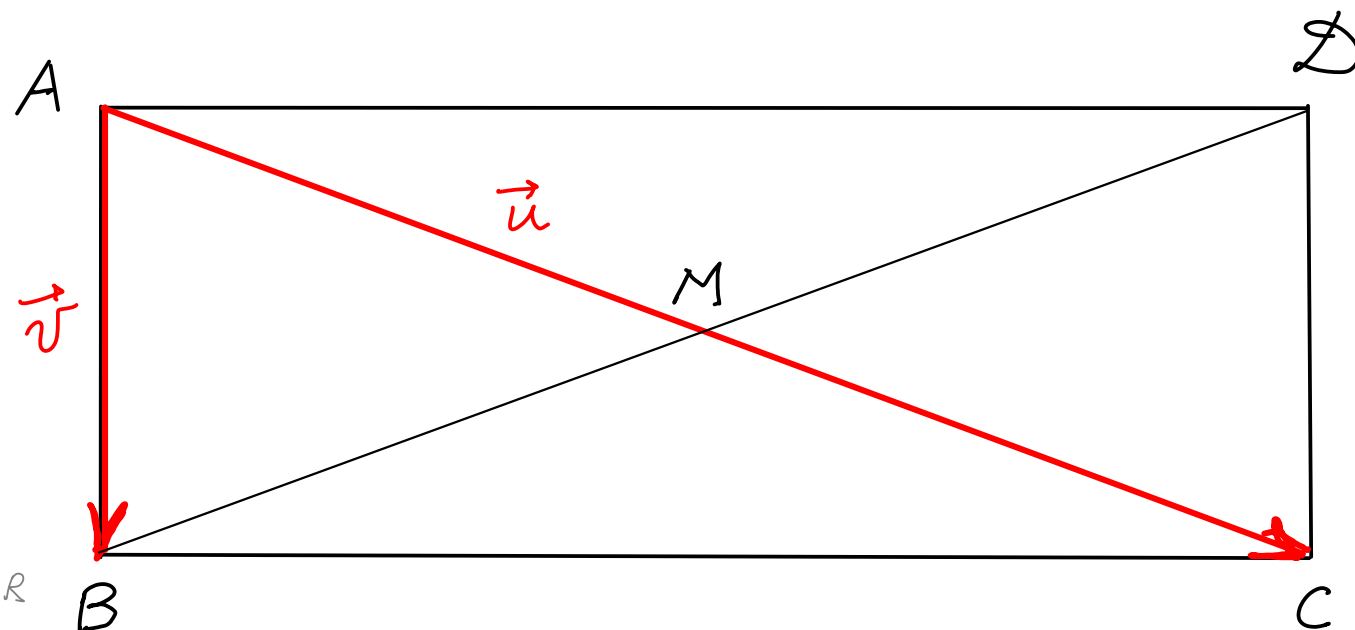


16/2/13

$$\overrightarrow{AC} = \vec{u}, \quad \overrightarrow{AB} = \vec{v} \quad \text{for}$$

ABCD

for the
parallelogram



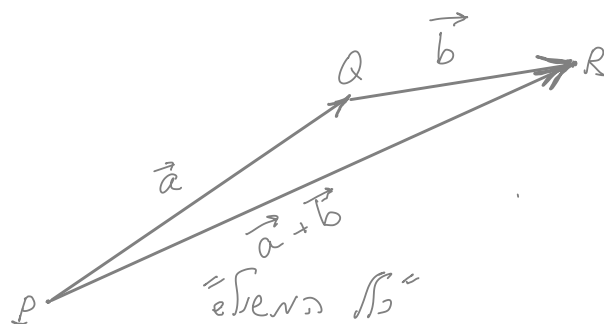
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \vec{u} - \vec{v}$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{v}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \vec{u}$$

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \vec{u}$$

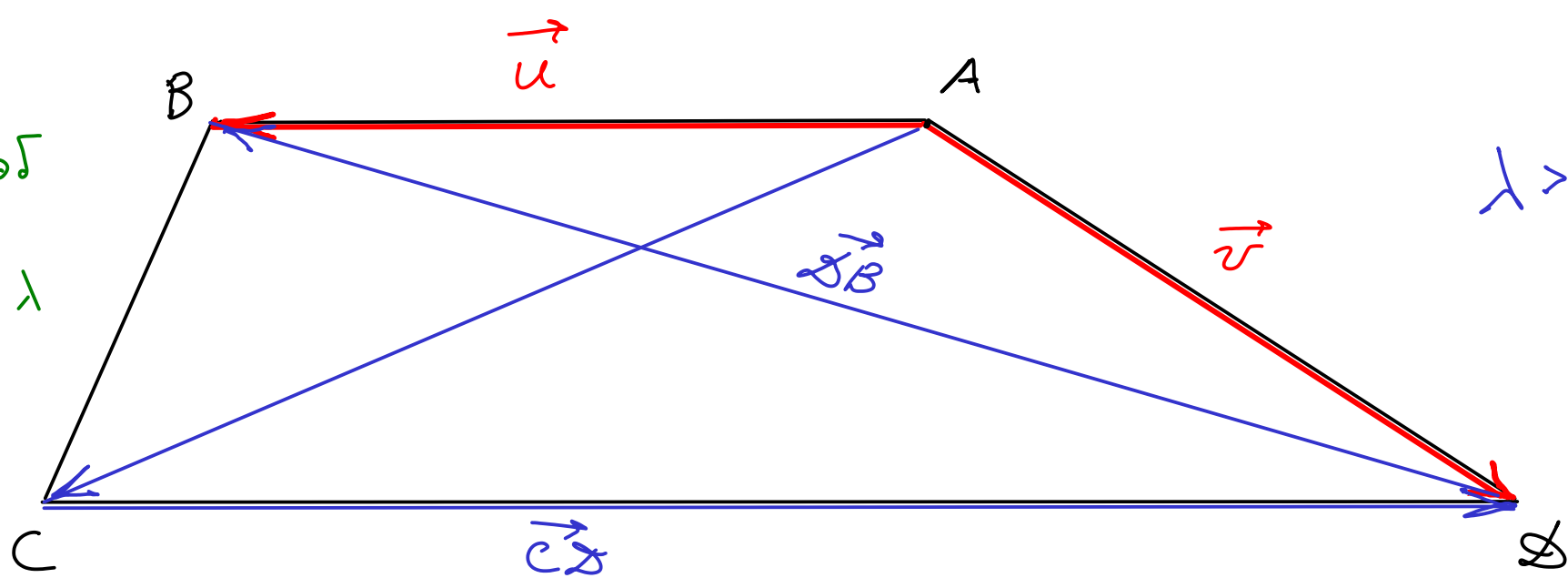
$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{v}$$



$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

יחסים

$$\frac{AB}{AC} = \lambda$$



$\lambda > 0$ כלומר

$$\vec{AB} = \lambda \vec{AC}$$

יחס

$$\vec{AB} =: \vec{u}$$

$$\vec{AD} =: \vec{v}$$

$$\vec{AC} = \frac{1}{\lambda} \vec{AB}$$

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DC} = -\vec{AB} + \vec{AD} + \frac{1}{\lambda} \vec{AB} = -\vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{\lambda} \vec{u} = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{u} + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \vec{u} + \vec{v} = \frac{1}{\lambda} \vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{AC} = \frac{1}{\lambda} \vec{u}$$

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AB} = -\vec{AD} + \vec{AB} = -\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} - \vec{v}$$

$$\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{v} + \frac{1}{\lambda} \vec{u}$$

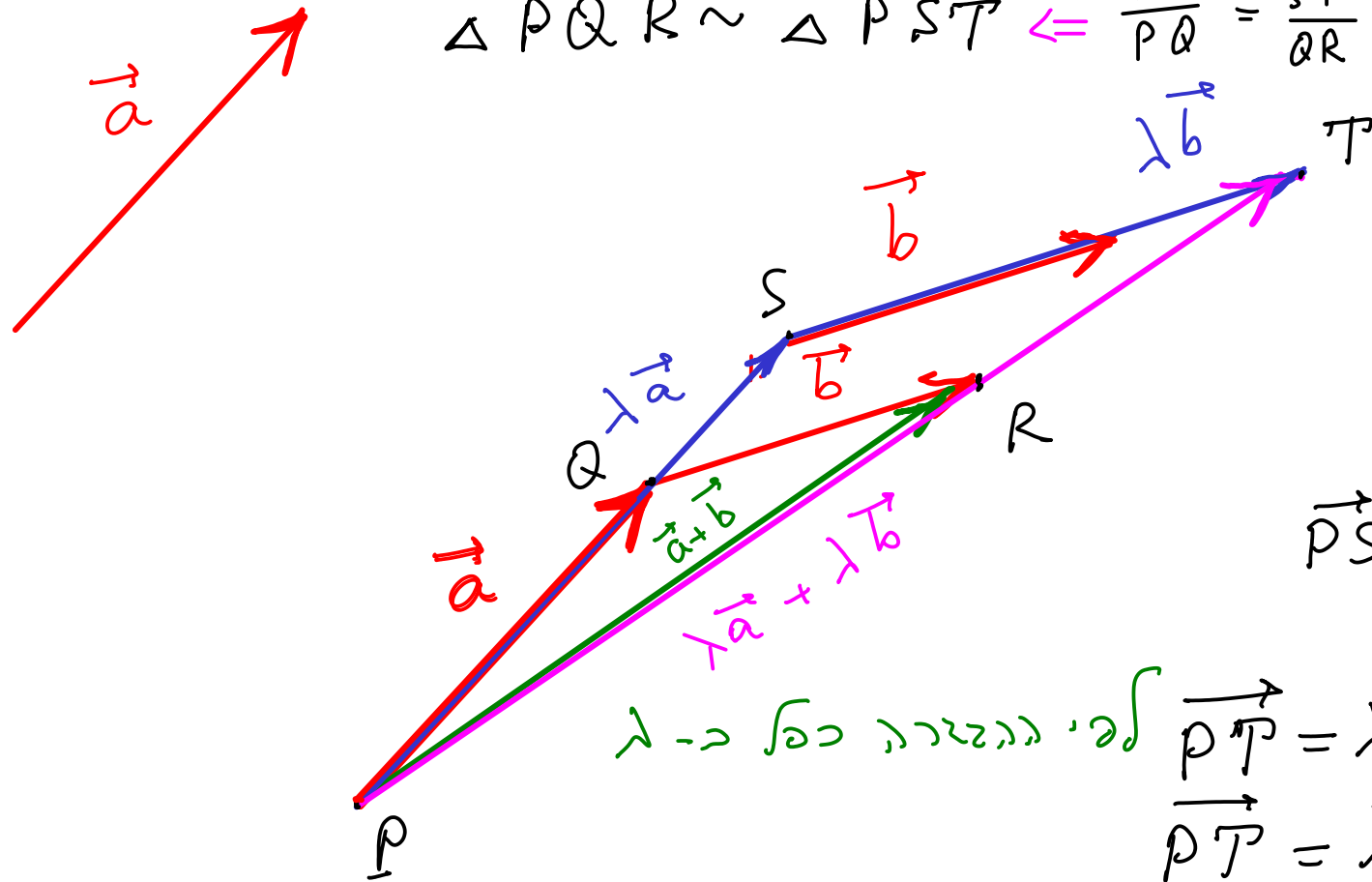
$\frac{1}{\lambda} \vec{u} + \vec{v}$ כלומר יחס

Claim עבור $\vec{a}, \vec{b}$ סגור כל סקלר λ נ"ל

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

הוכחה (הנכחה $\lambda > 1$) $\frac{ST}{QR} = \lambda \Leftrightarrow ST = \|\lambda\vec{b}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{b}\| = \lambda \cdot QR \Leftrightarrow \vec{ST} = \lambda\vec{b}$

$\triangle PQR \sim \triangle PST \Leftrightarrow \frac{PS}{PQ} = \frac{ST}{QR} \Leftrightarrow \frac{PS}{PQ} = \lambda$ (הנכחה $\lambda > 0$)



$$\lambda = \frac{PS}{PQ} = \frac{PT}{PR} = \frac{ST}{QR}$$

$$\vec{PS} = \lambda \vec{PQ} = \lambda \vec{a}$$

$\vec{PT} = \lambda \cdot \vec{PR}$ (הנכחה $\lambda > 0$)

$$\vec{PT} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$$

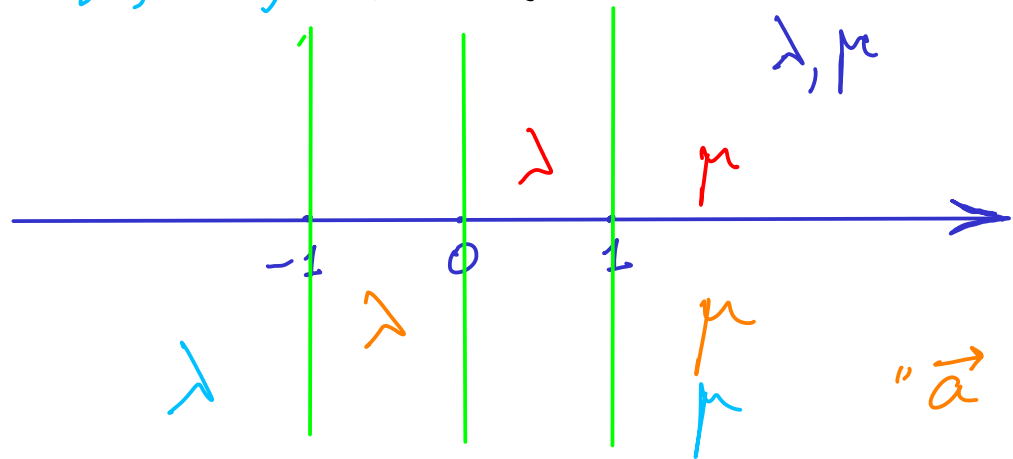
$$\Leftrightarrow \frac{PT}{PR} = \lambda$$

$$\overrightarrow{PT} = \lambda \overrightarrow{a} + \lambda \overrightarrow{b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST} = \lambda \overrightarrow{a} + \overrightarrow{ST} \quad \text{y.l. 23N} \\ \overrightarrow{ST} = \lambda \overrightarrow{QR} = \lambda \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \frac{ST}{QR} = \lambda \end{cases}$$

$$\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda \overrightarrow{a} + \lambda \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PT} = \lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \quad \text{y.l. 23N} \\ \overrightarrow{PT} = \lambda \overrightarrow{a} + \lambda \overrightarrow{b} \end{cases}$$

($\lambda > 1$, y.l. 23N)



$$-1 < \mu < 0, \lambda > 1$$

y.l. 23N y.l. 23N y.l. 23N

" $\overrightarrow{a}$ y.l. 23N" $\forall \overrightarrow{a}$

$$0 \cdot \overrightarrow{a} = \vec{0}$$

① y.l. 23N

$\overrightarrow{a}$ y.l. 23N y.l. 23N $-\overrightarrow{a}$ y.l. 23N

$$-1 \cdot \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}$$

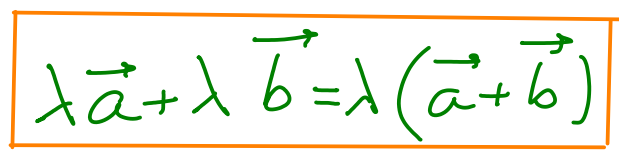
②

$$-\overrightarrow{a} = \overrightarrow{QR}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{PQ} \quad \text{y.l. 23N}$$

3"02





$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} \\ \overrightarrow{MA} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{AN} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

• J. l. n $\vec{MN} = \frac{1}{2} \vec{BC} \therefore \text{midpoint}$

2. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{BA} \perp \vec{MA} \\ \frac{1}{2} \|\vec{BA}\| = \|\vec{MA}\| \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

הצגת דוגמה

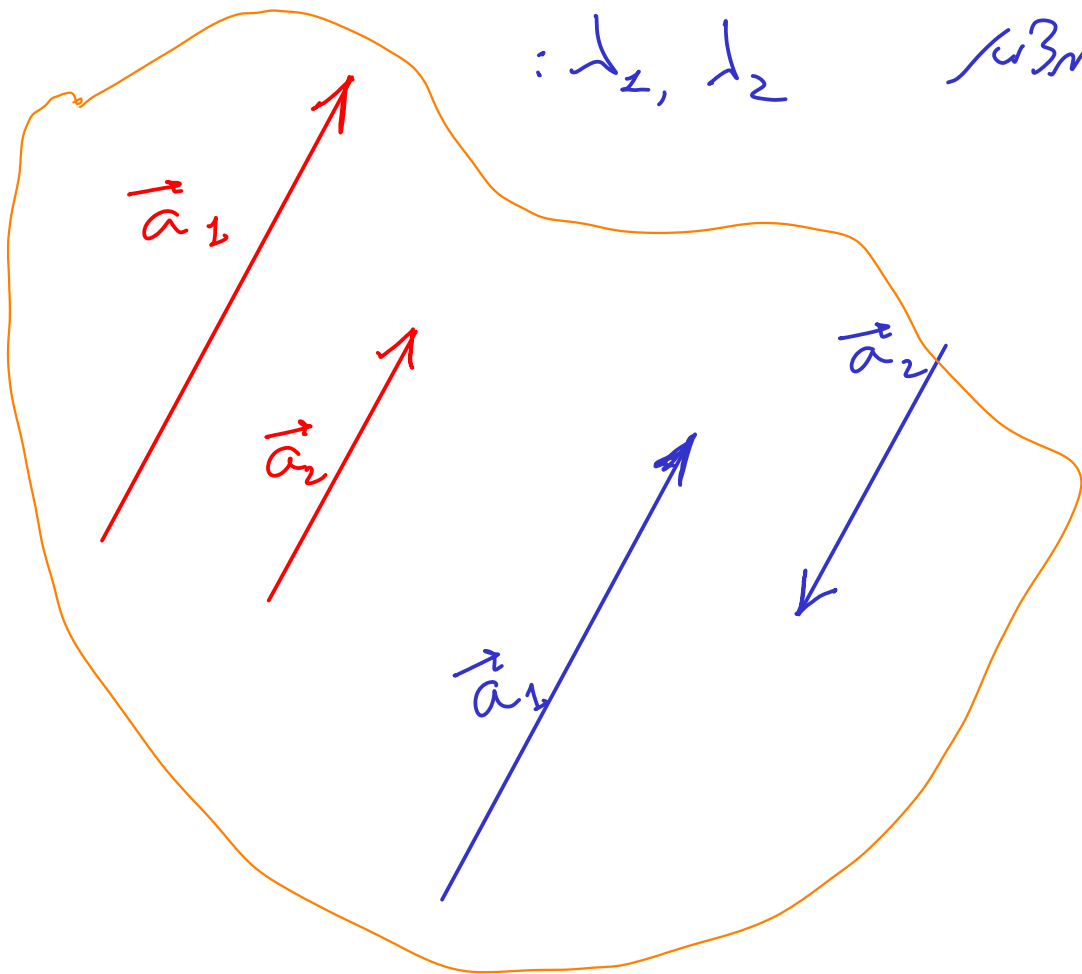
הוקדמו $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$
 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$
הוקדמו $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ וסדרם $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ קיבלו את $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k$ כצורה ליניארית על $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$

הצורה הליניארית $0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_k$ (עם מקדמים 0!) נקראת צורה טריוויאלית.

הוקדמו $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ וסדרם $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ קיבלו את $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k$ כצורה ליניארית על $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ שונה מ-0.

$$k=2$$

4


$$\neq 0 \quad \text{only} \quad \text{if} \quad \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}} \int (1$$

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \vec{0} \quad (2)$$

$$\lambda_1 \vec{a}_1 = -\lambda_2 \vec{a}_2 \quad \text{s/c, } \lambda_1 \neq 0 \wedge \checkmark$$

$$\vec{a}_1 = - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2$$

$$\vec{a}_1 = \mu \vec{a}_2$$

כאן $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ הם וקטורים ליניאריים בלתי תלויים $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^n$ הם וקטורים ליניאריים בלתי תלויים

Coen אקטור'ס $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ גאומ'ס אינזש'ן $\Leftrightarrow$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ אקטור'ס גאומ'ס.

"ס'אז אקטור"

ס'אז

הוכחה:

$\vec{a}_1, \vec{a}_2$ אקטור'ס $\Leftrightarrow$ $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$ פ' 3

$\vec{a}_1, \vec{a}_2$ אקטור'ס $\Leftrightarrow$ נאך אקטור'ס λ_1, λ_2 פאר אס'ס $\vec{0}$ פ' 3, $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \vec{0}$.

אקטור'ס פ' 3, $\lambda_2 \neq 0$ פ' 3. אקטור'ס פ' 3, $\lambda_2 \neq 0$ פ' 3. $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \vec{0} \quad | \times \frac{1}{\lambda_2}$

$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{0} \quad | + (-\vec{a}_2)$ $\vec{a}_2$ אקטור'ס פ' 3.

$\vec{a}_2 = \mu \vec{a}_1$: נכונות
 $\vec{a}_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \vec{a}_1 \Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \vec{a}_1 = -\vec{a}_2 \Leftrightarrow$

$\vec{a}_1 = \overrightarrow{PQ}$

הסתרה : נ'נ

$\vec{a}_2 \parallel \vec{a}_1, \mu \vec{a}_1$

$\vec{a}_2 = \overrightarrow{RS}$

$PQ \parallel RS$
 (נכונות)

$\Leftrightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$

$\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$: נכונות $\Rightarrow$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2$: נכונות

$\vec{a}_1, \vec{a}_2 \Leftrightarrow \mu \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{0}$

$\mu \vec{a}_1 + (-1) \vec{a}_2 = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{a}_2 = \mu \vec{a}_1$

μ נכונות $\Leftrightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$

$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \vec{0}$

$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \vec{0}$

$\lambda_1 = \mu$

$\lambda_2 = -1 \neq 0$

λ_1, λ_2

משפט כל שלושה וקטורים ה"ם אינדיפנדנט

הוכחה: 1) נניח $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$ - כל אחד מהם

נניח $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ אינם
כל אחד מהם קוואנטי
P, Q, R

$$\vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RP} = \vec{0}$$

$$\vec{PQ} \parallel \vec{a} \Rightarrow \vec{PQ} = \lambda \vec{a}$$

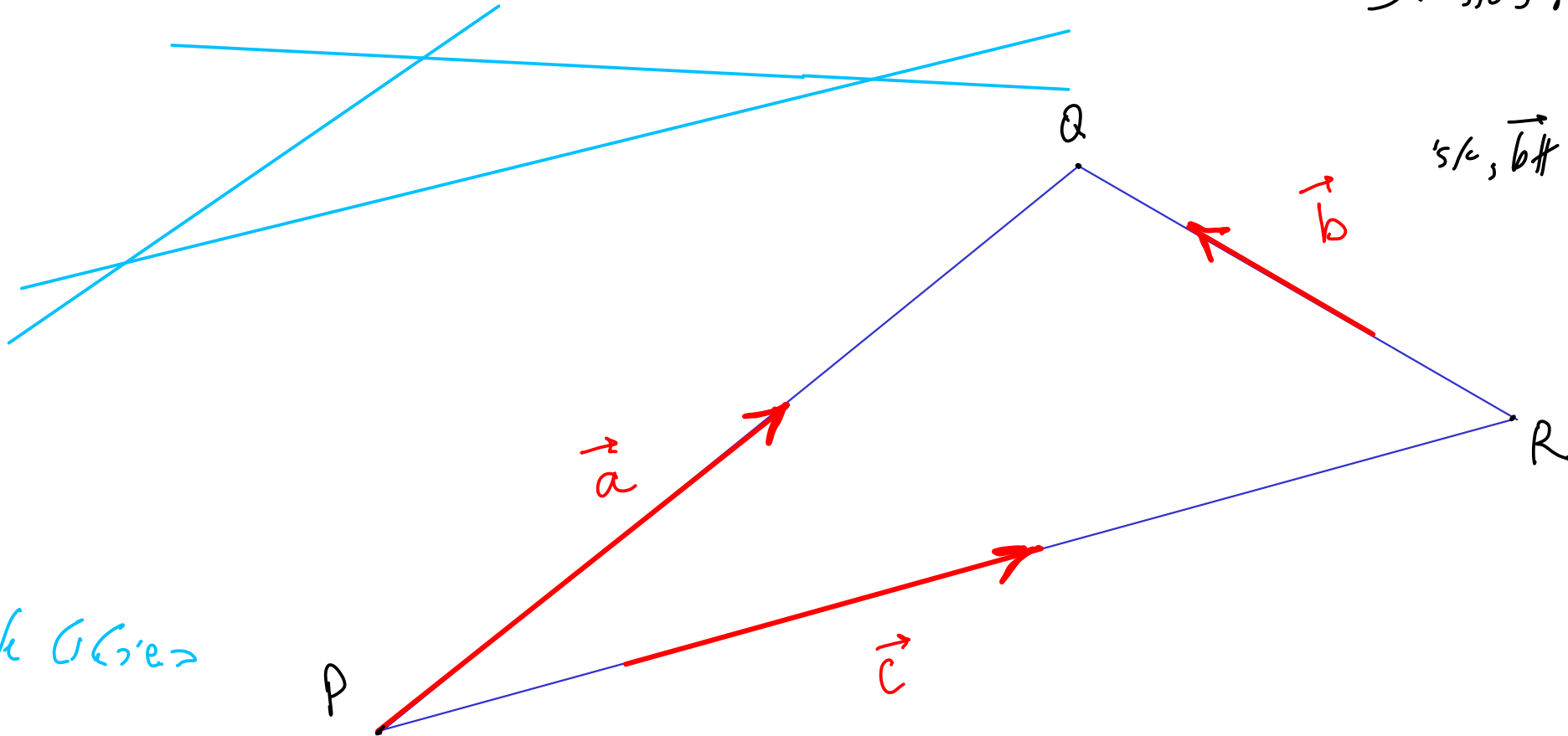
$$\vec{QR} = \mu \vec{b} \quad \text{באופן דומה}$$

$$\vec{RP} = \nu \vec{c}$$

כיוון $\lambda \neq 0, \mu \neq 0, \nu \neq 0$

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c} = \vec{0}$$

כל $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ אינם



כל אחד מהם

$$\lambda = 1.7$$

$$\mu = -\frac{9.5}{4}$$

$$\nu = -\frac{22}{8.5}$$

$$1.7 \vec{a} - \frac{9.5}{4} \vec{b} - \frac{22}{8.5} \vec{c} = \vec{0}$$

והצרכים האלו הם לא אינדיפנדנט

$$(2) \quad \vec{a} \parallel \vec{b} \quad \because \vec{c} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \neq \vec{0}$$

$$\alpha \vec{a} - \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \vec{a} - \vec{b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b} = \alpha \vec{a} \quad : \alpha \text{ נון } \mu'' \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\alpha \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0} \quad : \text{נכון}$$

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda = \alpha \\ \mu = -1 \neq 0 \\ \nu = 0 \end{array}$$

והצגו כי הוא לא כיווני.
פ.ע.נ

על כל מערכת של וקטורים שמכילה $\vec{0}$, גלוייה ו'נסמית'.

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{0} \quad \text{הוכחה:} \quad 0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_{k-1} + 1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

ציינו כי זה לא כיווני.
פ.ע.נ

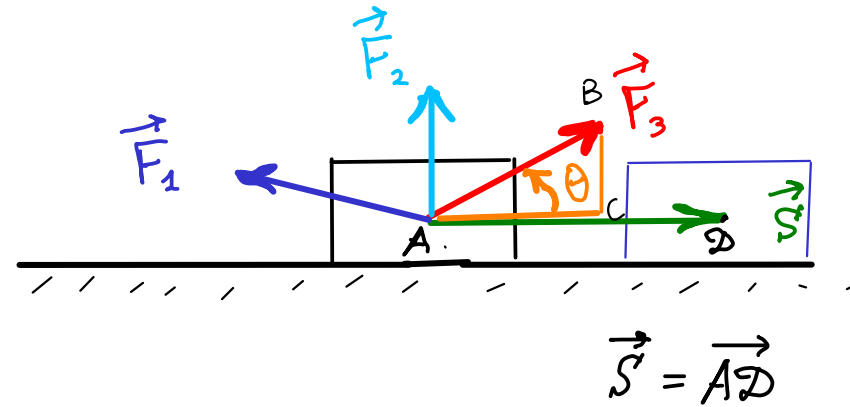
$$1 \neq 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_{k-1} = 0, \lambda_k = 1$$

מכפלה פנימית

$$\vec{s} \perp \vec{F} \Rightarrow \theta = 90^\circ \Rightarrow \cos(\theta) = 0$$

$\vec{F}$ "תכונה" תיכונה
 $\vec{F}$ "תכונה" תכונה
 $\vec{F}$ "תכונה" תכונה



$$\|\vec{s}\| \|\vec{F}\| \cos(\theta) = \text{"עבודה"} \quad \vec{F} \text{ כח } \vec{s}$$

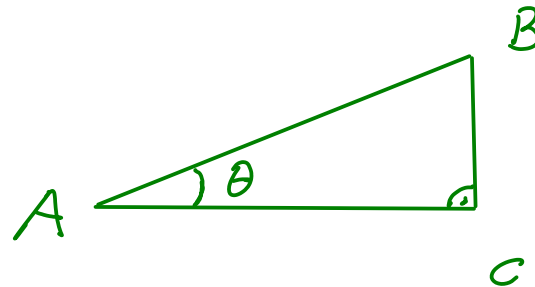
$$\vec{F} = \vec{AB}$$

$$AC = AB \cos(\theta) = \|\vec{F}\| \cos(\theta)$$

$$\frac{AC}{AB} =$$

$\triangle ABC$

נחלק



נחלק ישר זווית

$$\angle BAC = \theta$$

סינוס θ

$$\frac{BC}{AB} = \sin(\theta)$$

המספרים $\frac{AC}{AB}$, $\frac{BC}{AB}$ נקראים כפולים θ .

קוסינוס θ

$$\frac{AC}{AB} = \cos(\theta) \Rightarrow AC = AB \cdot \cos(\theta)$$

ההיקף של $\vec{a}$ הוא $\|\vec{a}\|$
 ההיקף של $\vec{b}$ הוא $\|\vec{b}\|$
 ההיקף של $\vec{a}$ הוא $\|\vec{a}\| \cdot \cos \theta$

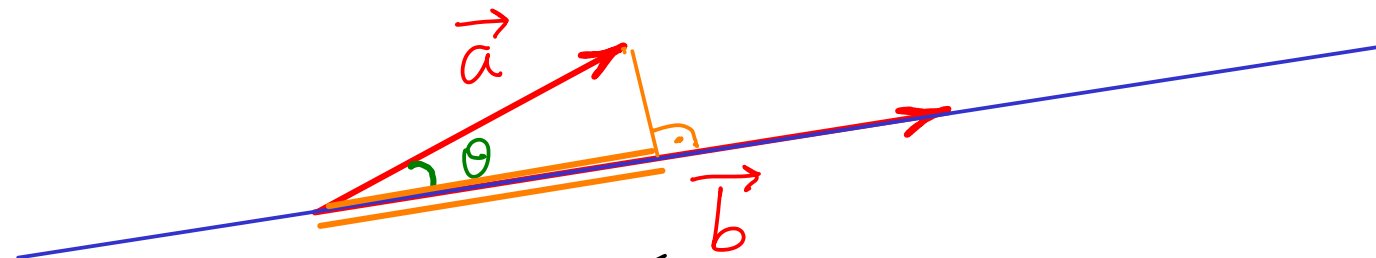
סימנים
 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$
 $(\vec{a}, \vec{b})$
 $\vec{a} \cdot \vec{b}$

מכפלה פנימית
 (מכפלה סקלרית)

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \theta$$

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

נושא



המכפלה הפנימית של $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$ היא $\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\theta)$

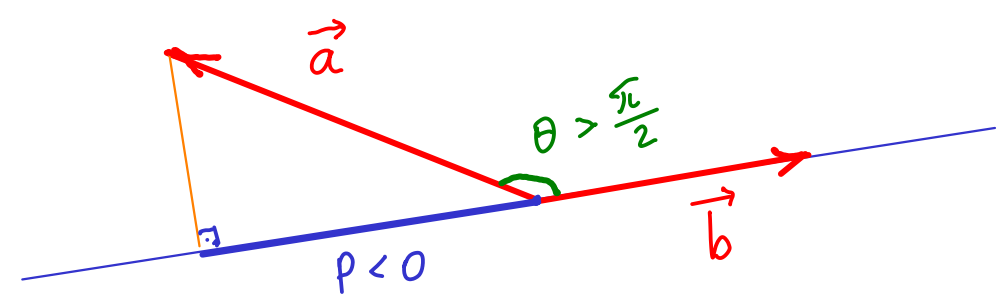
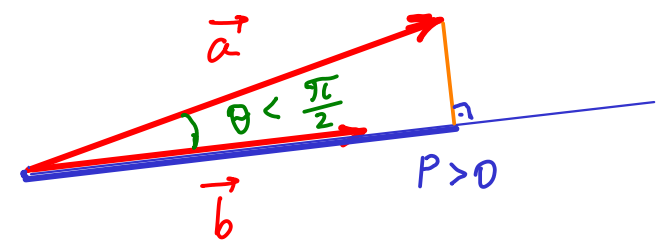
$180^\circ \leftrightarrow \pi$

המכפלה הפנימית של $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$ היא $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

מכפלה פנימית - ערך הסבר

Scalar

וקטור, וקטור ← סקלר



$\|\vec{a}\| = \text{האורך של } \vec{a}$
הנורמה

המכפלה הפנימית:

המספר $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ יכול להיות
שלילי
אפס

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = p \cdot \|\vec{b}\|$$
$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = p \cdot \|\vec{b}\|$$

איך למצוא את p ?

$$p = \|\vec{a}\| \cdot \cos \theta$$

היזרה של המכפלה הפנימית:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \theta$$

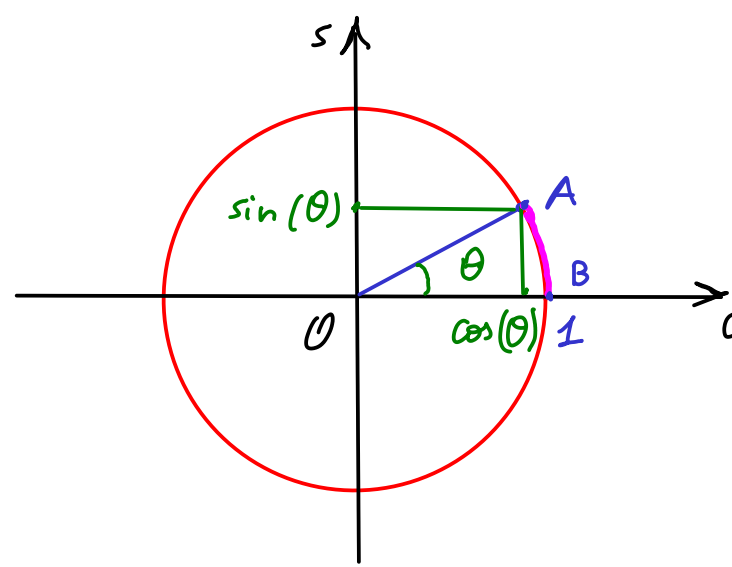
מחזוריות היחידה:

המרכיב נמצא בראשית ה'צירים' (1)

ה'ציר' = 1 (2)

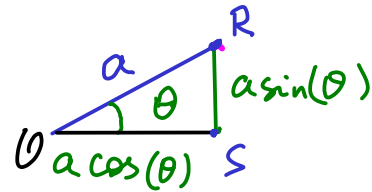
הזווית θ = האורך של הקשת $\widehat{AB}$

מהו $\cos \theta$?



$$p = OS = a \cos(\theta)$$

$$a = \|\vec{a}\| = OR$$



$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4} = \widehat{PQ} \text{ האורך} = 90^\circ$$

יחידת המידה (הכשת של זווית) היא

$$\frac{\widehat{AB}}{R_1} = \frac{\widehat{CD}}{R_2}$$

Radian

$$180^\circ \leftrightarrow \pi$$

ה'ציר' מחזור

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{4}$$

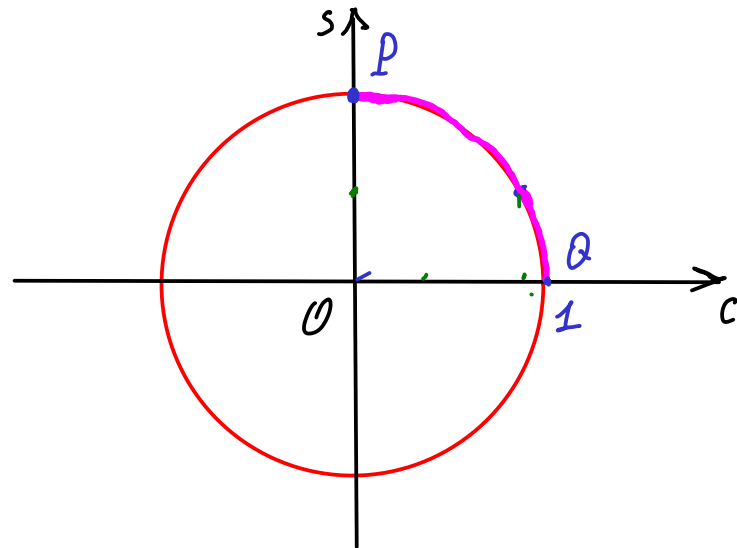
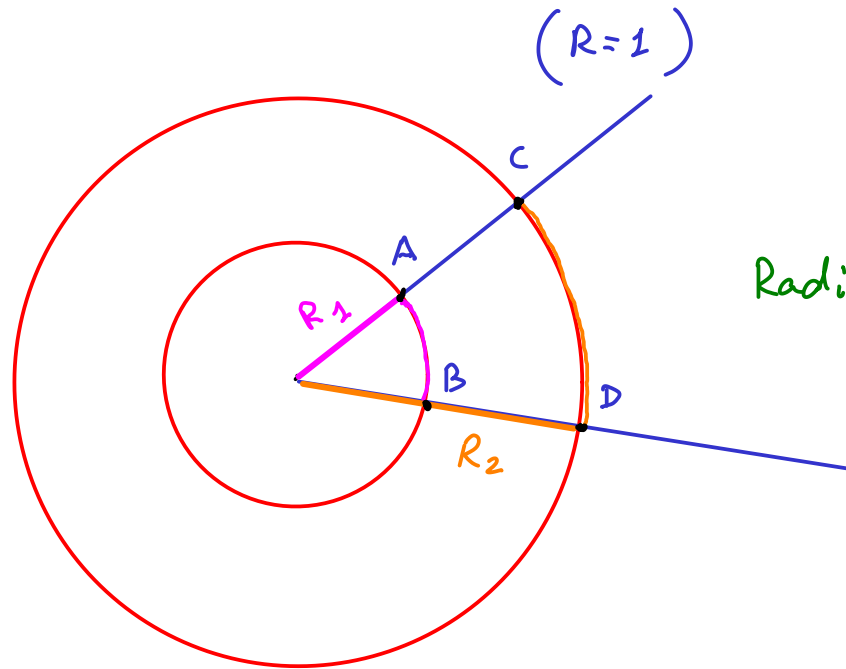
$$\frac{\pi}{6}$$

$$90^\circ$$

$$60^\circ$$

$$45^\circ$$

$$30^\circ$$



$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \theta$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

$$:\sqrt{3}$$

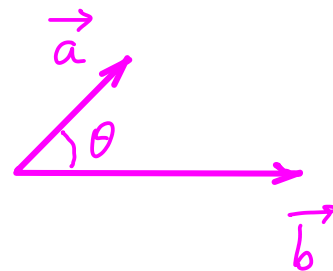
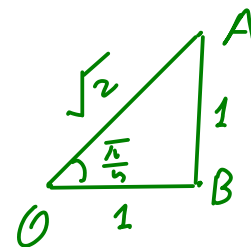
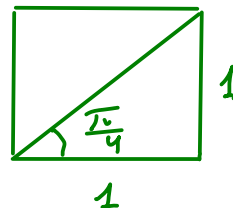
$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 1 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sqrt{2}$$

∴ $\sqrt{2}$

$$\cos \frac{\pi}{4} = ?$$



$$\|\vec{a}\| = 1$$

$$\|\vec{b}\| = 2$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

45°

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

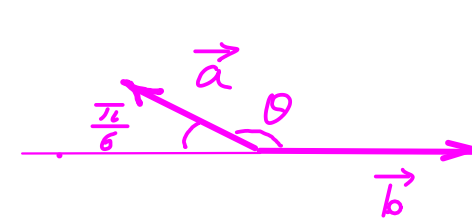
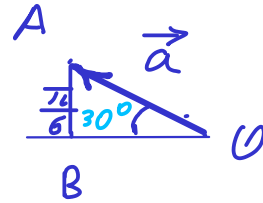
$$OB = 1$$

$$OA = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \theta$$

$$\theta = ?$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$



$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\|\vec{a}\| = 2$$

$$\|\vec{b}\| = 3$$

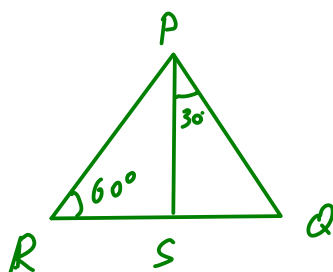
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

$$BO = \sqrt{AO^2 - AB^2} =$$

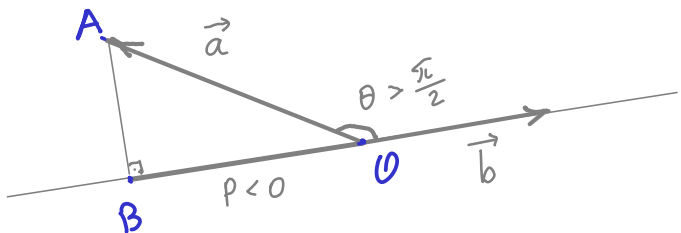
$$= \sqrt{AO^2 - \frac{1}{4}AO^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}AO^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}AO$$

$$\angle = AB = \frac{1}{2}AO$$



$$\frac{SQ}{PQ} = \frac{1}{2}$$



$$p = -BO = -\frac{\sqrt{3}}{2}\|\vec{a}\|$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2}\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cancel{2} \cdot 3 = -3\sqrt{3}$$

$$\vec{b} = \vec{0} \quad \text{if } \vec{a} = \vec{0} \quad (01)$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad (02)$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &\neq \vec{0} \\ \vec{b} &\neq \vec{0} \end{aligned}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \quad \text{if } \vec{a} \perp \vec{b} \quad \text{if } \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\Rightarrow \|\vec{a}\| \neq 0$$

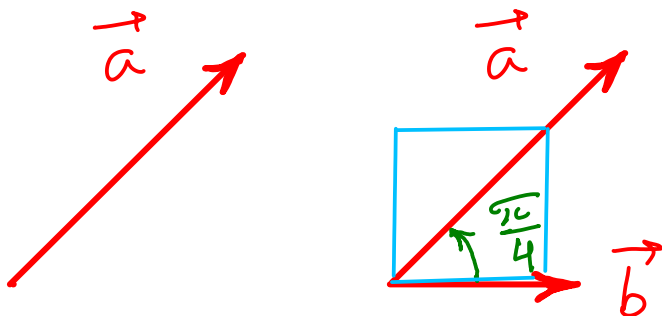
$$\Rightarrow \|\vec{b}\| \neq 0$$

$$\Rightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

מאונכים

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

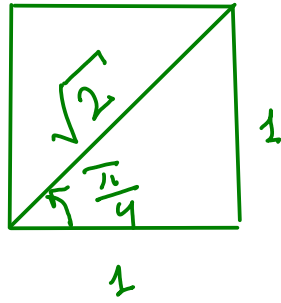
הערה $\vec{0}$ מאונך לכל וקטור.



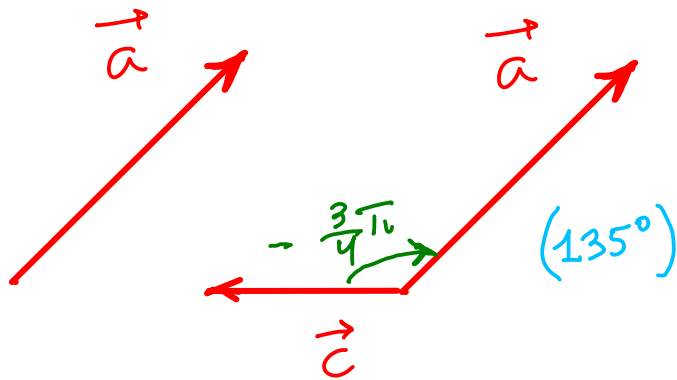
$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 5 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{15}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{a}\| &= 5 \\ \|\vec{b}\| &= 3 \end{aligned} \quad \text{מש:}$$

$$\|\vec{c}\| = 3 \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad (45^\circ)$$



$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot \cos \frac{3\pi}{4} = 5 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{15}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

נניח
מאונכים
אנכים

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \quad \text{נכון}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \text{נכון}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{b} = \vec{0} \text{ או } \vec{a} = \vec{0} \quad \text{אם } \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \iff \cos \theta = 0$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \quad \text{נכון}$$

ה"ערה נוספת

ל.ע.נ

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \quad \Rightarrow$$

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \|\vec{a}\|^2$$

ל.ע.נ

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \cos(0) = \|\vec{a}\|^2$$

הנחה

ל.ע.נ

נניח λ, μ מספרים בסי $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ב.ס ל.ע.נ

$$\langle \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \vec{c} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \mu \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

coen

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \theta$$

אנחנו

Se.N $\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle = \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \cos(-\theta) = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \theta$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\pi \leftrightarrow 180^\circ$$

$$\vec{b} = \vec{u} + 2\vec{v}$$

$$\vec{a} = 4\vec{u} - 3\vec{v}$$

יפה

$$\beta = \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$$

$$\|\vec{v}\| = 2$$

$$\|\vec{u}\| = 5$$

$$\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b}) \quad \underline{\text{הנקודה}}$$

$$\alpha = ?$$

$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) \text{ ו } \cos = \text{"אנחנו"}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle 4\vec{u} - 3\vec{v}, \vec{u} + 2\vec{v} \rangle = 4\langle \vec{u}, \vec{u} + 2\vec{v} \rangle + (-3) \cdot \langle \vec{v}, \vec{u} + 2\vec{v} \rangle =$$

①

$$\langle \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \vec{c} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \mu \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \quad ①$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \quad ②$$

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \|\vec{a}\|^2 \quad ③$$

$$\stackrel{②, ①}{=} 4\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 4 \cdot 2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - 3\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - 3 \cdot 2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle =$$

$$= 4 \cdot \|\vec{u}\|^2 + (8-3) \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - 6 \|\vec{v}\|^2 = 4 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 \sqrt{3} - 6 \cdot 2^2 = 100 + 25\sqrt{3} - 24 = 76 + 25\sqrt{3}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \beta = 5 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$(x+y)(z+w) = xz + xw + yz + yw$$

$$\begin{aligned} \|\vec{a}\|^2 &= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle 4\vec{u} - 3\vec{v}, 4\vec{u} - 3\vec{v} \rangle = 16 \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + (-12) \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \\ &\quad + (-12) \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + 9 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 16 \cdot \|\vec{u}\|^2 - 24 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + 9 \|\vec{v}\|^2 = 16 \cdot 25 - 24 \cdot 5\sqrt{3} + 9 \cdot 4 = \\ &= 436 - 120\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| = 24$$

$$\|\vec{a}\| = 13, \|\vec{b}\| = 19$$

معلوم

$$\|\vec{a} - \vec{b}\| = ?$$

المطلوب

$$\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle =$$

$$= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\|^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \|\vec{b}\|^2$$

لكن $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ غير معلوم

! $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ غير

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle =$$

$$= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \|\vec{b}\|^2$$

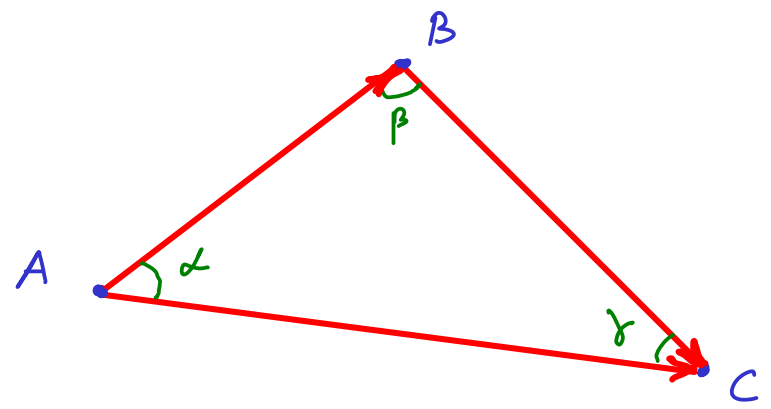
$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2}{2} = \frac{24^2 - 13^2 - 19^2}{2} = \frac{24^2 - 169 - 361}{2} = 23$$

$$\begin{aligned} \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 13^2 + 19^2 - 2 \cdot 23 = 169 + 361 - 46 = \\ &= 530 - 46 = 484 \end{aligned}$$

$$\|\vec{a} - \vec{b}\| = \sqrt{484} = 2\sqrt{121} \stackrel{|\sqrt{}|}{=} 22.$$

$$\|\vec{a} - \vec{b}\| = 22 \quad \text{!} \sim 2/0 \sim$$

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$



$$\vec{a} := \vec{BA}$$
$$\vec{b} := \vec{CB}$$

$$[\vec{a}] = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$[\vec{b}] = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$A(3, 1, 0)$ נתון:

$B(-4, 5, 3)$

$C = (1, -4, 6)$

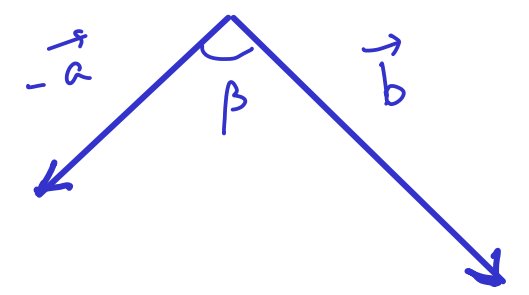
3"02: אור הזווית β

עבור הזווית הפנימית β ו-2 נקודות:

הזווית: $\cos(\beta)$ אור

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -((-7) \cdot 5 + 4 \cdot (-9) + 3 \cdot 3) = +62$$

3"02: $\cos(\beta)$ אור



$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\beta) = \sqrt{(-7)^2 + 4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-9)^2 + 3^2} \cos(\beta) =$$
$$= \sqrt{74} \sqrt{115} \cos(\beta)$$

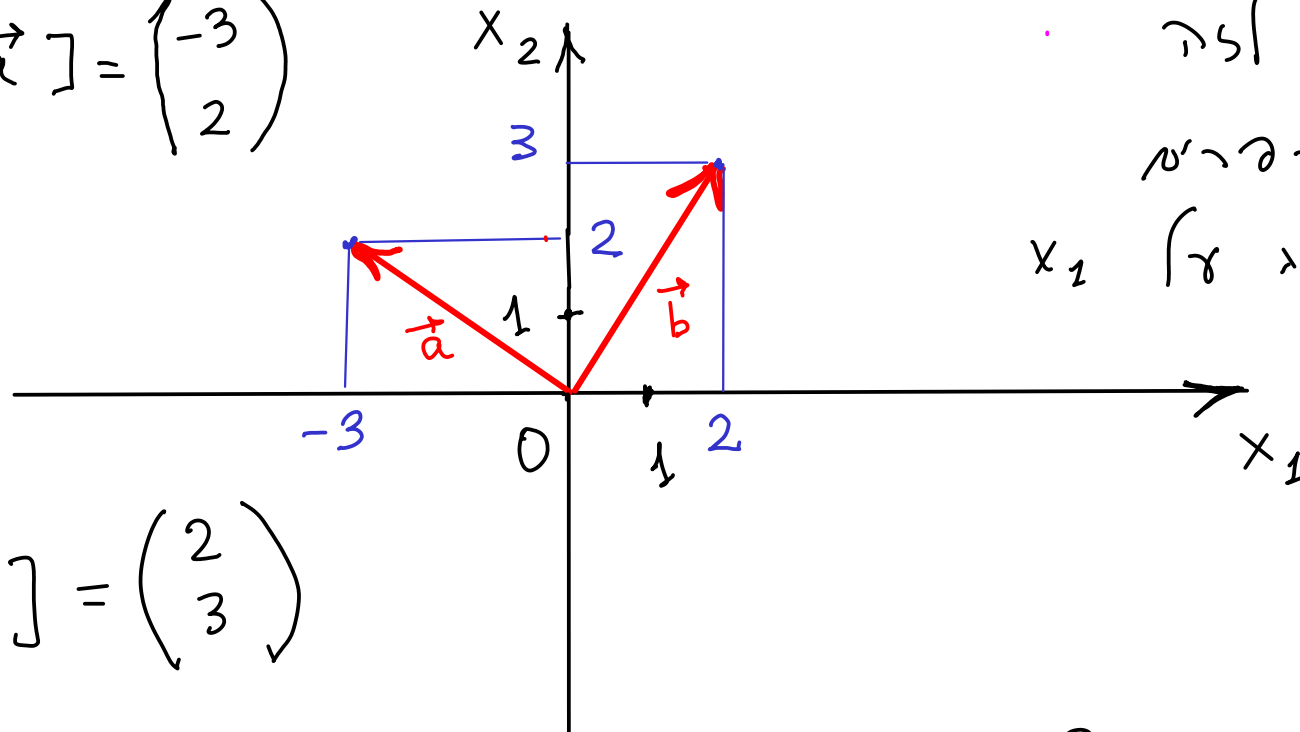
$$\beta: \angle (-\vec{AB}, \vec{BC})$$

$$\angle (\vec{BA}, \vec{BC})$$

$$\sqrt{74 \cdot 115} \cos(\beta) = 62$$

$$\cos(\beta) = \frac{62}{\sqrt{74 \cdot 115}} \approx 0.67$$

$$[\vec{a}] = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$$[\vec{b}] = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) 2 ישרים משוללים זה את זה

(2) כזו לך דרך הגלילה בין היחסים

לנקודות, ציור לבחור נקודות x_1

משלמה לנסה 1

$$X_2 \quad \text{---} \quad k \quad \text{---} \quad (3)$$

$$X_1 \perp X_2 \quad (4)$$

(5) הקדמה גמלה/עברית מודרנית
[מצב צבעי]

"3, 7, 11" x_1, x_2
מחזורי קטנים.

N is large
3-4 μ

→ 3/7
2/5 8

$\sigma' \sim 120$ ~ 1215
 $\lambda(11311017)$ $\sigma' \sim 120$
 (ξ_1, ξ_2)

→ נ"ל נ'סגו → $[\vec{b}] = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, $[\vec{a}] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ נ"ל Coen
s/c

$$[\vec{a} + \vec{b}] = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \end{pmatrix} \quad (k)$$

$$[\lambda \vec{a}] = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_1 \\ \lambda \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (c)$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \quad (2)$$

$$[\vec{b}] = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

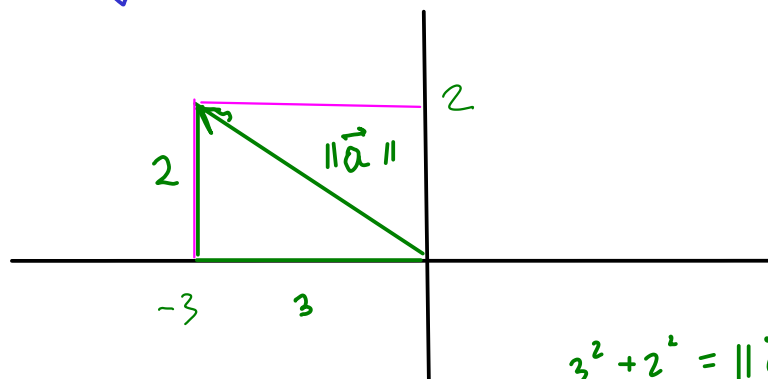
$$[\vec{a}] = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3

$$[\vec{a} + \vec{b}] = \begin{pmatrix} -3 + 2 \\ 2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

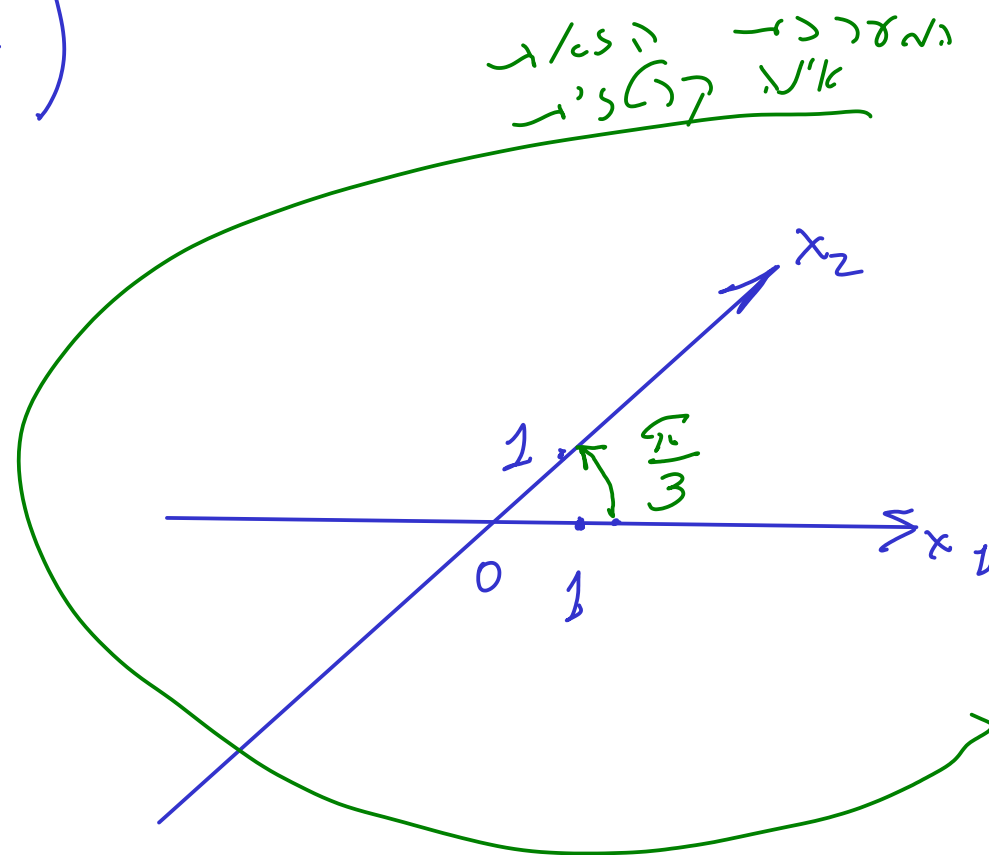
$$\left[\left(-\frac{1}{2}\right) \vec{a} \right] = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-3) \\ \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$



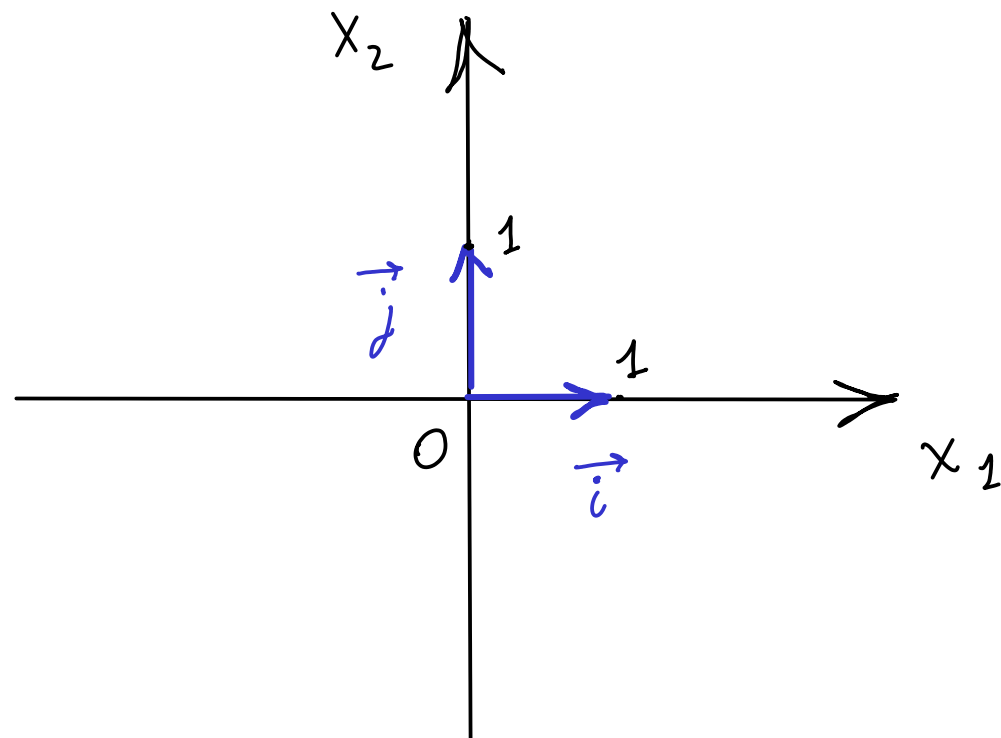
$$3^2 + 2^2 = \|\vec{a}\|^2$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{3^2 + 2^2}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2}$$



ת'שוב מכפלה ענייני בקואורנטים



לכל מערכת קרטזית קלאסית מערכת בסיס

2 וקטורים: $\vec{i}, \vec{j}$

הוקטור $\vec{i}$ מקבלת ערך 1, $\|\vec{i}\| = 1$

הוקטור $\vec{j}$ מקבלת ערך 1, $\|\vec{j}\| = 1$

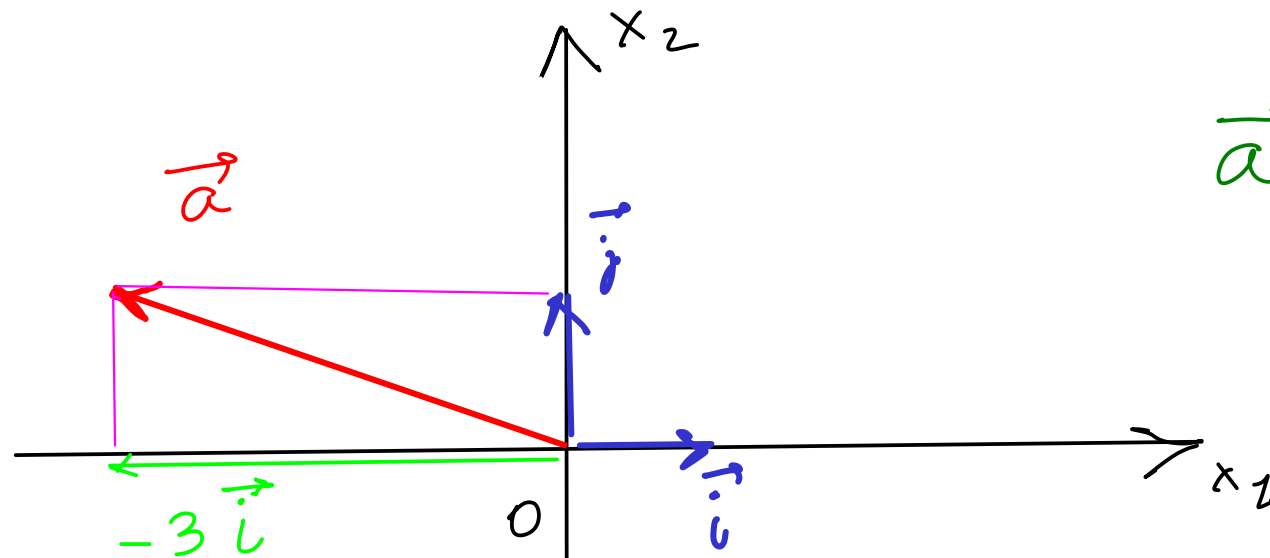
$$[\vec{a}] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j}$$

כל וקטור $\vec{a}$ ניתן לכתוב כצירוף ליניארי של $\vec{i}, \vec{j}$: $\vec{i}, \vec{j}$ בסיס

① $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle = 0$

②



$$\vec{a} = -3\vec{i} + \vec{j}$$

$$[\vec{a}] = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

we have $\vec{b} \rightarrow \text{basis} \rightarrow \text{column}$ $[\vec{b}] = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, $[\vec{a}] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ and ColN

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2$$

is

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j}$$

וכן

$$\vec{b} = \beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j}, \beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} \rangle =$$

$$= \alpha_1 \beta_1 \underbrace{\langle \vec{i}, \vec{i} \rangle}_{=1} + \alpha_1 \beta_2 \underbrace{\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle}_{=0} + \alpha_2 \beta_1 \underbrace{\langle \vec{j}, \vec{i} \rangle}_{=0} + \alpha_2 \beta_2 \underbrace{\langle \vec{j}, \vec{j} \rangle}_{=1} =$$

$$= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2.$$

שלש

$$[\vec{b}] = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$[\vec{a}] = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

! / \mu \nu 4

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 0$$

^{ה' / 5} $\nabla (\vec{a}, \vec{b}) = ?$

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

! / 2 / e x

^{ה' / 5} $\theta := \nabla (\vec{c}, \vec{d}) = ?$

$$[\vec{d}] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$, [\vec{c}] = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5

$$\langle \vec{c}, \vec{d} \rangle = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5$$

ה' / 5 / 1 = "ה' / 5 / 1"

$$\|\vec{c}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\|\vec{d}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{c}, \vec{d} \rangle}{\|\vec{c}\| \cdot \|\vec{d}\|} = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{2} \cdot 5} = \frac{1}{\sqrt{2}} \leftarrow \text{! זהו הסתכלו!}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \underline{\text{! זהו הסתכלו}}$$

הוכחה

3"02

$$\vec{u} \perp 4\vec{v} - 2\vec{w} \quad \text{כי}$$

$$\frac{\vec{u} \perp \vec{v}}{\vec{u} \perp \vec{w}} \quad \text{כי} \quad \boxed{1}$$

הוכחה
כי

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\langle \vec{u}, 4\vec{v} - 2\vec{w} \rangle$$

כי

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0.$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \quad \text{כי}$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, 4\vec{v} - 2\vec{w} \rangle &= \langle \vec{u}, 4\vec{v} \rangle - \langle \vec{u}, 2\vec{w} \rangle = 4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - 2\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \\ &= 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

הוכחה כי $\vec{u} \perp 4\vec{v} - 2\vec{w}$ כי $\langle \vec{u}, 4\vec{v} - 2\vec{w} \rangle = 0$ כי

הוכחה

2

$$\angle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\pi}{6}$$

$$\|\vec{w}\| = 3$$

$$\|\vec{v}\| = 2 \quad \text{: } \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\pi}{6} \quad \|\vec{v}\| = 2 \quad \|\vec{w}\| = 3 \quad \|\vec{v}\| = 2$$

$$\|4\vec{v} - 2\vec{w}\| = ?$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$$

or $\|\vec{a}\|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$

$$\|\vec{a}\|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$$

$$\|4\vec{v} - 2\vec{w}\|^2 = \langle 4\vec{v} - 2\vec{w}, 4\vec{v} - 2\vec{w} \rangle =$$

$$= 16 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - 2 \cdot 4 \cdot 2 \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + 4 \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle =$$

$$= 16 \|\vec{v}\|^2 - 16 \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + 4 \|\vec{w}\|^2 =$$

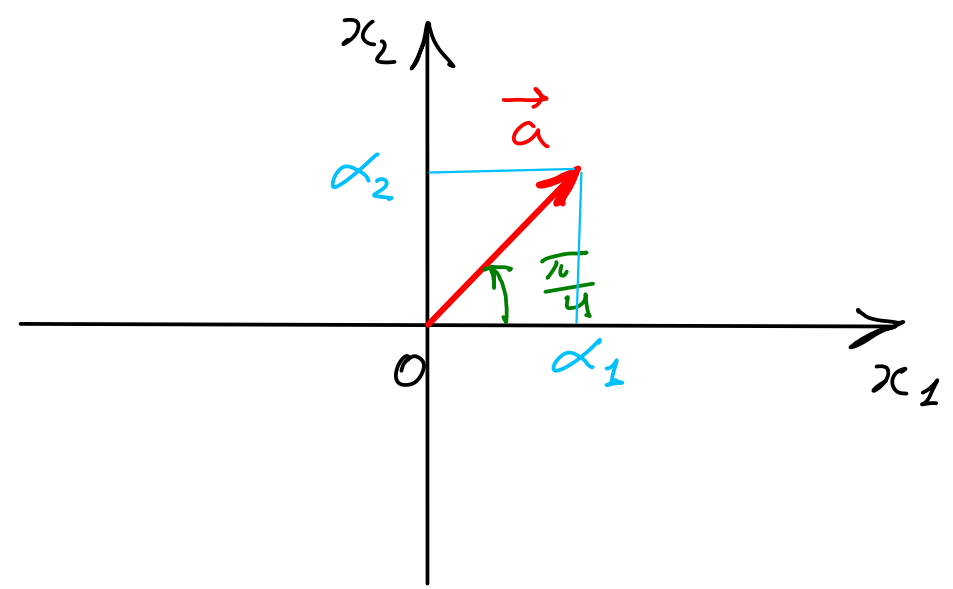
$$= 16 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{6} + 4 \cdot 3^2 = 16 \cdot 2 \left(2 - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 4 \cdot 9 =$$

$$= 64 - 48\sqrt{3} + 36 = 100 - 48\sqrt{3}$$

$$\|4\vec{v} - 2\vec{w}\| = 2\sqrt{25 - 12\sqrt{3}}$$

answer

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \frac{\pi}{6}$$



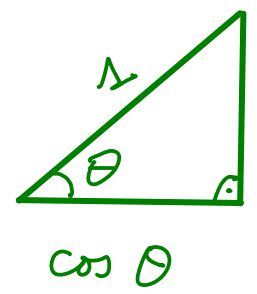
נצטרך את וקטור היחידה במישור ש'זו' ו' $\frac{\pi}{4}$ עם הציר x_1 .

הכיוון: וצ' $[\vec{a}]$

וקטור יחידה $\|\vec{a}\| = 1$

פ' 3 α_1, α_2

$$[\vec{a}] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

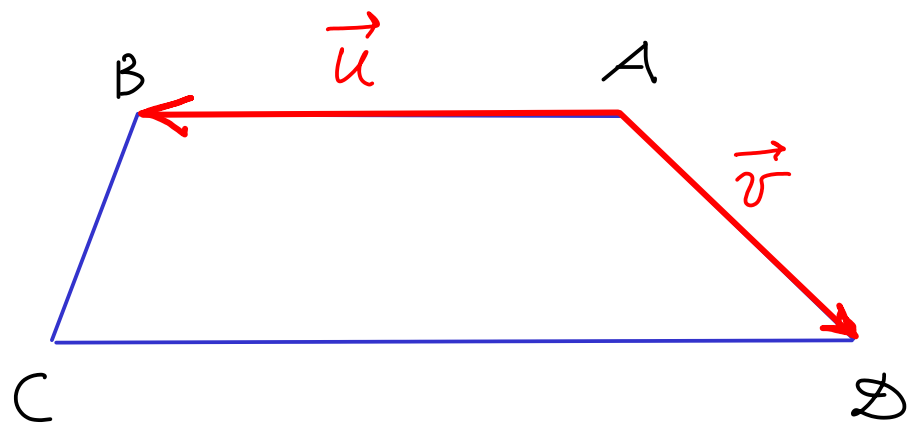


$\sin \theta$

$$[\vec{a}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{ל' 3 פ'}$$

$$\alpha_1 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftarrow \|\vec{a}\| = 1$$

$$\alpha_2 = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



سوال

$$\vec{AB} = \vec{u}$$

$$\vec{AD} = \vec{v}$$

$$\vec{AB} = \lambda \vec{CD} \quad \text{نمونه} \quad \boxed{4}$$

$$\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BC}, \vec{CD} \quad \text{نمونه}$$

$$AB \parallel CD \quad \Leftrightarrow \vec{AB} = \lambda \vec{CD}$$

$$\vec{CD} = \frac{1}{\lambda} \vec{AB}$$

$$\vec{BC}: \quad \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{AA} = \vec{0}$$

$$\vec{BC} = -\vec{AB} - \vec{CD} - \vec{DA} = -\vec{u} - \frac{1}{\lambda} \vec{u} + \vec{AD} = -\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \vec{u} + \vec{v}$$

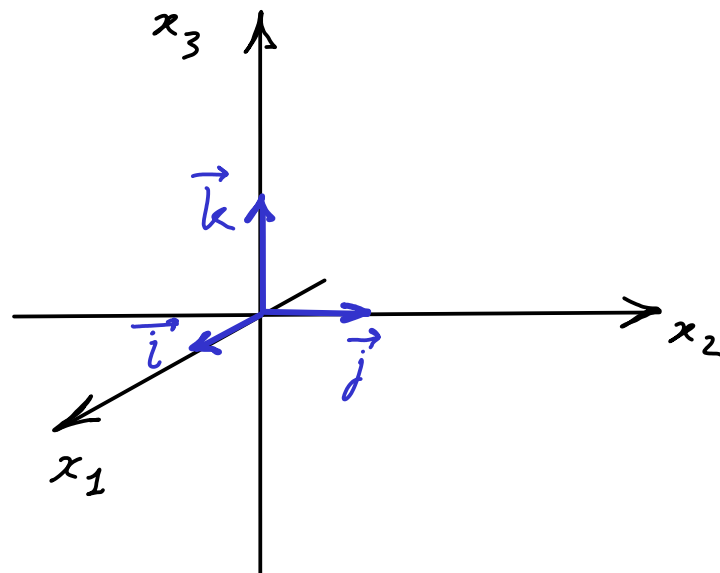
$$\vec{BC} = -\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \vec{u} + \vec{v}$$

نمونه

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{u} - \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \vec{u} + \vec{v} = \left(\cancel{1} - \cancel{1} - \frac{1}{\lambda}\right) \vec{u} + \vec{v} = -\frac{1}{\lambda} \vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{c} = -\vec{c} = -\frac{1}{\lambda} \vec{AB} = -\frac{1}{\lambda} \vec{u}$$

$$\vec{B} = \vec{A} + \vec{AB} = -\vec{A} + \vec{AB} = -\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} - \vec{v}$$



$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$$

$$\vec{i} \perp \vec{j}$$

$$\vec{j} \perp \vec{k}$$

$$\vec{i} \perp \vec{k}$$

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\theta := \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{10}$$

5

1/11

1/3

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{11}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{14}} = \frac{11}{2\sqrt{133}}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 = 2 - 6 + 15 = 11$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 9 + 25} = \sqrt{38}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$[\vec{a}] = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$[\vec{b}] = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

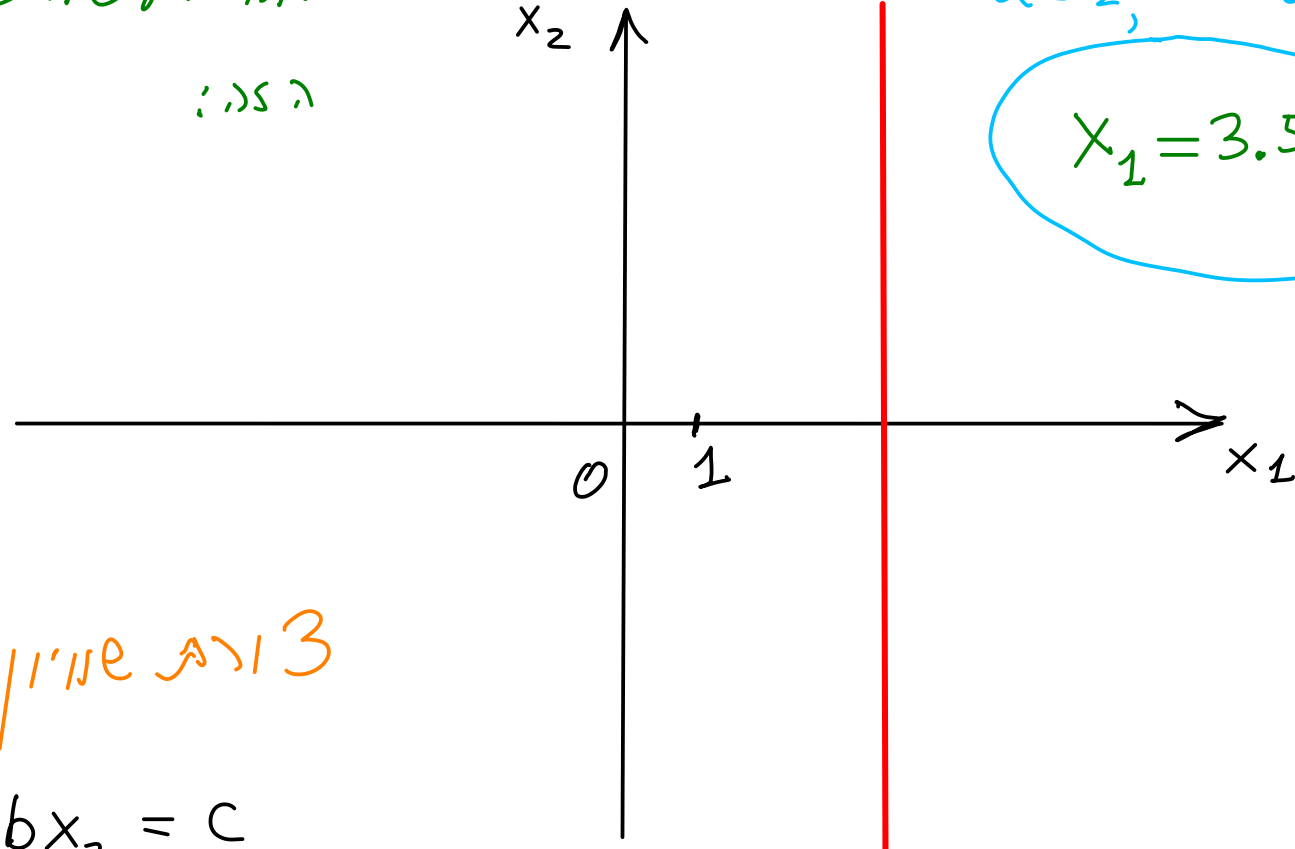
ל"ז בכסלו תשפ"א

7. הצגות אנליטיות של ישר ומעגל

~~$y = kx + m$~~

ישר על המישור

הצורה $x_2 = kx_1 + l$
 אינה ממש נכונה:
 מה אפשר עם הישר
 הנה:



$a=1, b=0, c=\frac{7}{2}$

$x_1 = 3.5$



14

3 ורגט שוויון זכויג:

$ax_1 + bx_2 = c$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

הצבה קרטזית
 $=$ נאום/נאום

מרחב קרטזי -
 - נקודה (x_1, x_2)
 - קבוצה
 קבוצה של נקודות
 ישר $\{(x_1, x_2) \mid ax_1 + bx_2 = c\}$

$ax_1 + bx_2 = 0$ משוואה של הישר ל
 הצבה קרטזית ל
 1/

X גזירה של x $x \in X$ $(\neg/\cup/\cap)$ ו'סל $\neg$ $\cup$ $\cap$
 X - $\neg$ x

$$ax_1 + bx_2 = c \quad ||$$

$$l: x_1 - 2x_2 = 3$$

1

$$p_4(3,0) \in l.$$

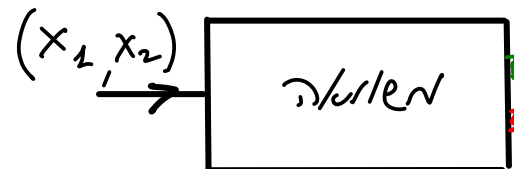
$$p_1(1,-1) \in l.$$

$$p_5(-3,-3) \in l.$$

$$p_2(0,0) \notin l.$$

$$p_6(0,1) \notin l.$$

$$p_3(1,1) \notin l.$$



$$a=1$$

$$b=-2$$

$$c=3$$

$$l: ax_1 + bx_2 = c$$

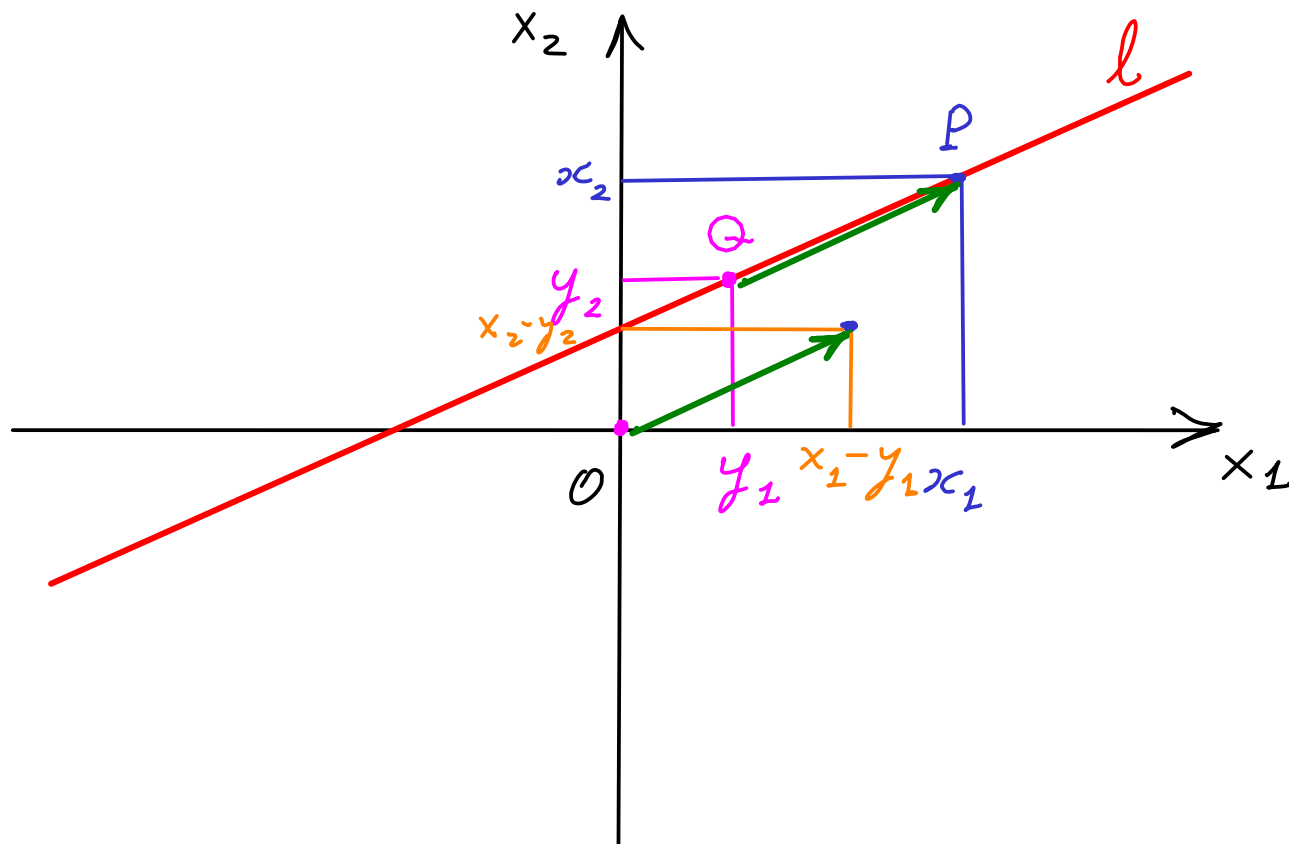
$$\underline{a, b \text{ נורמליזציה של } l}$$

$$P(x_1, x_2)$$

$$Q(y_1, y_2)$$

$$[\vec{QP}] = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix}$$

ק' ה' 10
ק' ה' ה' ה' ה'



$$ax_1 + bx_2 = c \Leftrightarrow P \in l$$

$$ay_1 + by_2 = c \Leftrightarrow Q \in l$$

$$ax_1 + bx_2 - ay_1 - by_2 = c - c$$

$$\boxed{a(x_1 - y_1) + b(x_2 - y_2) = 0}$$

$$l \text{ נורמליזציה } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ נורמליזציה } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \vec{QP}$$

$$\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \vec{QP} \rangle = 0$$

לפי הוקטור $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ מאונך לכל וקטור שנמצא בשריט.

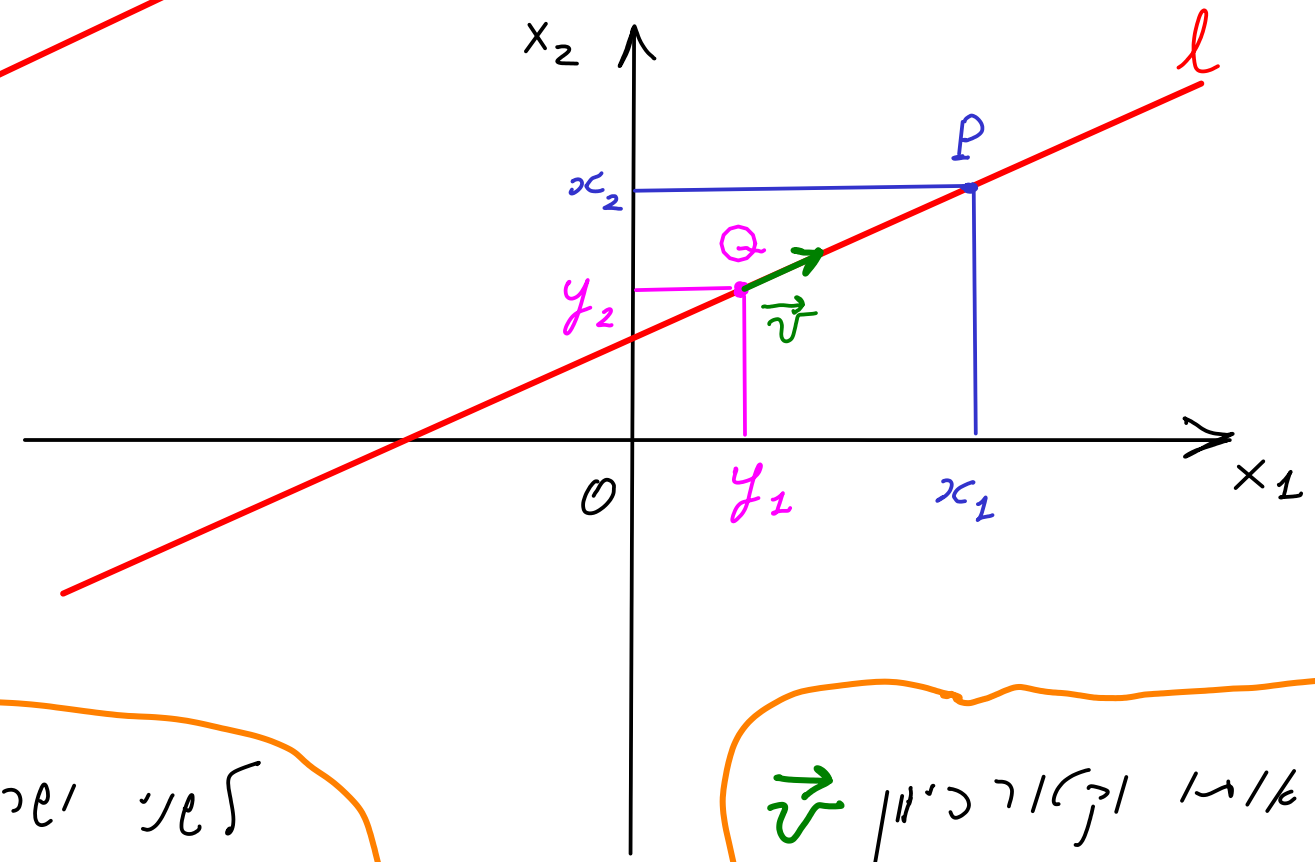
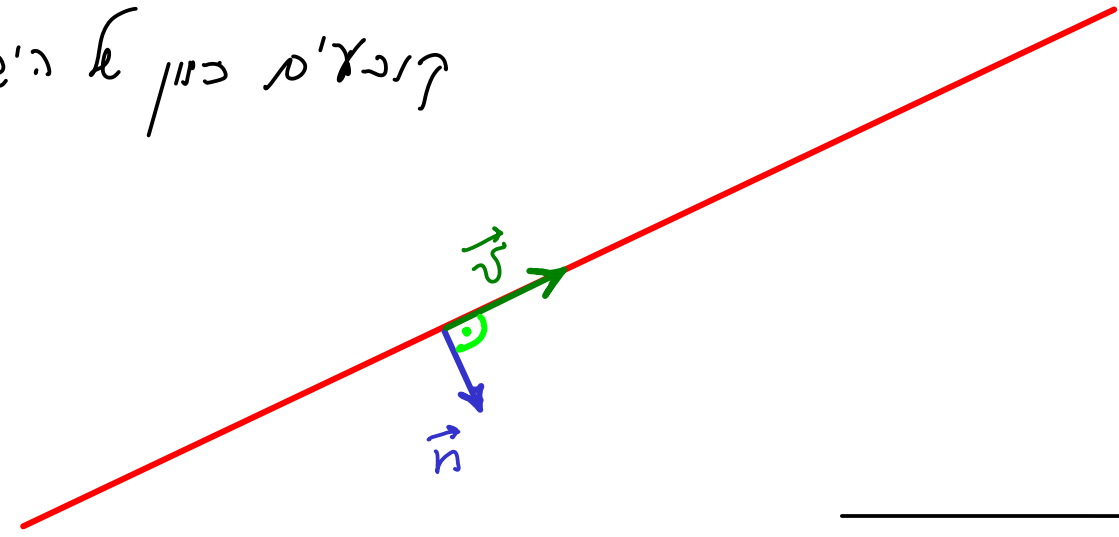
בקיצור, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ מאונך לשריט:

$$l \perp \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \parallel \text{וקטור נורמלי (מאונך) של שריט } ax_1 + bx_2 = c.$$

הצגה בראשית

זמן $\vec{h}$ ולכן $\vec{v}$
קובעים כיוון של הישר



$P(x_1, x_2) \in l$
 $\vec{QP} \parallel \vec{v}$
 לכן קיים מספר α :
 $\vec{QP} = \alpha \vec{v}$
 נניח באות t במקום α
 $\vec{QP} = t \vec{v}$

לשני ישרים יש אותו וקטור נורמלי $\vec{h}$
 $\Uparrow$ אם ורק אם
 הישרים מקבילים זה לזה

לשני ישרים יש אותו וקטור כיוון $\vec{v}$
 $\Uparrow$ אם ורק אם
 הישרים מקבילים זה לזה

$$\vec{QP} = t \vec{v}$$

$$[\vec{QP}] = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix}$$

$$[\vec{v}] = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$[t\vec{v}] = \begin{pmatrix} t\alpha \\ t\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\alpha \\ t\beta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

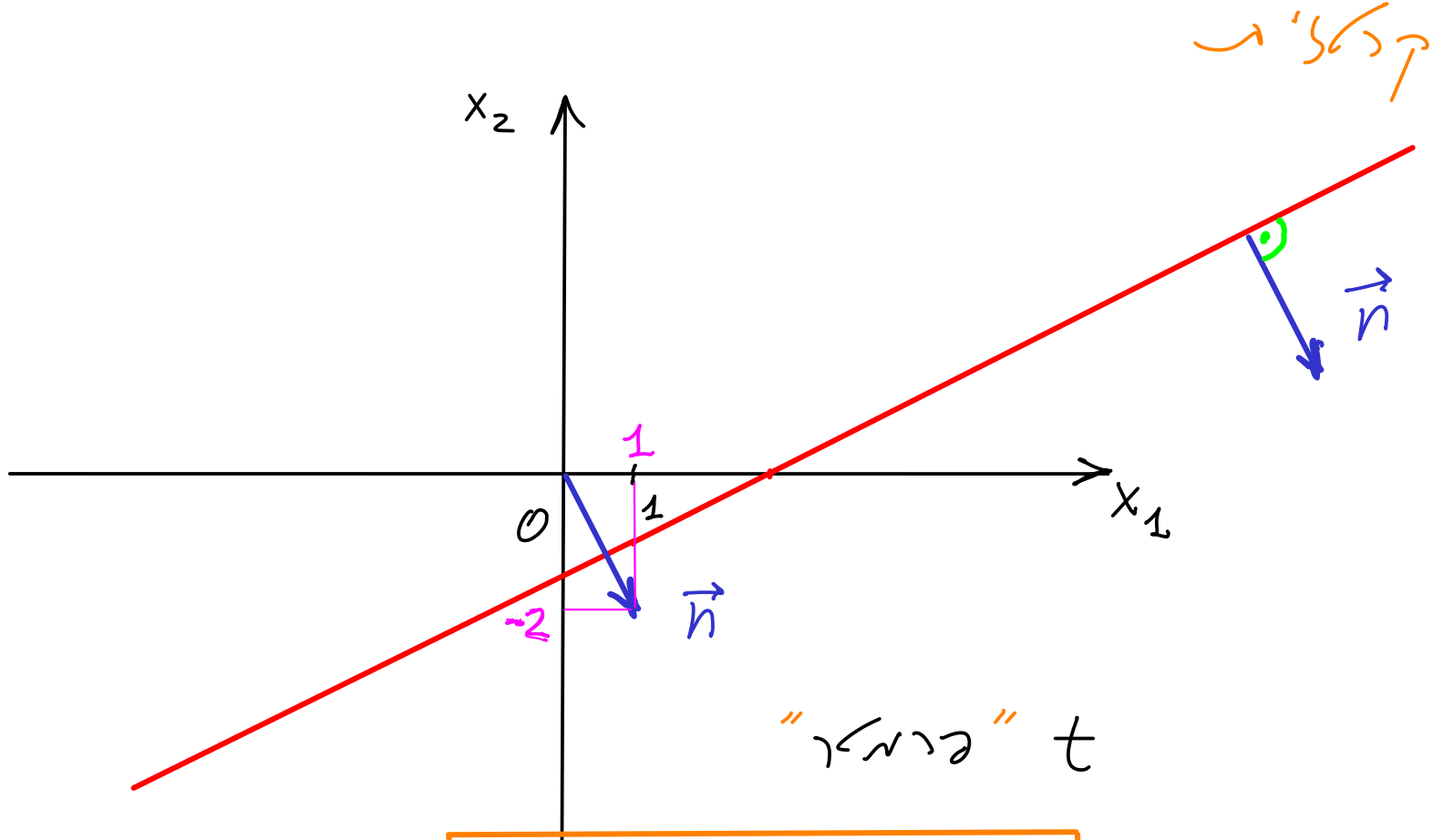
$$\begin{cases} x_1 - y_1 = t\alpha \\ x_2 - y_2 = t\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = t\alpha + y_1 \\ x_2 = t\beta + y_2 \end{cases}$$

כאן אנו רואים את $(x_1(t), x_2(t))$ כנקודה

הצגה כמעט של t :
2 בועות לזמן/ר"א של משתנה חילוני ("כמעט") t

$$\begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix}$$



→ '377 → 23 → $x_1 - 2x_2 = 3$

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = (1, -1)$$

$$P_5 = (-3, -3)$$

$$\vec{v} := \overrightarrow{P_1 P_5} = \begin{pmatrix} -3 - 1 \\ -3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{h}, \overrightarrow{P_1 P_5} \rangle = 1 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-2) = -4 + 4 = 0$$

? - 377 777

$$\begin{cases} \vec{v} = \overrightarrow{P_1 P_5} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ Q = P_1 = (1, -1) \end{cases}$$

⇐

כל ערך של t מקבל Q

הוקטור $\vec{h}$ ונורמל $\vec{n}$ כיוון של h ונורמל n

$$\begin{cases} x_1 = -4t + 1 \\ x_2 = -2t - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = t\alpha + \gamma_1 \\ x_2 = t\beta + \gamma_2 \end{cases}$$

בצורה פרמטרית $x_1 - 2x_2 = 0$ 1

המשוואה הומוגנית $\Leftrightarrow$ עוברת 3 נקודות כוללית.

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

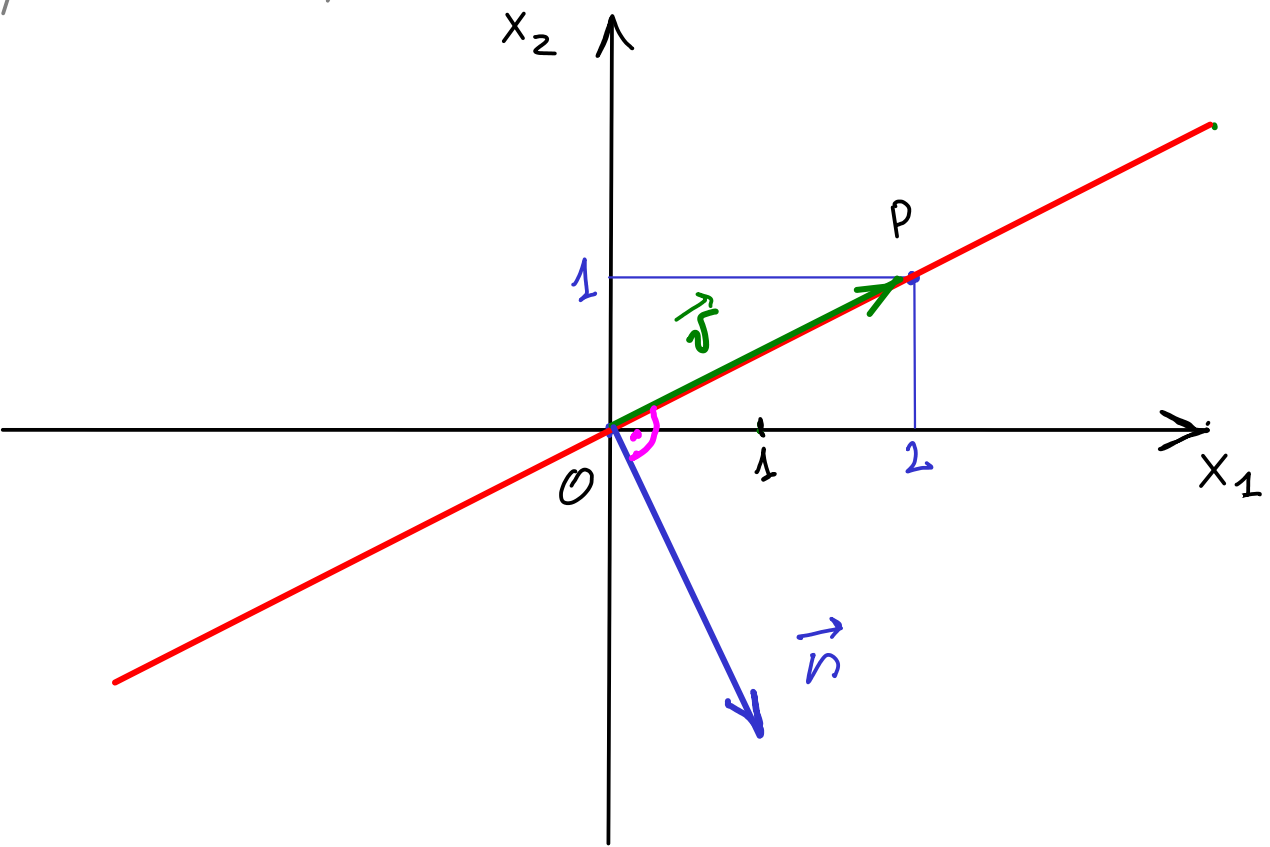
$$2 - 2 \cdot 1 = 2 - 2 = 0$$

נקודות $O(0,0), P(2,1)$ 1 נקודה
 וקטור כיוון $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{v}t = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$$

כ"ס / כ"ס 100 גרעין



$$\begin{cases} x_1(t) = 2t \\ x_2(t) = t \end{cases} \quad \text{צורה פרמטרית}$$

צדק 2 פיסר נגדן בצורה קרטזית, לכן יש וקטור נורמלי $\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

לכן $\vec{v}$ נגדן למצא נן בגש': $\vec{v} \perp \vec{h}$

נמצא אם $\vec{v}$ בצורה: $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$$\langle \vec{h}, \vec{v} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{h}, \vec{v} \rangle = 1 \cdot \alpha - 2\beta = 0$$

$$\alpha - 2\beta = 0$$

$$\alpha = 2, \beta = 1$$

לכן קואורדינטה $\vec{v}$ בן פונדונג $\vec{h}$ בהשאלה
מתבטל פונדון לאס ריוויטלי:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \vec{v} t \quad \text{גשגדי!}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$$

2

צורה פרמטרית: $x_1 + 5 = 0$

ה'שור מנקודה x_2 ,
כדי וקטור כ"ן - $\vec{j}$

$\vec{v} = \vec{j}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{i}$

ה'שור מנקודה $Q(-5, 0)$

$\vec{q} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

וקטור מנקודה Q הוא

$\vec{z}(t) = \vec{v}t + \vec{q}$

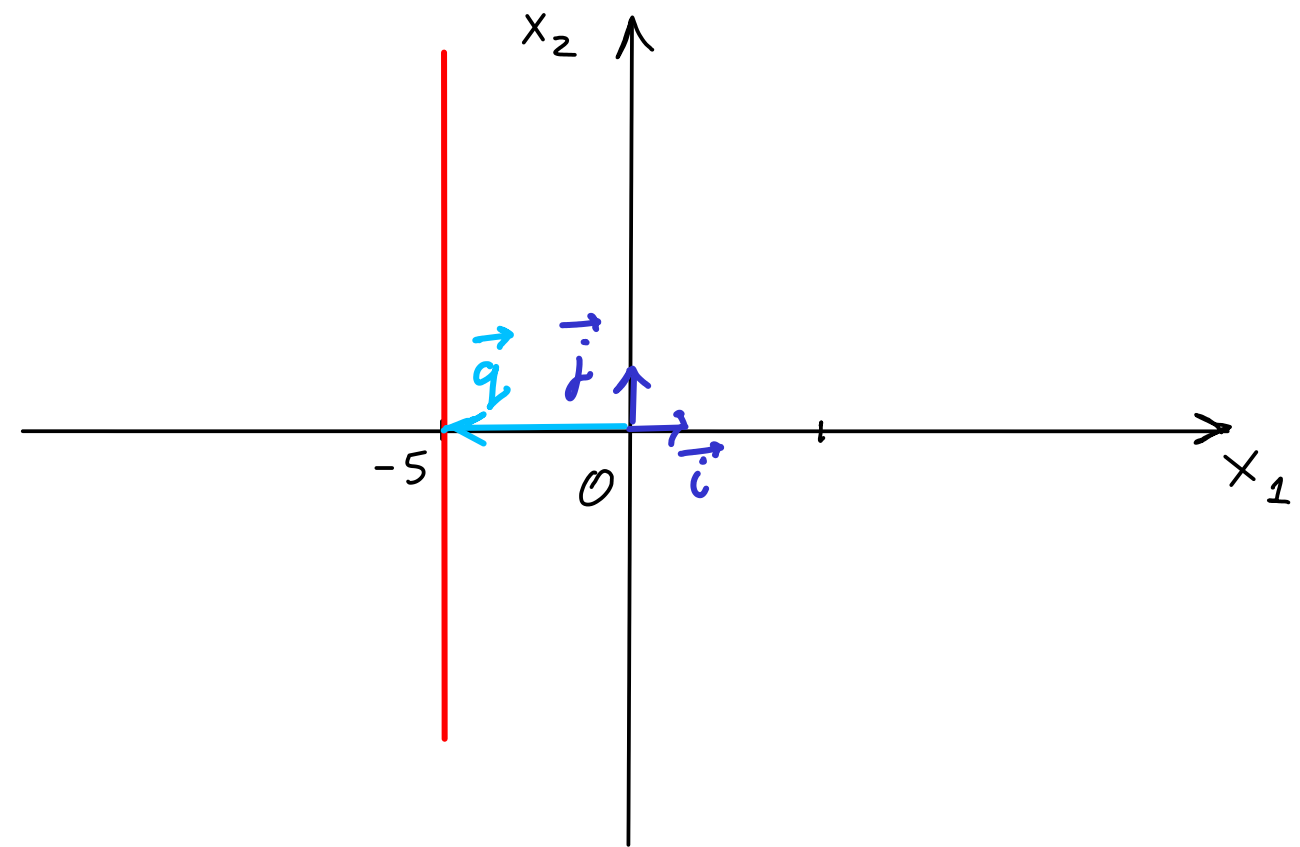
$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ t \end{pmatrix}$

תוצאה:

$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} -5 \\ t \end{pmatrix}$

תוצאה:

$\begin{cases} x_1(t) = -5 \\ x_2(t) = t \end{cases}$



$$a=1$$

$$b=-2$$

3] הישר העובר דרך נקודה $Q(-3,4)$
 המקביל לישר $X_1 - 2X_2 + 5 = 0$

תגובה בצורה קטגורית:

$$X_1 - 2X_2 = -11$$

1) בצורה קטגורית: $X_1 - 2X_2 = C$
 $C = -11 \Leftrightarrow -3 - 2 \cdot (4) = -11 \Leftrightarrow Q(-3,4)$ עובר '3

2) בצורה כנ"ל: $\vec{v} \perp \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
 $\vec{q} = \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\vec{z}(t) = \vec{v}t + \vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-3 \\ t+4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

תגובה בצורה כנ"ל:

$$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} 2t-3 \\ t+4 \end{pmatrix}$$

הצגת המערכת $\begin{pmatrix} 1+2t \\ 1-t \end{pmatrix}$

$\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

הוקטור t

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = 1+2t \\ x_2(t) = 1-t \end{cases}$: נורמל

הצגת המערכת t ו- 1

$x_1 - 1 = 2 - 2x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = x_1 - 1 \\ 2t = 2 - 2x_2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2t = x_1 - 1 \\ t = 1 - x_2 \end{cases}$

$x_1 + 2x_2 = 3$: נורמל $\Leftrightarrow$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \langle \vec{n}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$: נורמל

הצגת המערכת $\vec{n}$: 3 ו- 2

$1+2 \cdot 1 = 3$

הוקטור $\vec{n}$ הוא נורמל למישור $x_1 + 2x_2 = 3$: $(1, 2)$: Q

$x_1 + 2x_2 = c$
 $c = 3 \Leftrightarrow$

5] הישר העובר דרך הנק' $(-3, 4)$ במקביל לישר

$$\vec{v}_1 \begin{cases} x_1(t) = 3 + t \\ x_2(t) = 4 - 7t \end{cases}$$

(1) את הצורה קראו: למצוא: $\vec{v}_2 = \vec{v}_1$
 $\vec{x}_2(t) = \vec{v}_2 t + \vec{q}_2$, $\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ לכן

$$\vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

תשובה (בהצגה פרמטרית):

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t-3 \\ -7t+4 \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{cases} x_1(t) = t-3 \\ x_2(t) = -7t+4 \end{cases}$$

(2) כדי לרשום משוואה לישר, צריך למצוא וקטור נורמלי, שהוא מאונך (אורתוגונלי) לוקטור $\vec{v}_2$:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\langle \vec{h}, \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

לכן ניתן לרשום $7x_1 + x_2 = C$. נקודה על הישר, לכן $C = 7 \cdot (-3) + 4 = -17$

תשובה (בהצגה קרטזית):

$$7x_1 + x_2 = -17$$

תמצאו את

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

6 ה'ישר העובר ד' הנק' $(-3, 4)$ המאונק ל'ישר

$$\begin{cases} x_1(t) = 3 + t \\ x_2(t) = 4 - 7t \end{cases}$$

נקטר כיוון ל'ישר הנגיון הט' $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

(1) את המשוואה (הצבה קראטי) ל'ישר המבוקש נחפש בצורה $ax_1 + bx_2 = c$, כאשר $\vec{h} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ וקטר נורמלי.

ה'ישר המבוקש מאונק ל'ישר הנתון $\Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{h}$. כפרט, אפשר לקחת $\vec{h} = \vec{v}$:

$$c = (-3) - 7 \cdot 4 = -31$$

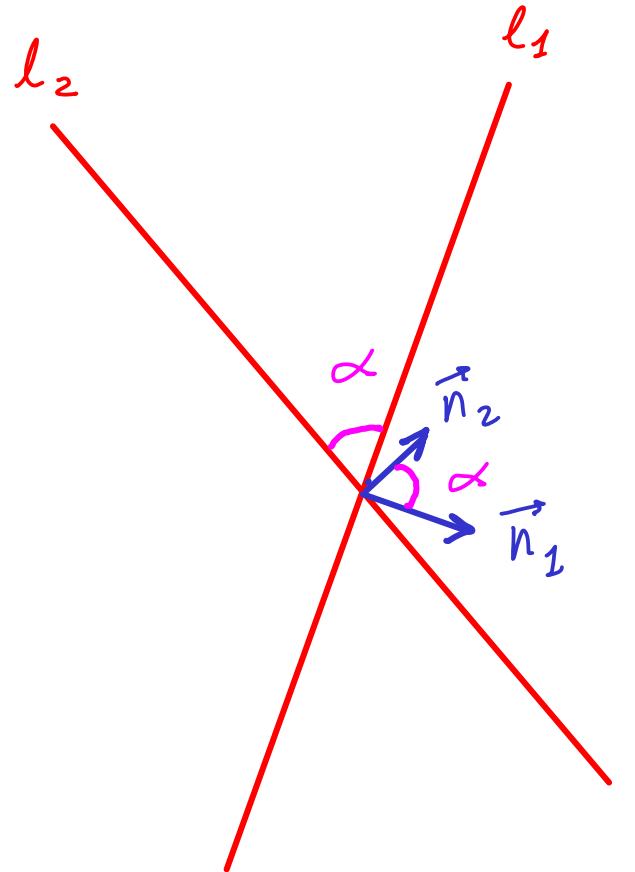
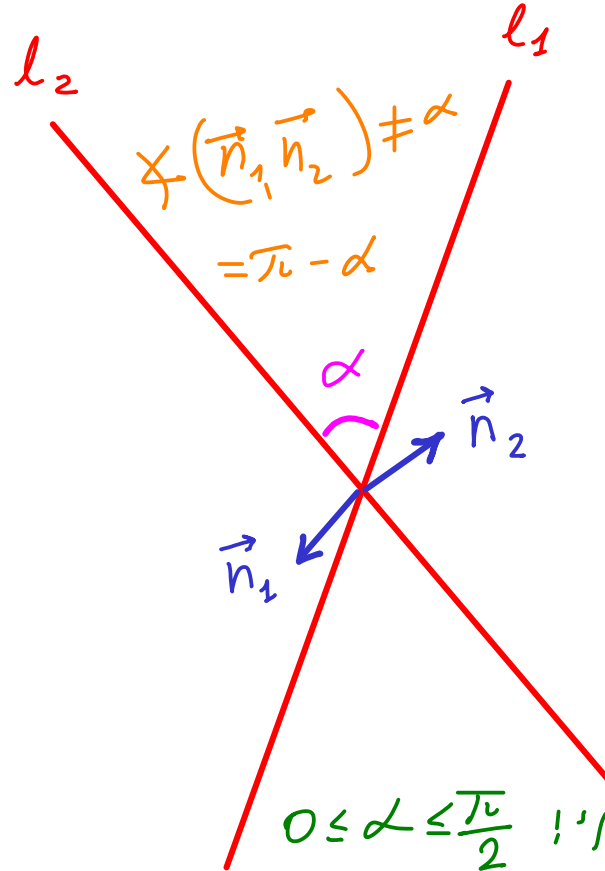
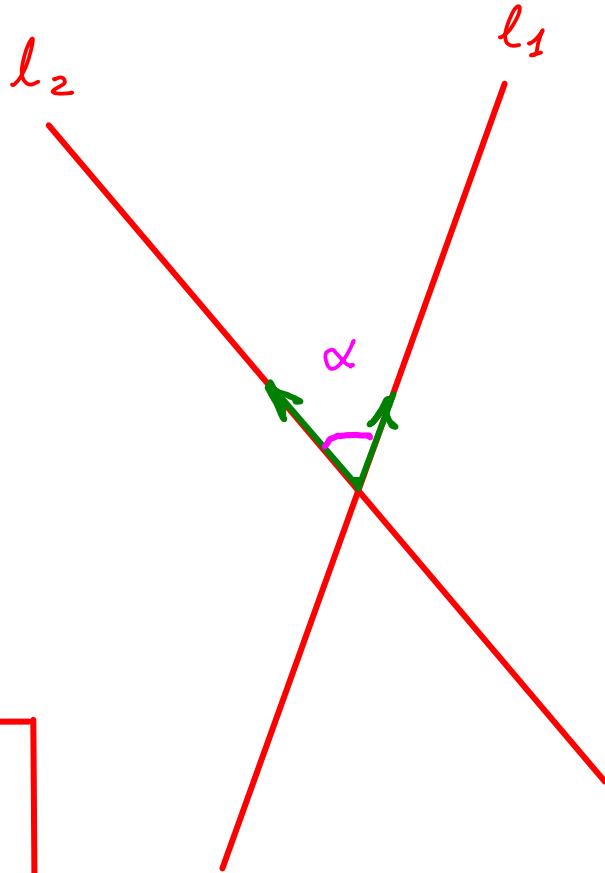
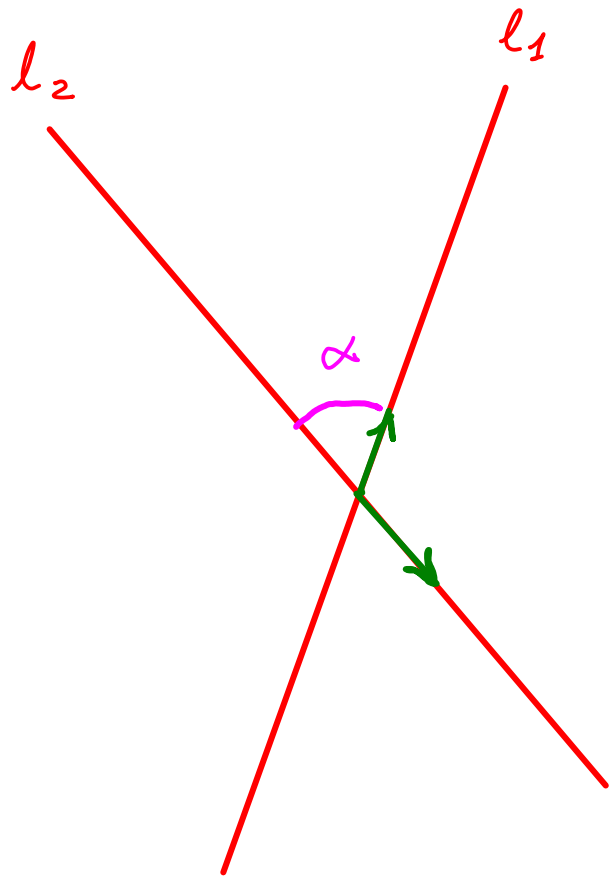
ה'ישר המבוקש עובר ד' נק' $Q(-3, 4)$ לכן

תשובה (בהצבה קראטי)

$$x_1 - 7x_2 = -31$$

הזווית בין שני ישרים

$\alpha = ?$



הזווית α היא הזווית בין שני ישרים
 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$! כלומר הזווית בין שני ישרים
 $\cos \alpha > 0$!

הזווית בין שני ישרים

$$\cos \alpha = \frac{|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle|}{\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|}$$

$$\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2+t \end{pmatrix}$$

סעיף 3 / חלק 15 / כ"ס / חלק 3

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle|}{\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|} = \frac{|(-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2}} =$$

$$= \frac{|-3|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

נכון:

$$\underline{2x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 - 3x_2 = 2 \quad \text{משוואות / כו' / 3 נ}} \quad \text{משוואות / כו' / 3 נ}$$

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\cos \angle = \frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3)|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\cos \angle = \frac{\sqrt{2}}{10} \quad \text{התוצאה}$$

$$x_1 + x_2 + 3 = 0, \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1-t \end{pmatrix} \quad \text{שם ה' / כ' / 15 / 3N}$$

צריך לבדוק את הישרים האלה הזוג.

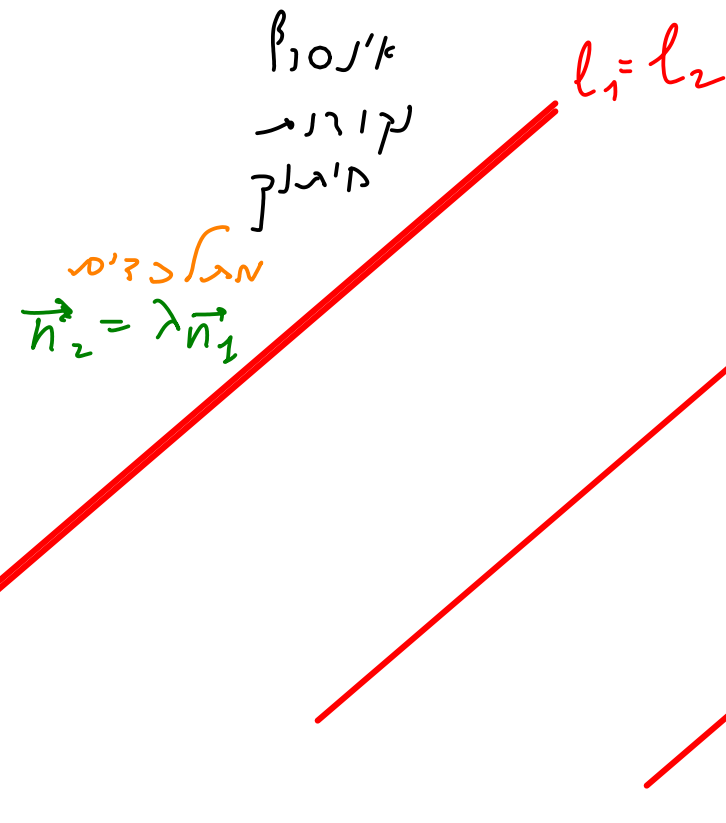
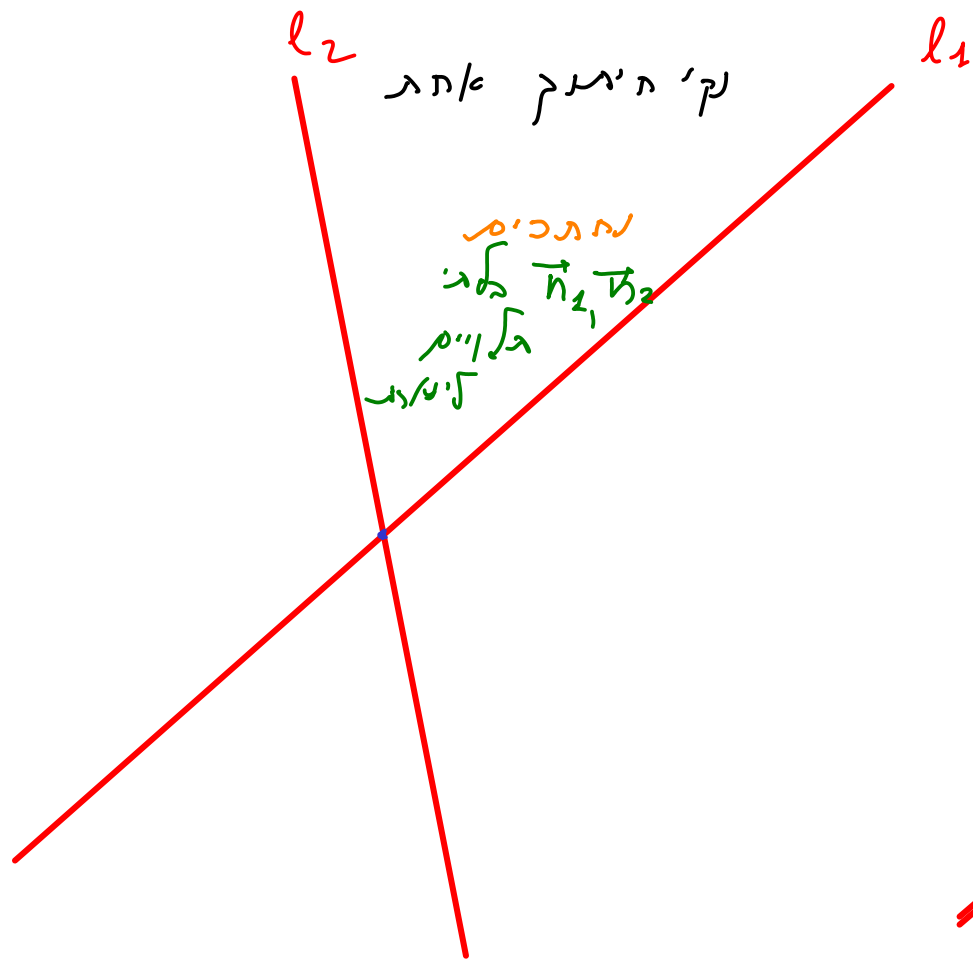
$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_2 \perp \vec{v}_1 \\ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1)$$

$$\cos \alpha = \frac{|\langle \vec{n}_2, \vec{n}_2 \rangle|}{\|\vec{n}_2\| \cdot \|\vec{n}_2\|} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

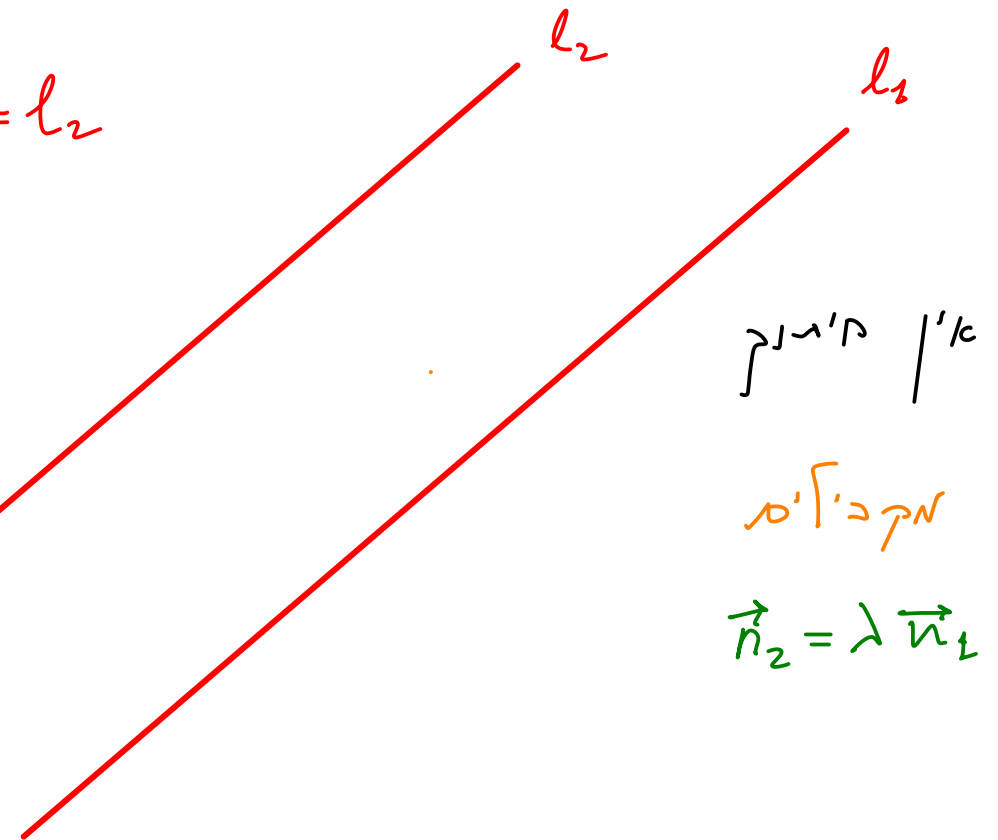
$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

תגובה!



0, 1, ∞



3 אפשרויות לכל מספר חיתוך:

$$l_2: 2x_1 + x_2 - 1 = 0$$

$$l_1: x_1 - 3x_2 - 2 = 0 \quad ? \quad \text{נקודת חיתוך} \quad \boxed{1}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

כל נקודה חיתוך = גיון (x_1, x_2) למעלה

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$x_1 = 3x_2 + 2 = -\frac{15}{7} + 2 = -\frac{1}{7}$$

$$x_2 = -\frac{5}{7}$$

$$\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1 \quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \end{pmatrix}$$

$$\left(-\frac{1}{7}, -\frac{5}{7} \right)$$

תשובה: אישור ו' נק' חיתוך סתם :

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \neq \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{נקודת חיתוך}$$

$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-3}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = 1$$

$$\frac{b_2}{b_1} = 1$$

ניתן להראות שאיננו נק' חיתוך סתם כי צ'ונן נגזר וגדל זהם
 הוכחה: $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow$ תיכ: $\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$ וסלס מקרה גליל:

2

מקומו תימוך - ? $l_1: 4x_1 + 2x_2 - 2 = 0$

$$l_2: 2x_1 + x_2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

משוואות גורמות

תשובה: ה'ש'ים מ'ל'כ'ים.

$$\vec{n}_1 = 2\vec{n}_2$$

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$l_2: 2x_1 + x_2 - 1 = 0$$

$$l_2: 4x_1 + 2x_2 - 1 = 0 \quad ? \quad \text{עקביות תמידית} \quad \boxed{3.}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{ללא פתרון}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

תלכדו: ג'ע'ס בק'ל'ס

$$\vec{n}_1 = 2\vec{n}_2$$

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4

נקודת חיתוך - ? $l_1: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1-t \end{pmatrix}$ $l_2: x_1 + x_2 + 3 = 0$

נבדוק אם l_1 נמצא בקטע:

$$x_1 - 1 = 2(1 - x_2)$$

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$\begin{cases} 2t = x_1 - 1 \\ t = 1 - x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = 1 - t \end{cases}$$

נק' החיתוך = פתרון למערכת:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

$$x_2 = 6$$

$$x_1 = -x_2 - 3 = -9$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

$$(-9, 6)$$

תשובה: הישרים נחתכים בנק'

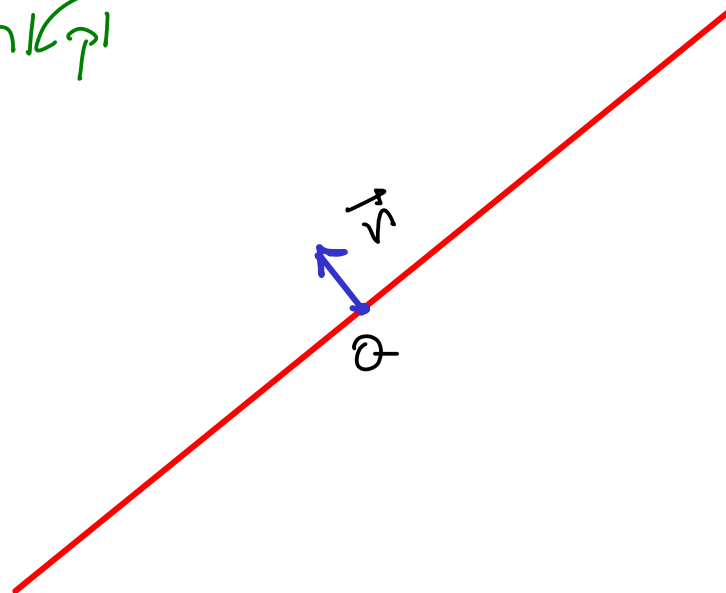
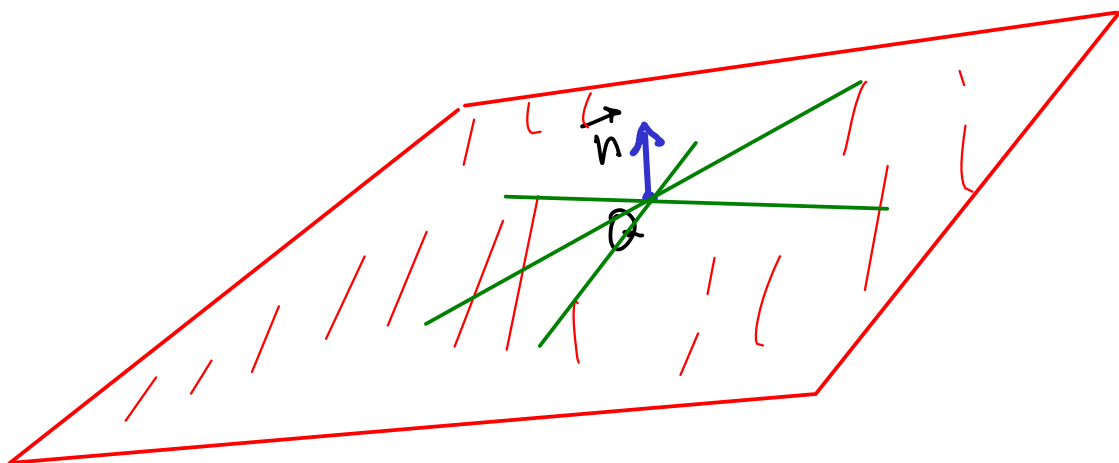
מישורים במרחב

במרחב E_3

במישור E_2

הצגה קולצ'י:

וקטור נורמלי = וקטור מאונך



$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

וקטור נורמלי

$$ax_1 + bx_2 = c$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

וקטור נורמלי

הצגת מרחב המטריצה E_3 -

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

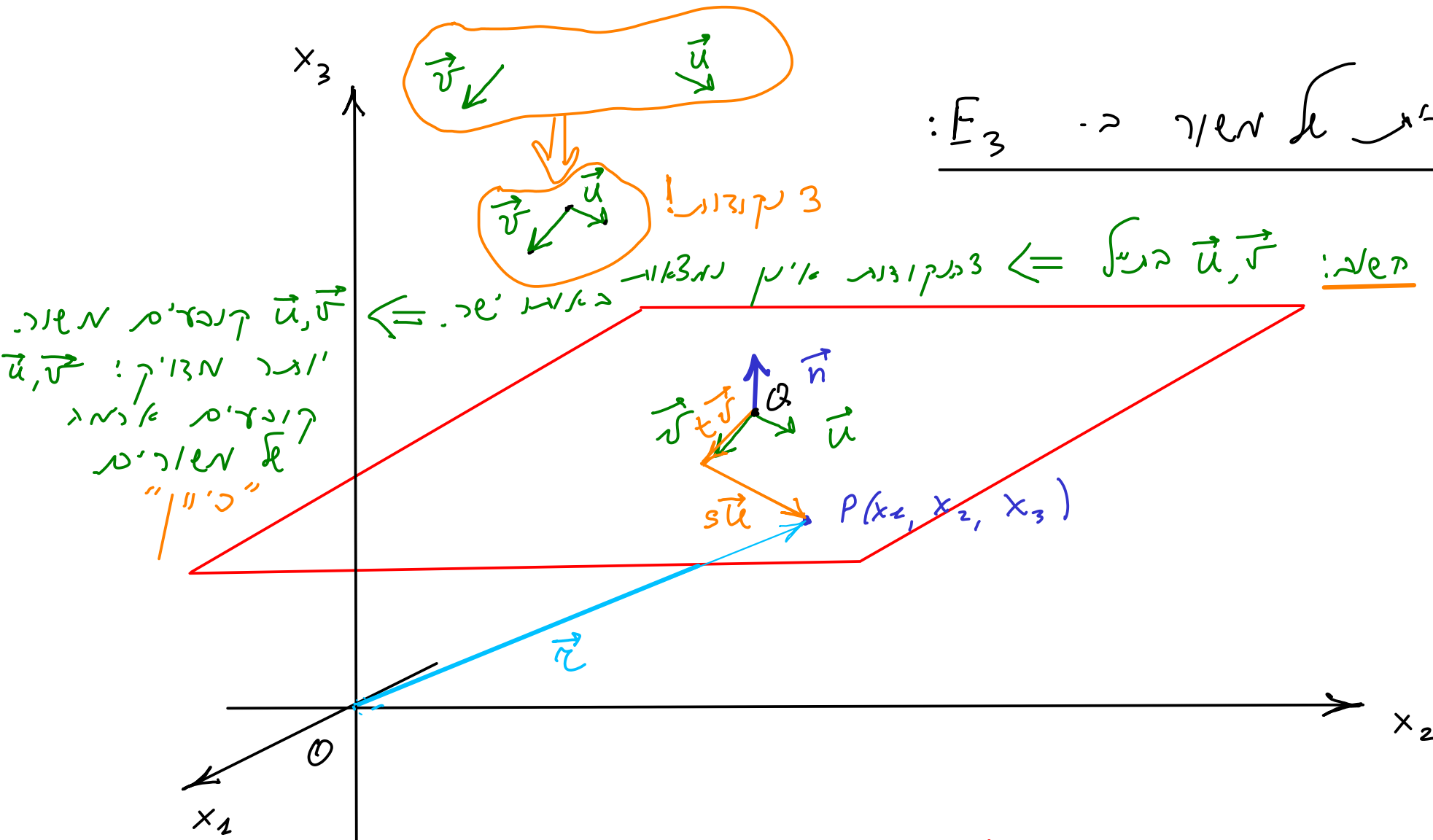
$$\vec{h} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

התקום של ρ על $\mathbb{R}^n$

$$\vec{r} = \vec{OP}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{q} \quad \begin{array}{l} \text{מיקום} \\ \text{נקודה} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{של} \\ \text{הקטע} \end{array}$$

$$\vec{z} = g + t \vec{v} + s \vec{u}$$

$$(\sigma', \gamma(\sigma, \theta)) \quad \sigma' \models \varphi \quad s, t$$


$$\vec{r}(s, t) = s \vec{u} + t \vec{v} + \vec{q}$$

? - מציאת x_1, x_2, x_3 $x_1 + 2x_2 - x_3 = -2$

$$-e p^0 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad p' e \partial \cap N \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \vec{n} \right\rangle = 0$$

$$\alpha + 2\beta - \gamma = 0$$

$$\gamma=1 \quad \Leftarrow \quad \alpha=1, \beta=0; \text{ mit } \lambda \geq 2$$

$$\gamma = 2 \iff \alpha = 0, \beta = 1$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{ps}$$

$Q(0,0,2)$ $x_1=0, x_2=0 \Rightarrow x_3=2$ $x_1+2x_2-x_3=-2$ $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 \dots$

הקצת $\vec{n}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\int \sqrt{2} \, d\Omega$

$\vec{h}$ מהירות הרוח
 $\vec{u}, \vec{v}$ - מהירות הרכב

עכ"ל כז' אינאם גלגל פרימאריא גאנצער,
 צייט 2 אקטאריס ברייט
 גאנצער גאנצער אינאם גאנצער

$$\gamma = \alpha + 2\beta$$

$1 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

כל ערך של s, t נותן נקודה
 על המישור.

$$s\vec{u} + t\vec{v} + \vec{q}$$

המשוואה היא קבוצה של נקודות:

$$\vec{z}(s, t) = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

תוצאה:

$$\begin{cases} x_1(s, t) = s \\ x_2(s, t) = t \\ x_3(s, t) = s + 2t + 2 \end{cases}$$

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$$

$\alpha \neq 0$
 $\beta \neq 0$ ייתכן

לכן $\vec{u}, \vec{v}$
 $\nparallel$

$\Rightarrow$

$$\alpha \neq 0$$

$$\vec{u} + \frac{\beta}{\alpha} \vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{v}$$

לכן $\vec{u}, \vec{v}$
 $\nparallel$

$$\vec{u} = \lambda \vec{v} \quad \text{ייתכן} \quad \vec{v} = \lambda \vec{u}$$

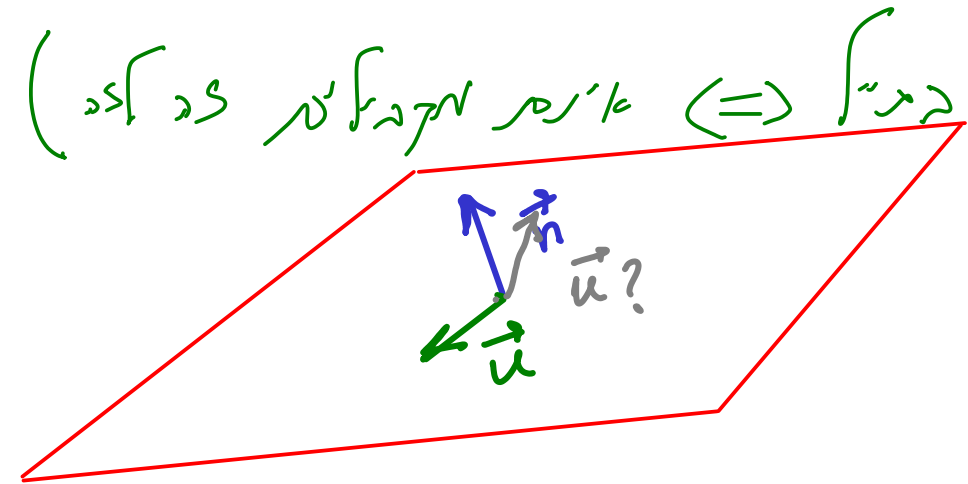
$$\left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} &\parallel \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \frac{-3}{1} &= \frac{6}{-2} \\ \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} &= -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

1 $x + 2y - z + 2 = 0$. β_N חזק כימיה

1 $\uparrow$ β_N

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ יוצאם כח

$\vec{u}, \vec{v} \perp \vec{n} \Leftrightarrow$ $\vec{u}, \vec{v}$ יוצאם כח $(1: \sqrt{3})$: $\vec{u}, \vec{v}$ $(1: \sqrt{3})$ $\vec{u}, \vec{v} \perp \vec{n}$ $\Rightarrow$ $\vec{u}, \vec{v}$ יוצאם כח $(1: \sqrt{3})$ $\vec{u}, \vec{v} \perp \vec{n}$ $\Rightarrow$ $\vec{u}, \vec{v}$ יוצאם כח $(1: \sqrt{3})$



$\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ $\langle \vec{n}, \vec{u} \rangle = 0$ $(1: \sqrt{3})$ $\vec{u}, \vec{v}$ $(1: \sqrt{3})$ $\vec{u}, \vec{v}$ $(1: \sqrt{3})$ $\vec{u}, \vec{v}$ $(1: \sqrt{3})$

$\vec{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{v} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\gamma = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1, \beta = 0$ $\gamma = 2 \Leftrightarrow \alpha = 0, \beta = 1$

$\alpha + 2\beta - \gamma = 0$ $\gamma = \alpha + 2\beta$

$$\vec{q} = \vec{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow Q = (0, 0, 2) \quad \text{נקודת} \quad \text{לא היומז'ית} \quad x + 2y - z + 2 = 0 \quad \text{משוואת הקו:}$$

הצגה כוונתית

$$\vec{r}(s, t) = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

כל זוג של s, t נותן (נקודת המיקום) של קווצה של המסלול.
 כל קווצה של המסלול נותן למצוא את הערכים של s, t בהתאמה.
 בעזרה: ניתן לרשום את המשוואה גלובלית:

$$\begin{cases} x(s, t) = s \\ y(s, t) = t \\ z(s, t) = s + 2t + 2 \end{cases}$$

דרגת 2:
 3 נקודות לא במסלול, נמצא שיתוף לאותו שית.

$$x + 2y - z + 2 = 0$$

$$S(0, -1, 0) \quad R(-2, 0, 0) \quad Q(0, 0, 2)$$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = (-\frac{1}{2}) \vec{QR}$
 $\vec{QR} = \begin{pmatrix} -2 & -0 \\ 0 & -0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{v} = (-1) \vec{QS}$
 $\vec{QS} = \begin{pmatrix} 0 & -0 \\ -1 & -0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

כנ"ל

$\vec{r}(s,t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
 : זהו 2

נמצא את המישור

$Q(3,0,0)$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

נ"כ

$a, b, c, d = ?$

$ax + by + cz = d$

נ"כ

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
 נמצא את המישור

$\vec{a} \perp \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3a + 2c = 0 \\ 3a + 4b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle \vec{u}, \vec{n} \rangle = 0 \\ \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{2}{3}c \\ b = -\frac{1}{2}c \end{cases}$$

$$c = 6$$

$$a = 4$$

$$b = -3$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$4x - 3y + 6z = d$$

$$d = 12$$

$$\Leftarrow 4 \cdot 3 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = d$$

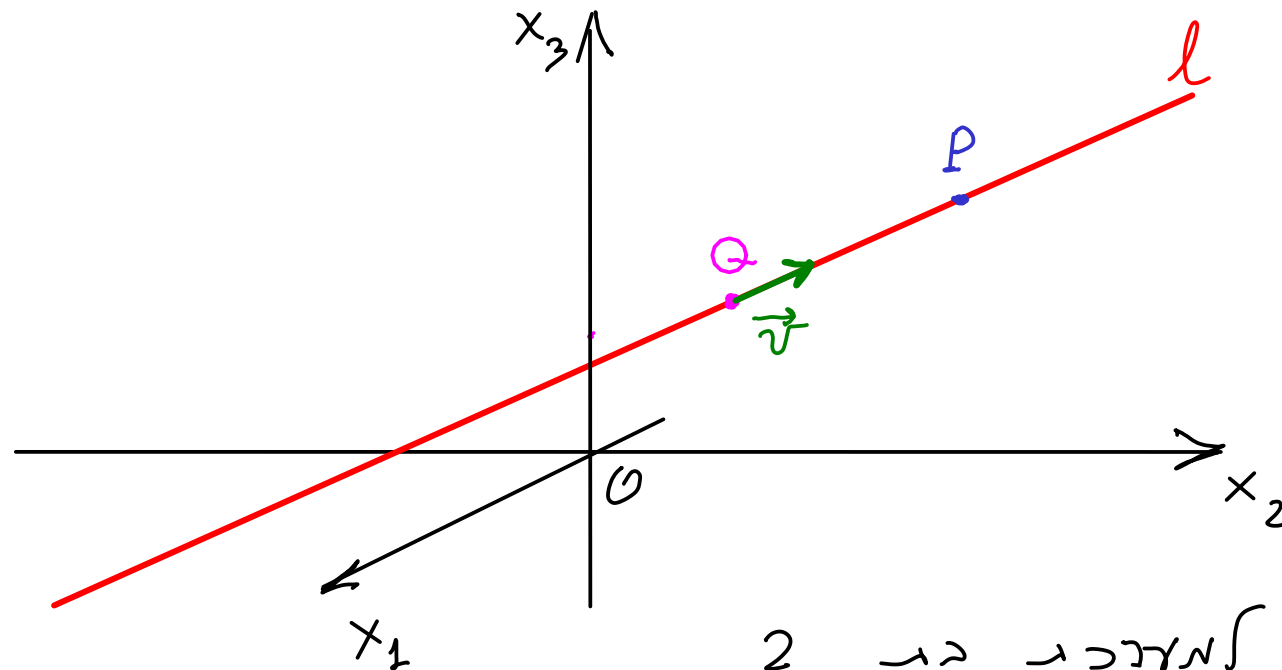
הנקודה הנמצאת ב-Q(3,0,0)

$$4x - 3y + 6z = 12 \quad \underline{\text{המשוואה}}$$

ישרים במרחב

$$\vec{r}(t) = \vec{v}t + \vec{q}$$

הצגה פרמטרית — זווית קטנה גומלין:



$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

!!! נורמל

קבץ

מבט רחב:
 ישר = חתך של 2 משוואות
 שאלות מקבילים זה לזה

לכוננים קבוצת ישר כגון נורמל למרחב 2
 משוואות ליניאריות

בהמשך $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ בג"ל

$$\begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = d_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \end{cases}$$

הצגה
קואסי-
רע

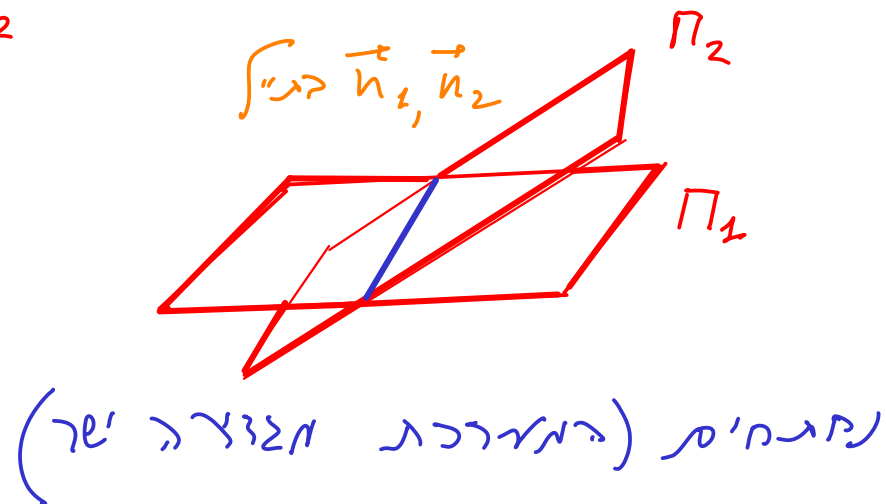
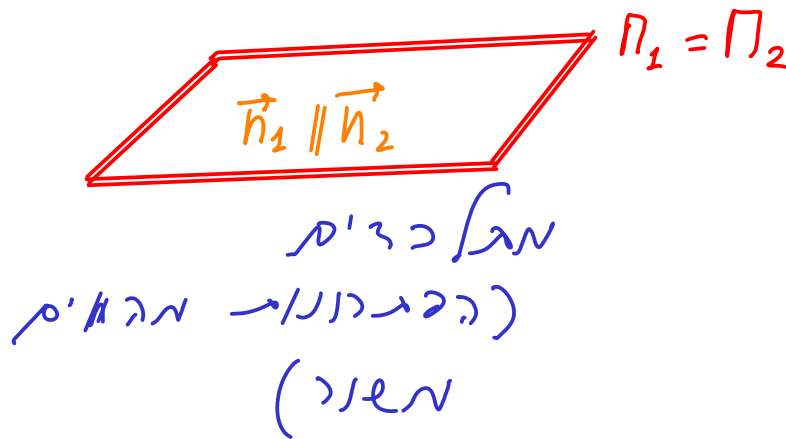
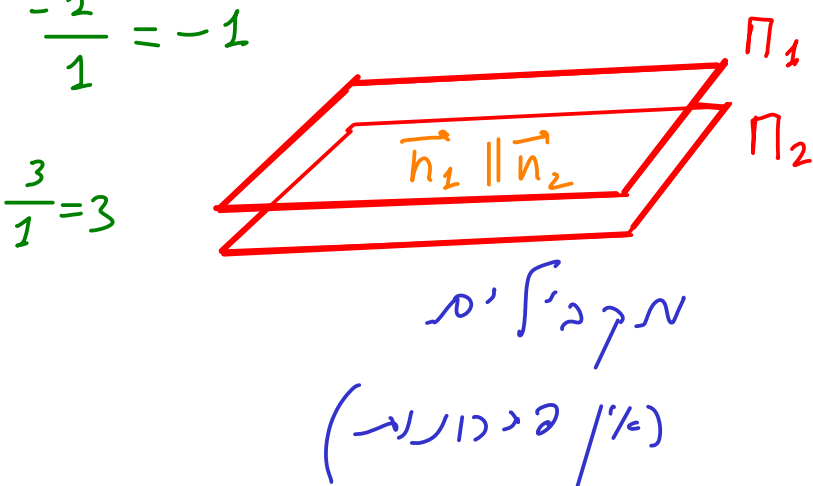
זה חיתוך של 2 מישורים. קבץ האם החיתוך הוא ישר? ולא משוואה קבוצה.
נ"ק ה).

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

3

נ"ק 1: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, נבדוק $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ - בג"ל:

$\frac{1}{1} = 1$ $\frac{-1}{1} = -1$ $\frac{3}{1} = 3$ $-1 \neq 1 \Rightarrow \vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$



$\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2 \Rightarrow$ המישורים נמצאים ישר.

זרן 2: קבוצת מספרים פרימיטיביים שכוללת את כל הפרימיטיבים. $\{x+y+z=2, x-y+3z=0\}$

כדי לזרז מספר פרימיטיבים, צריכים לזרז את המשוואות בצורה מזורזת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & -1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -2 & 2 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

במילים אחרות, הצורה המצולצלת של 2 משוואות:

ניתן לקבוע את z כרצוננו
 (אפשר גם y):

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ y-z=1 \end{cases}$$

אין צורך
 בשלב הזה!

$$x=1-2t \iff y=t+1 \iff z=t$$

כנראה אחר $\iff$ זה ישר.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

המשוואה
 איננה שיש כאן 2 משוואות.

מספר משוואות
 בצורה מצולצלת
 $3-2=1$
 מספר הפרמיטיבים = כמות יש פרמיטיבי תופשי אחר

לכן מספר הפרמיטיבים שווה:

! חזרה פה יש

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2t \\ t+1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t \vec{v} + \vec{q}$$

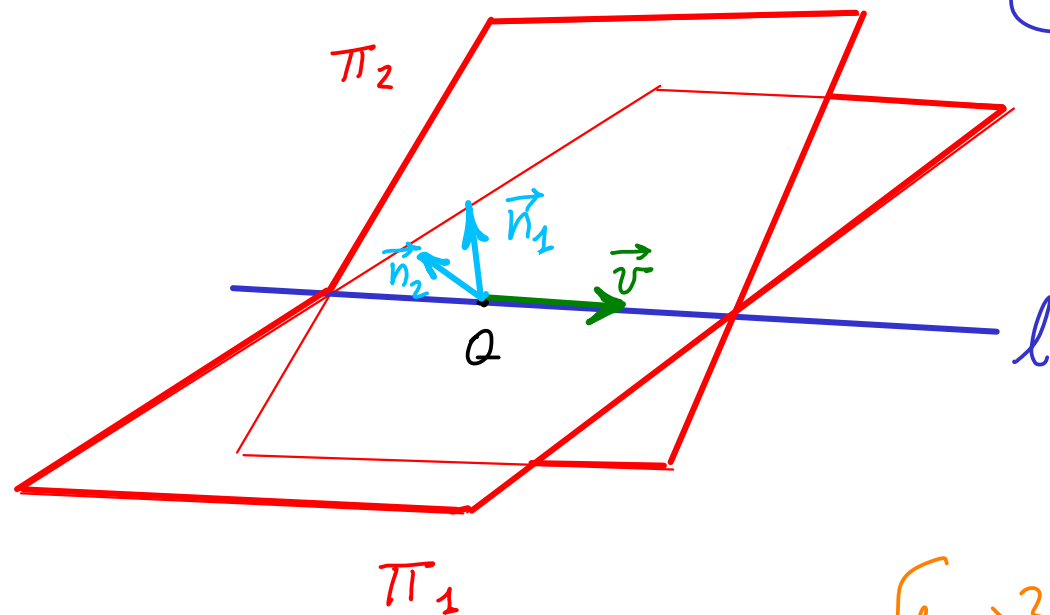
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Q(1,1,0)$$

נתון ישר שצוהר דרך נק' $Q(1,0,-1)$ ומקביל לוקטור $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$
 מצא המצבה קוטצ'ג של הישר.

צורה פונקציונל של הישר: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
 וקטור התקומם של Q : $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



הנורמלים צהנר $\vec{n}_1, \vec{n}_2$:

$\vec{n}_1, \vec{n}_2 \perp \vec{v}$ (כ)
 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ בהתל

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{n}, \vec{v} \rangle = 0$$

$$2a + 2b - c = 0$$

$$c = 2(a + b)$$

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3 נורמלים (a, b, c)
 למשוואה 1
 2 פדיונר (תופעים)

התבונן על
 פגיונות למשוואה
 במלך תלוי בשני פדיונרים:
 $3 - 1 = 2$

$$\begin{aligned} 1 - 2 &= d_1 \\ 0 - 2 &= d_2 \end{aligned}$$

ה'ער חלקי זיך $Q(1, 0, -1)$

$$\begin{cases} x + 2z = d_1 \\ y + 2z = d_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2z = -1 \\ y + 2z = -2 \end{cases}$$

תע/תע:

המרחב ההצדדי בין שני 'שרים

1

נק' חיתוך, l_1, l_2 מרחבים

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ בסיס

2

א'נסוב קווי $l_1 = l_2$ מרחב חד-ממדי

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ בסיס

3

א'ין חיתוך מרחב בלתי-ממדי

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ בסיס

4 אפשרות אחרת מספר קווי חיתוך:



מקרה כבישי: רצף

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ בגל

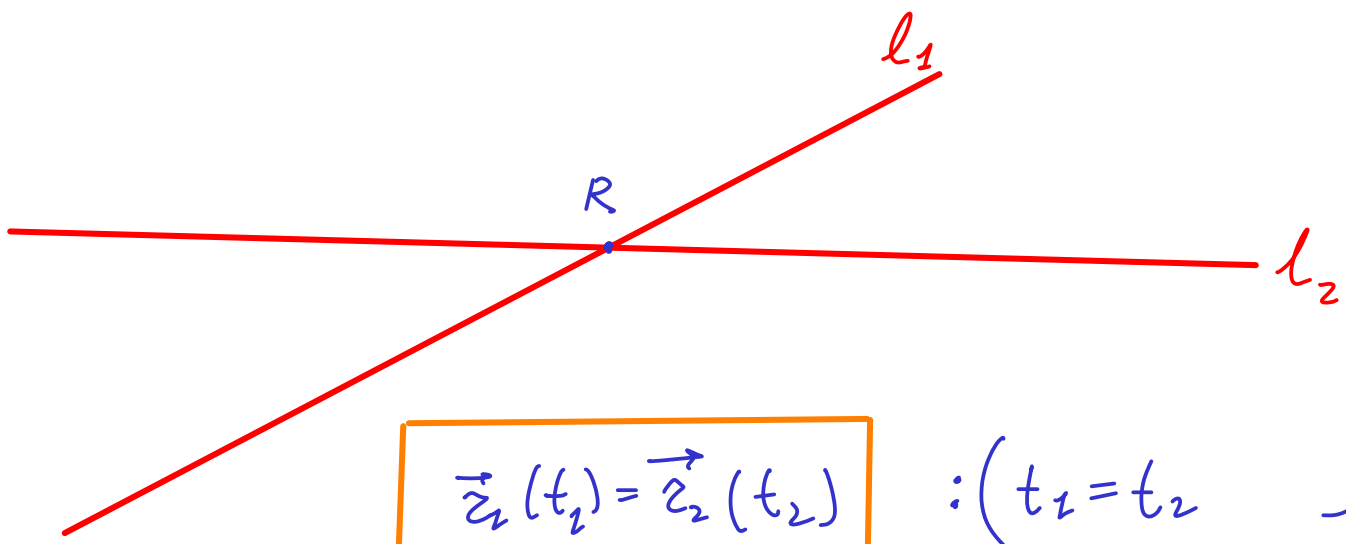


האם הישרים $\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$ ו- $\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ נחתכים?

אם כן, מה הנקודה ביניהם?

נחפש נקודה תיחוק (= הנקודה המשותפת לשני ישרים) : t_0 קיים מספר t_0 :

$\vec{r}_1(t_0) = \vec{r}_2(t_0)$ $\Leftrightarrow$ גורסה $\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)$ ג'תאג



נקודות משותפות ל l_1, l_2

נניח: $R \in l_1 \cap l_2$ קיים מספר t_0 ~~כי~~

~~$\vec{r}_1(t_0) = \vec{r}_2(t_0)$~~

$\vec{r}_1(t_1) = \vec{r}_2(t_2)$

$\Leftrightarrow R \in l_1 \cap l_2$ קיים מספר t_1, t_2 (יכול להיות) $t_1 = t_2$:

נסתכל בנקודה $\vec{r}_1(t_1) = \vec{r}_2(t_2)$ כמו למעלה עבור 2 נקודות t_1, t_2 :

3. n/k | 1 > 20 t' $\vec{z}_1(t) = \vec{z}_2(t)$ n/w/e N $\langle \Rightarrow \rangle$ n'w/n $\vec{z}_1(t), \vec{z}_2(t)$ n'w/n Coen

שני 2 נח 3 ב 1 = "נח 3 ב 1"

$$\vec{z}_1(t) = \vec{z}_1(1) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad : 1/2 \quad 1/2 \quad 1/3 \quad 1/5 \quad 1/7$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -45 \\ t+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 42 \\ -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2 \\ -8-4 \\ 4-(-8) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

נכנסים אל המל"ה בתורם אל גניסול/ה:

$$\begin{cases} -x = -4 & : \text{אנחנו צריכים את } x \text{ בלבד} \\ -4x = -12 \\ t + 2x = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -4 \\ 0 & -4 & -12 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$R_2 - 4R_1 \rightarrow R_2$$

מלך פגיון

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$

$$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$$

משקנה: ג' שר'ם א' א' חק ג' ש'ם א' א' (3) ג' ש'ם.

כפי הנדון: $\rightarrow$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ בסיס וליניאר אינדיפנדנט} \Leftrightarrow 1 \neq 0$$

תשובה: l_1, l_2 וליניאריים

? אולי $\vec{z}_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ -!

האם ג'יש'ם $\vec{z}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

אם כן, מה ג'יש'ם כמס?

(1) כמס $\vec{z}_1(t_1) = \vec{z}_2(t_2)$ - ג'יש'ם

כמס ג'יש'ם ג'יש'ם

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} t_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad \text{⚡}$$

$R_1 - R_3 \rightarrow R_1$
 $-\frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_3$

$R_2 - R_3 \rightarrow R_2$

$R_1 - R_2 \rightarrow R_1$

(2) $\vec{z}_1(t_1) = \vec{z}_2(t_2)$ - ג'יש'ם

ג'יש'ם $\vec{z}_1, \vec{z}_2$

$l_2: \begin{cases} x_2(t) = 2t + 1 \\ y_2(t) = 2 - t \\ z_2(t) = 4 - 2t \end{cases}$
 $l_1: \begin{cases} x_1(t) = 9 + t \\ y_1(t) = 5 + 3t \\ z_1(t) = -4 - t \end{cases}$

האם הם חוצים? , נמצא נקודה?

(1) נחגוג את המשוואות ונראה

$$\begin{cases} 2t_1 + 1 = 9 + t_2 \\ 2 - t_1 = 5 + 3t_2 \\ 4 - 2t_1 = -4 - t_2 \end{cases} \quad ?$$

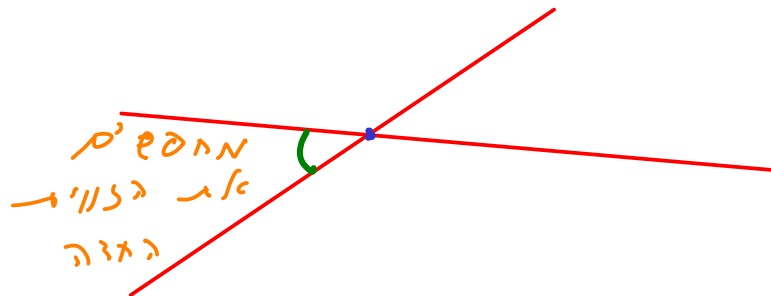
המערכת החדשה:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 8 \\ -1 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 8 \\ -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$R_3 + R_1 \rightarrow R_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -7 & 11 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{ל' 2. נ' 1.}$$

נמצא: l_1, l_2 נפגשים.



$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

α זווית בין שני וקטורים

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) = 1$$

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$$

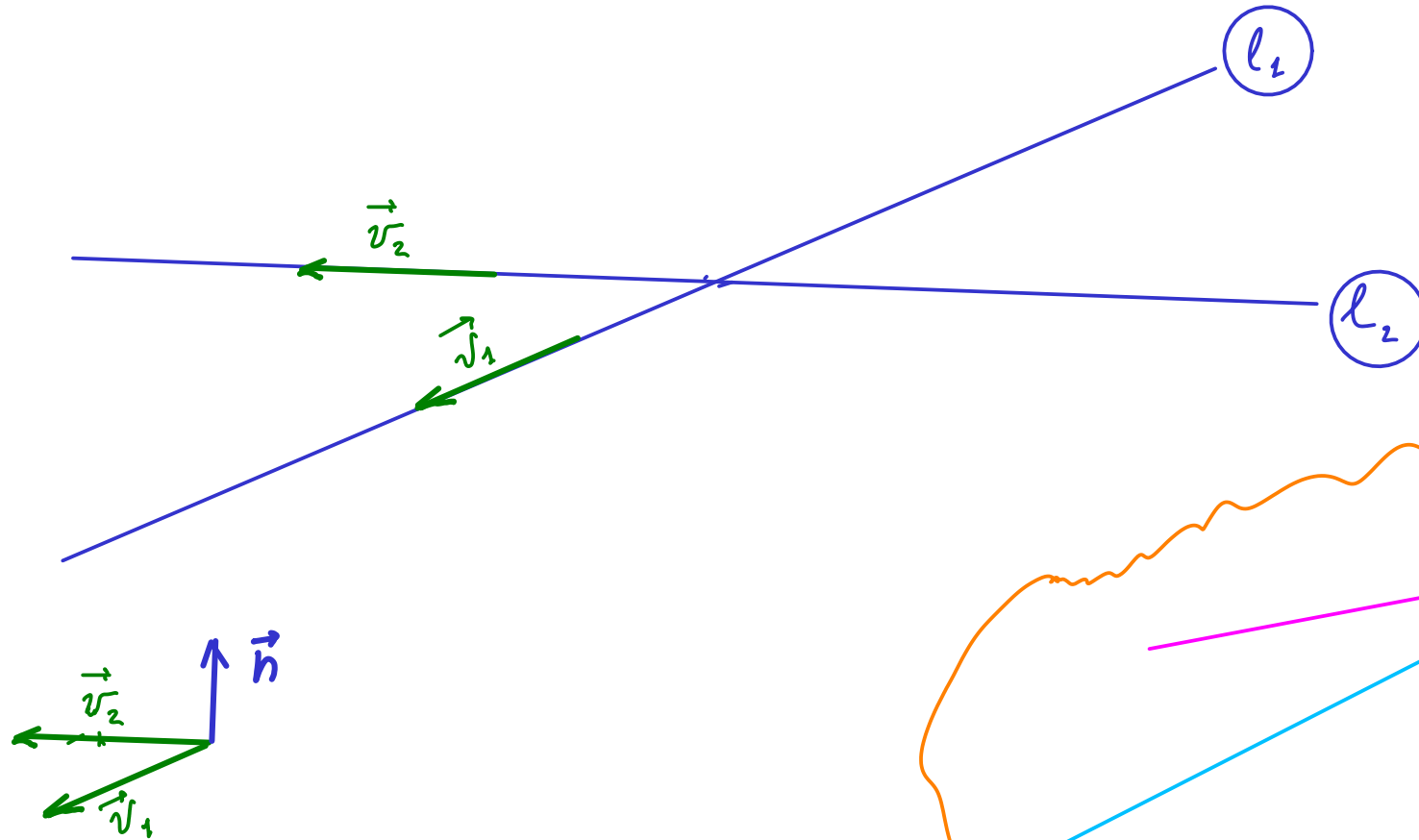
$$\cos \alpha = \frac{|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle|}{\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{3\sqrt{11}}$$

המרחק בין שני ישרים

N3 אג המרחק בין הישרים

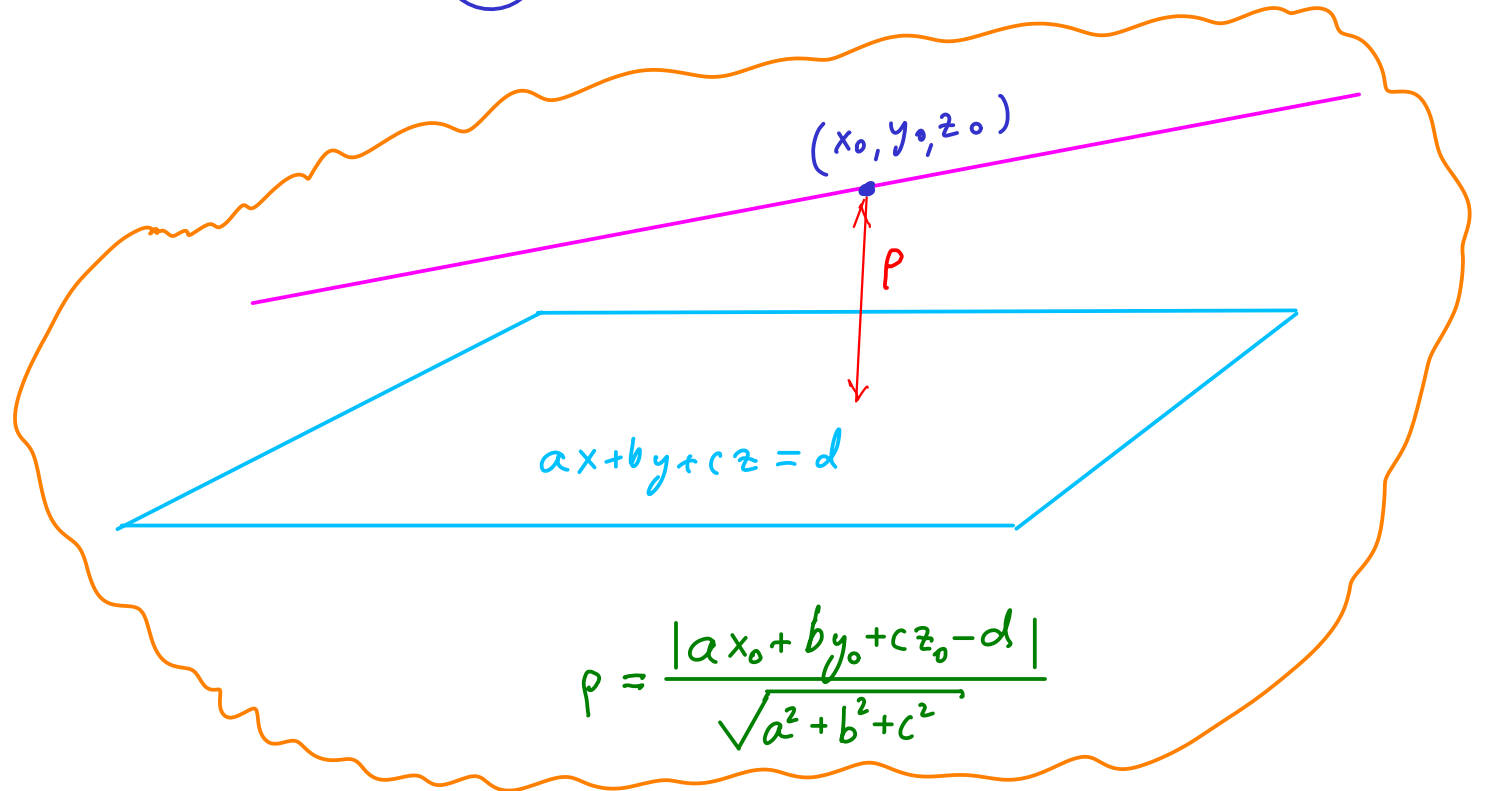
$$l_1: t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$l_2: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = z \end{cases}$$



$$\vec{n} \perp \vec{v}_1 \quad \vec{n} \perp \vec{v}_2$$

$$: \vec{n} \quad 1/\sqrt{3}$$



$$p = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$2x - y = -1$$

$$y - z = 0$$

: $\vec{v}_2$ נורמל ל-3N (1

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

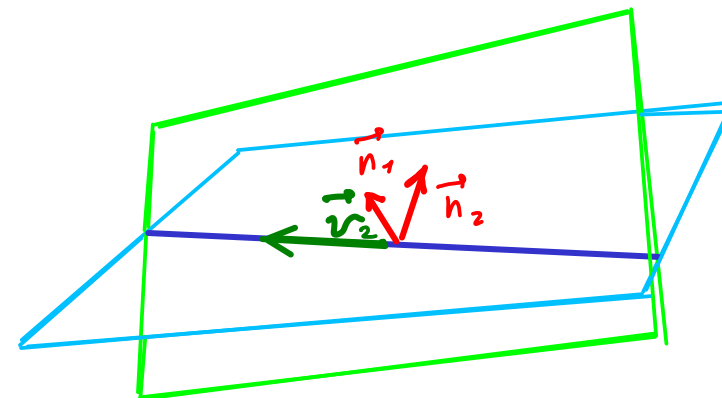
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

: γ ל-3' $\vec{v}_2$

$$l_1: t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$l_2: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &\perp \vec{n}_1 \\ \vec{v}_2 &\perp \vec{n}_2 \end{aligned} \quad \text{: נורמל ל-3N}$$



$$\begin{cases} \langle \vec{n}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0 \\ \langle \vec{n}_2, \vec{v}_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

נורמל ל-3N (כל וקטור) נורמל ל-3N

①

2 נורמל ל-3N : $\vec{v}_2$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \gamma = 2 \quad \Leftarrow \quad \alpha = 1$$

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad | \text{נורמל}$$

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \vec{i} \\ -1 & 1 & \vec{j} \\ 0 & -1 & \vec{k} \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

②

$$l_2: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = z \end{cases}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad |^{no}$$

$$\begin{cases} \langle \vec{v}_1, \vec{n} \rangle = 0 \\ \langle \vec{v}_2, \vec{n} \rangle = 0 \end{cases}$$

$$a=b=2 \quad \Leftarrow \quad c=-3$$

$$\begin{cases} a=b \\ 3a+2c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a+b+2c=0 \\ a+2b+2c=0 \end{cases}$$

$$2x+2y-3z=d$$

כך הן המישור

$$d=-1 \quad \Leftarrow \quad 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = -1$$

$$\Leftarrow (0, 1, 1)$$

נקודת אה המישור בק l_2 :

l_1, l_2 - שני המישורים הנחתים (2)

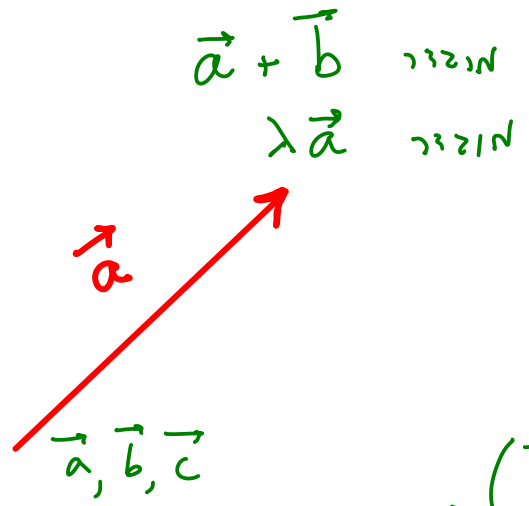
$$(0,0,0) \in \ell_1$$

$$\rho = \frac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

3) נמצא את המרחק:

מרחבים

לקראת



ד. מרחב'ס וקטורי'ס

מזכיר: $\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}$ וקטורי'ס, $\vec{a}, \vec{b}$ וקטורי'ס, λ ב'ק' י'י.
משפט
 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ מתקיים
 $\forall \vec{a}$
 $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

משפט לכל וקטורי'ס $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$
משפט קיים וקטור $\vec{0}$.

33. MY

משפט לכל וקטור $\vec{a}$ קיים וקטור $\vec{b}$:
 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$

כולם מסבכים

כולם וקטורי'ס

$(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$ מתקיים λ, μ סקלרי'ס וקטור $\vec{a}$ סבוכ

$\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$ מתקיים λ וקטור $\vec{a}, \vec{b}$ סבוכ סקלרי'ס

עבור כל וקטור $\vec{a}$ ועוד סקלרים λ, μ מתקיים $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$

יש 3 אופרטורים / פעולות, שמתוכם בה פעולות $+$, $\cdot$:

$\mathbb{R}^2 =$ הקבוצה של זוגות (עמודות) של מספרים :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$x + y := \begin{pmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda x = \lambda \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \xi_1 \\ \lambda \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

ליניאריות

תרגיל

$$x + y = y + x$$

1

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

2

$$x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x$$

$$\text{ז"ס } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ז"ס } \delta$$

3

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

4

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu y$$

5

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

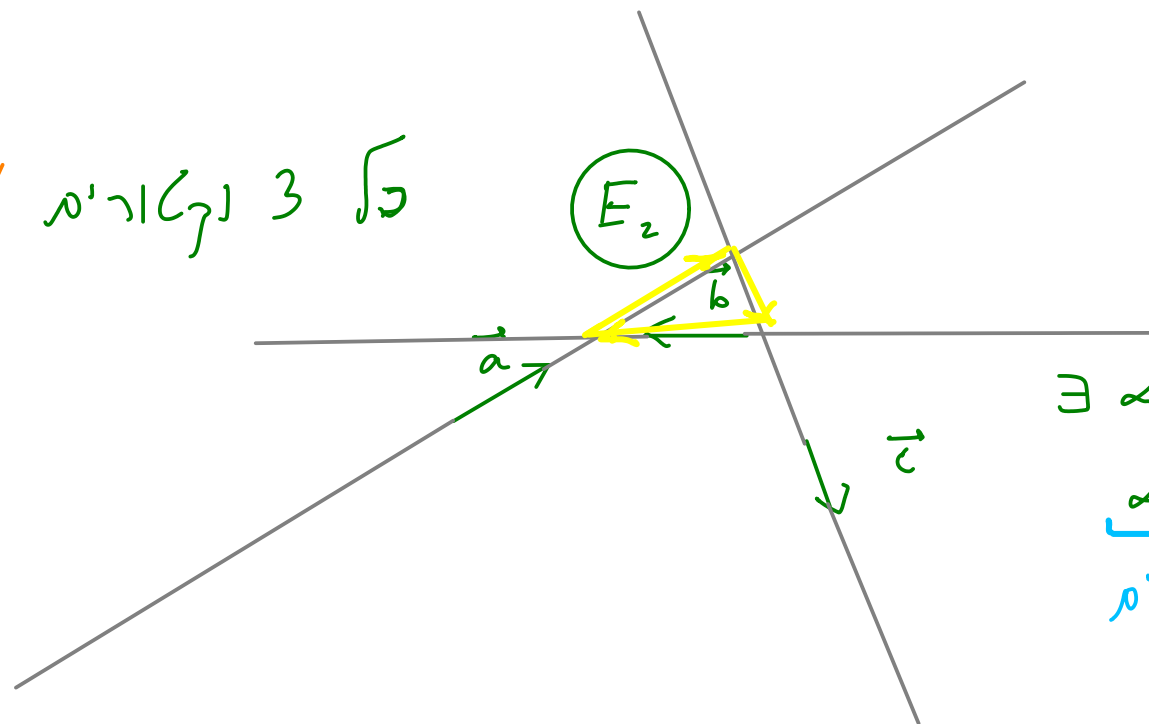
6

$$(\lambda \mu)x = \lambda(\mu x)$$

7

גרסאות:

כל 3 וקטורים "באנדר" ^{||}



$$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0}}$$

צירוף ליניארי



מרחב ג לקטורי מופט

$$x+y \in V \quad \text{כל } x, y \in V \quad \text{כל } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{כל } x \in V \quad \text{כל } \lambda x \in V$$

מרחב וקטרי: קבוצה V יחד עם 2 פעולות:

הפעולות $+$ ו- $\cdot$ מתאימות ל-8 תנאים הבאים:

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \quad (4)$$

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad (1)$$

$$(\lambda \mu)x = \lambda(\mu x) \quad (5)$$

$$1x = x \quad (n)$$

$$x+y = y+x \quad (*)$$

$$(x+y)+z = x+(y+z) \quad (2)$$

$$x \in V \quad \exists 0 \in V : x+0 = x \quad (6)$$

$$x \in V \quad \exists y \in V : x+y = 0 \quad (3)$$

וקטור = כל איבר במרחב וקטרי.

אקסיומות
של
מרחב וקטרי

כ"ס 3

$V = \mathbb{R}^2$ כל עתירות ב-2 מרחב;

הקבוצה $\mathbb{R}^2$ כל עתירות ב-2 מרחב:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1.5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$3 \notin \mathbb{R}$$

רשימת הקבוצות:

"קבוצה" = "סוסן זכרים"

E_2 משהו = קבוצה של מרחב

קבוצה של מסלול כנייה

הקבוצה $\mathbb{Z}$ של מספרים שלמים

הקבוצה של פתרונות המשוואה $x^2 - 3x + 2 = 0$

הקבוצה של כל וקטורים ב- E_2

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \end{pmatrix}$$

נצייר פחול ב "+"

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

שום קשר מלבד $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

נצייר פחול "כלל בסקלר"

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1.5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$S = \{1, 2\}$ בקבוצה בשל 2 חצי כ"ס

"ע"פ" $1 \in S$
"ע"פ" $0 \notin S$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_1 \\ \lambda \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
הקבוצה $\mathbb{R}$ מסלול משהו

כלל בלתי תלוי

$$x, y \in \mathbb{R}^2 \quad \text{iff} \quad x + y = y + x \quad \textcircled{k}$$

$$x + y = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 + \alpha_1 \\ \beta_2 + \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = y + x$$

$$x + y = y + x \quad \text{upon}$$

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

$$x, y, z \in \mathbb{R}^2 \quad \text{iff} \quad (x + y) + z = x + (y + z) \quad \textcircled{?}$$

$$(x + y) + z = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_1 + \beta_1) + \gamma_1 \\ (\alpha_2 + \beta_2) + \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1) \\ \alpha_2 + (\beta_2 + \gamma_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 + \gamma_1 \\ \beta_2 + \gamma_2 \end{pmatrix} = x + \left[\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \right] = x + (y + z)$$

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{upon}$$

"0 ו/ו 3111"

$$0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \underline{\text{0 ו/ו 3111}} \quad (2)$$

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 0 \\ \alpha_2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = X$$

$$\mathbb{R}^2 \times \int \int X + 0 = X \quad \text{יגדלן}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad X + Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$X + Y = 0 \quad \text{y} \quad \int \int X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(2) - (1) ו/ו 3111

$$\lambda (X + Y) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda (\alpha_1 + \beta_1) \\ \lambda (\alpha_2 + \beta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_1 + \lambda \beta_1 \\ \lambda \alpha_2 + \lambda \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$X, Y \in \mathbb{R}^2 \quad (4)$$

$$\lambda x + \lambda y = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_1 \\ \lambda \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \beta_1 \\ \lambda \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_1 + \lambda \beta_1 \\ \lambda \alpha_2 + \lambda \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \quad \text{; נכון}$$

דוגמה ⑤, ①

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \quad x(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 \quad \text{פולינום} \quad ||$$

$(\text{אנדרגראד 2}) : t$ נמצא ב פולינום $\in V$

$$(t-1)^2, \quad 3t+8, \quad 3t^2-11t+5 \in V \quad \text{בסיס} \quad t^0, t, t^2$$

$$\text{פולינום} \quad 3t+8, \quad -4t^2 - \frac{16}{3}t + 3$$

$$x(t) = (t-1)^2, \quad y(t) = 3t^2 - 11t + 5$$

$$x(t) + y(t) = ?$$

$: V$ בסיס $+$ פולינום

$$x(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2$$

$$y(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2$$

$$\begin{aligned} x+y &= (t-1)^2 + 3t^2 - 11t + 5 = \\ &= \underline{t^2} - \underline{2t} + \underline{1} + \underline{3t^2} - \underline{11t} + \underline{5} = 4t^2 - 13t + 6 \in V \end{aligned}$$

56

$$\begin{aligned} (x+y)(t) &:= \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2 = \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2)t + (\alpha_3 + \beta_3)t^2 \end{aligned}$$

שני פתרונות λx

$$x(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda x)(t) := (\lambda \alpha_1) + (\lambda \alpha_2) t + (\lambda \alpha_3) t^2$$

תרגיל: (16) - (17) מתקיימים.

סימן λ חתום : $\lambda > 0$

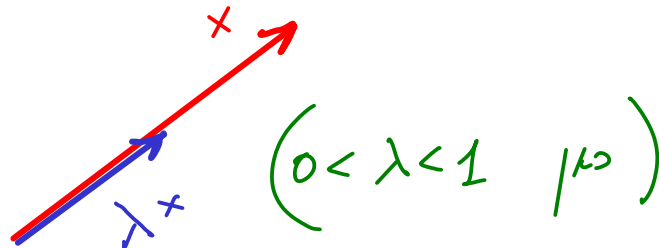
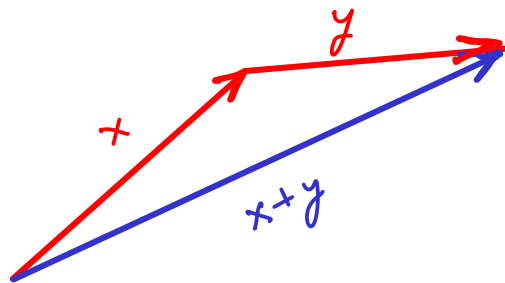
$\mathbb{R}_2[t]$ = פולינומים של t ממעלה ≤ 2
 $\mathbb{R}_2[t]$

$$x(t) = (3t + 8)^2$$

$$\lambda = -3$$

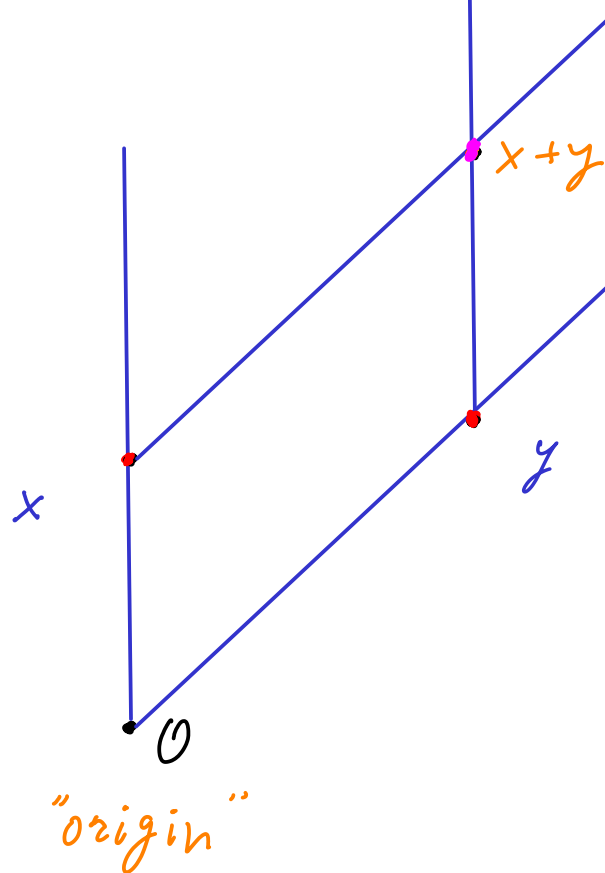
$$(\lambda x)(t) = -27t^2 - 144t - 196 \in V$$

3 נקטו'ם E_2 - כ (המשול)



$(0 < \lambda < 1 \text{ כן})$

"0 זיג מקביליג"



$$x, y \in E_2$$

$$x+y = ?$$

$$(E_2, 0) \text{ שגב וקטורי}$$

|| המישור E_2 עם קוויז $0 \in E_2$
 E_2 לבגז $\mathbb{R}^2$ מיתג וקטורי.

ניגן לבסוף E_2 לאותג וקטורי
 עי" קבוצה "מקוצר כאלגור"

מסקנה:

תכונות ליניאריות

V במרחב וקטורי

צירוף ליניארי של וקטורים $x_1, \dots, x_k \in V$ עם מקדמים $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

צירוף ליניארי - עם וקטור.

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k$$

כמו כן, זה וקטור 0

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_k$$

צירוף ליניארי טריוויאלי:

וקטורים $x_1, \dots, x_k$ תלויים ליניארית אם קיים צירוף ליניארי לא טריוויאלי: $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k = 0$

מחד, גם k תלויים ליניארית
גם $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ תלויים

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$? \text{ מהו } x, y, z \text{ גלויים } \int \text{ ו/או } \lambda, \mu, \nu \text{ ?} \quad z = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0 \quad : \lambda, \mu, \nu \quad \text{במילים אחרות: מהו } \lambda, \mu, \nu \text{ שיהיה } \lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

$$\lambda x + \mu y + \nu z = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu + 3\nu \\ -2\lambda - \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

הבעיה היא שיש לנו 2 משוואות ו-3 נעלמים. הוא/היא/הם לא יתנו תשובה.

האנדרגט הוא 3.

מה עושים?!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{פירוק בסיס}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = -2\mu - 3\nu \\ \mu = -\frac{5}{4}\nu \\ \nu = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = -10 + 12 = 2 \\ \mu = 5 \end{array}$$

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 10 - 12 \\ -4 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. תוצאה

$$x, y \in V$$

$$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

$$\text{מכיל את } V$$

6

$$3 - 8 = -5$$

$$x + y$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

$$x = 3$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{3}{2} \notin V$$

כפול אינו מוגדר

$$x + y = y + x$$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$x + 0 = x$$

$$x + y = 0 \quad ; y = -x$$

$$V \text{ אינו מוגדר}$$

$$V = \{0\}$$

7

$$V \ni x + y$$

$$x + 0 = x$$

$$x + y = y + x$$

$$V \text{ אינו מוגדר}$$

$$y + 1 = 0$$

$$x = 1 \quad ; y \in V$$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$V = \mathbb{R}^2$ מרחב וקטורי על חזיון בגובה 2 מרחב.

$$x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} : \text{גבולות}$$

נהיה, הנה x_1, x_2 גבולות ליניאריים: (ישר)

3 כיוונים סגורים $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$?

$$\lambda_2 x_2 = \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda_2 \\ 6\lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 x_1 = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ 4\lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ 4\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda_2 \\ 6\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 4\lambda_1 + 6\lambda_2 \end{pmatrix} \stackrel{\uparrow}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

גבולות

הצגנו 3 מרחב λ_1, λ_2 מרחב 2 מרחב ליניאריים בגובה 2 מרחב:

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 4\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

שבת

כדי לקבל משלוח אסא, צריך להביא את מסיכת המערכת לצד ה. מוצג:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן יש פתרון $\lambda_1 = 3$
 ופתרון $\lambda_2 = 0$
 לכן x_1, x_2 בלתי תלויים ליניארית. כת"ל

9

$V = \mathbb{R}^2$ מרחב וקטורי על ממד 2 עם בסיס

בסיס: $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

שאלה: האם ניתן לבטא y כצירוף ליניארי של x_1, x_2 ?

כן $y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$

כלומר למצוא λ_1, λ_2 כאלו:

ניתן לבטא y כצירוף ליניארי של x_1, x_2 אם ורק אם y שייך למרחב $\text{span}\{x_1, x_2\}$

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 2 \\ 4\lambda_1 + 6\lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 18 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$R_2 + 4R_1 \rightarrow R_2$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1 = 3\lambda_2 - 2 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$$

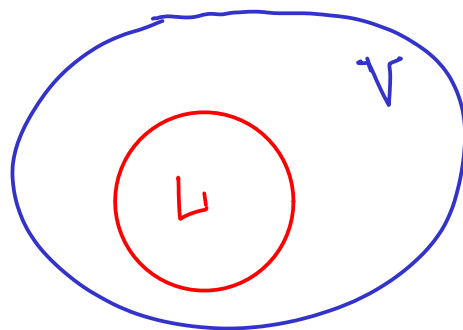
תשובה: $y = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$

$$-\frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_2 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \\ -2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{בז'אן גאנצער:}$$

תת מרחב וקטורי

V מרחב וקטורי

||
תת קבוצה (קבוצה חלקית) L של V נקראת תת מרחב וקטורי
אם L מרחב וקטורי.



$$L \subseteq V$$

שמונה האקסיומות מתקיימות, כי הן מתקיימות

$$(L, +, \cdot)$$

$x+y \in L$: אכן אמתנו יוצאים: $x+y \in V$

$$\Leftarrow x, y \in L$$

הבדיקה השנייה:

$\lambda x \in L$: אכן מתקיים? $\lambda x \in V$

$$\Leftarrow \lambda \in \mathbb{R}, x \in L$$

משפט בתת-חבור V של V קטאלי V

$$\left(\begin{array}{l} \text{סגור תחת } L \\ \text{גורם זכר } L \\ \lambda x \in L \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{סגור תחת } L \\ \text{גורם זכר } L \\ x+y \in L \end{array} \right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x, y \in L \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

הוכחה: סגור תחת $+$, $\cdot$ - L - אגם סגור תחת V

לכן יתן מק"מ"א $|$ אקס'אומה $(a) - (b)$.

פ.ל.נ

? $\forall$ $\mathbb{R}$ L $\mathbb{R}^2$ $L = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ -\xi \end{pmatrix} \mid \xi \in \mathbb{R} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \in L \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin L$$

סגור L תחת סכום

$$x+y \in L \iff x,y \in L \quad \textcircled{k} \text{ : } \underline{\text{פ"ב}}$$

סגור L תחת כפל בסקלר.

$$\lambda x \in L \iff \begin{cases} x \in L \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

$$x+y = \begin{pmatrix} \xi+\eta \\ -\xi-\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi+\eta \\ -(\xi+\eta) \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \begin{pmatrix} \xi \\ -\xi \end{pmatrix} \iff x \in L \quad \textcircled{k} \\ y = \begin{pmatrix} \eta \\ -\eta \end{pmatrix} \iff y \in L \quad \textcircled{2} \end{cases}$$

תשובה: L תת-מרחב $\mathbb{R}^2$

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda \xi \\ -\lambda \xi \end{pmatrix} \in L \iff \begin{pmatrix} \xi \\ -\xi \end{pmatrix} = x \in L \quad \textcircled{2} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in L$
? האם L היא תת-חלל
 $L := \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \xi+1 \end{pmatrix} \mid \xi \in \mathbb{R} \right\}$
 $V = \mathbb{R}^2$
(11)

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin L$

Ⓢ: + - וסגור תחת חיבור

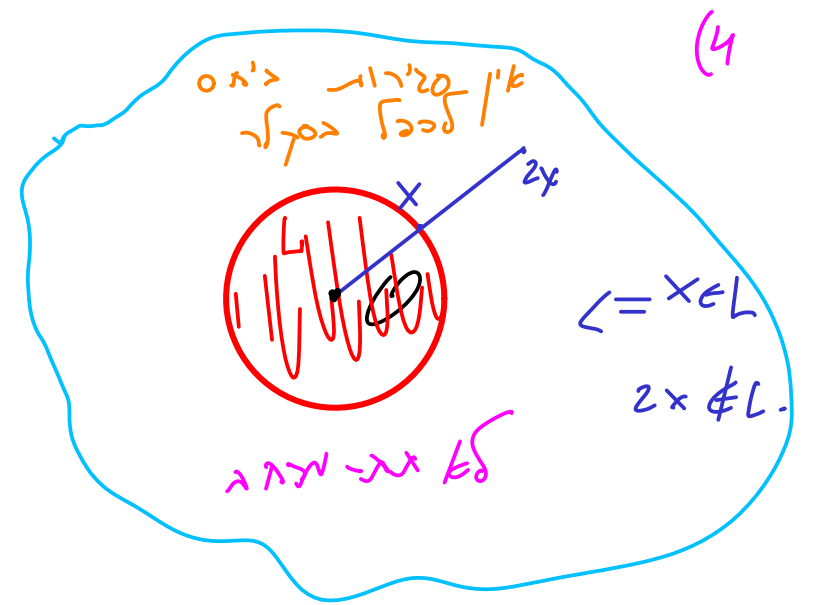
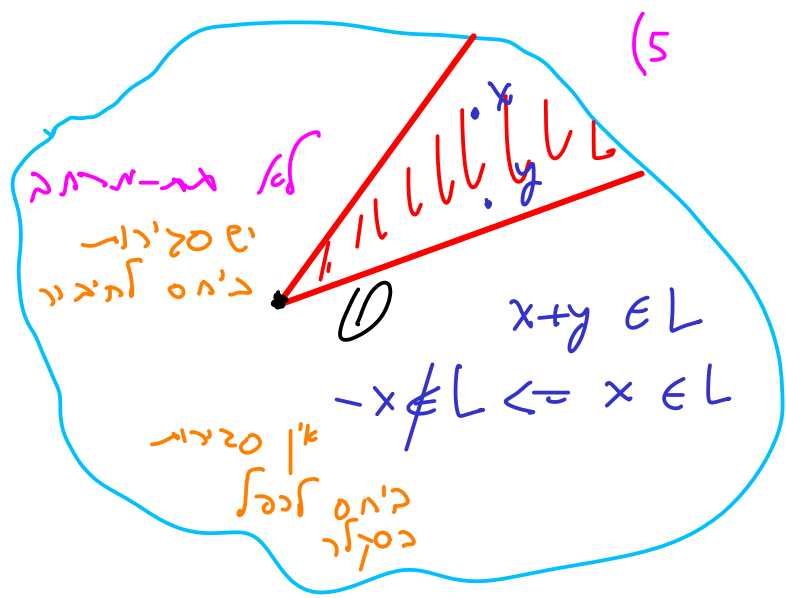
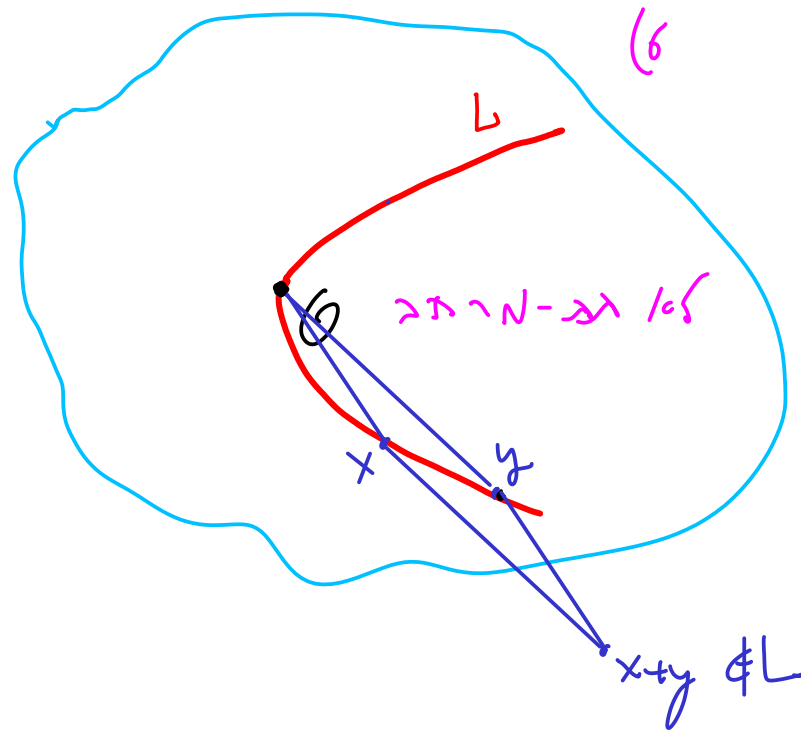
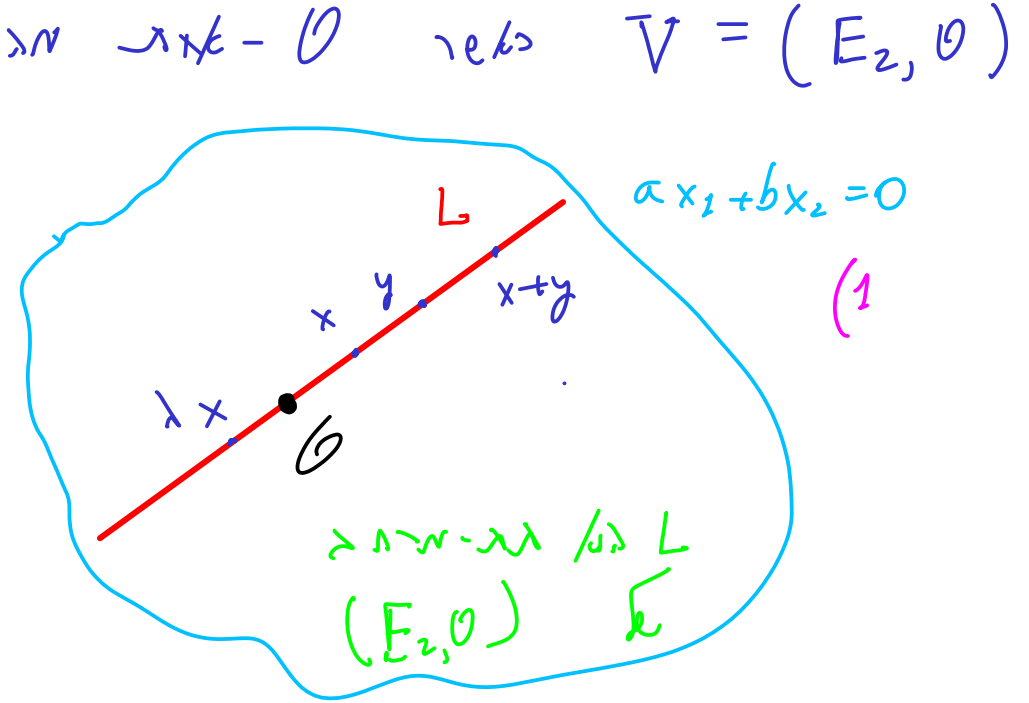
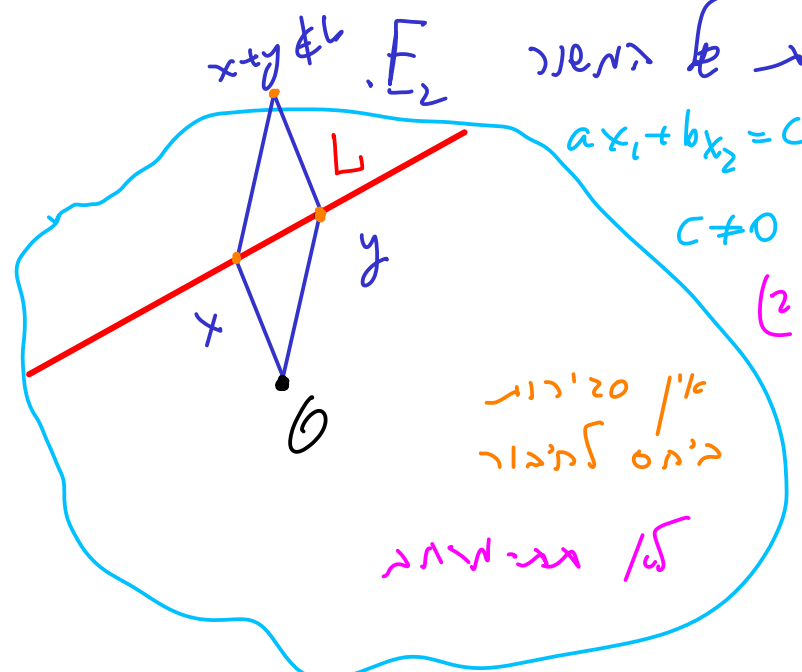
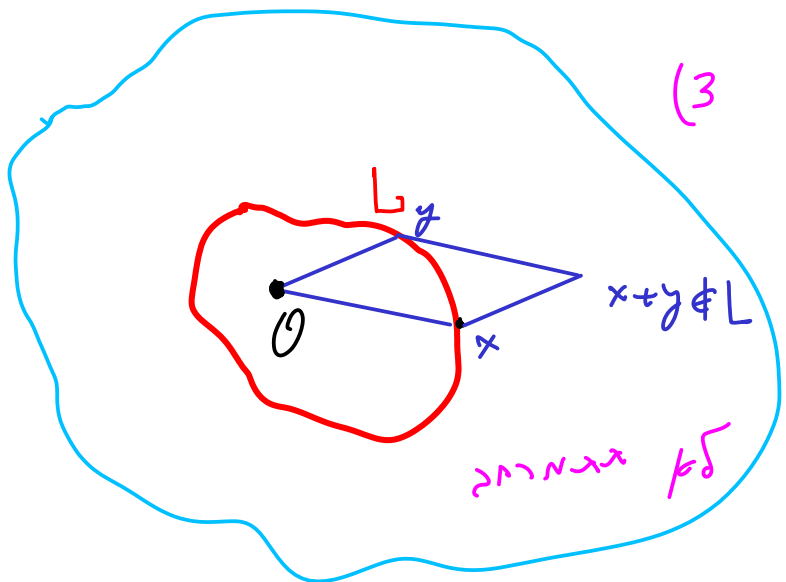
$$x+y = \begin{pmatrix} \xi+\eta \\ (\xi+\eta)+2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \xi+\eta \\ (\xi+\eta)+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta+1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} \xi \\ \xi+1 \end{pmatrix}$$

$x+y \notin L$ לפי

לפי L היא תת-חלל.

האם L היא תת-חלל:
נבדוק סגור תחת כפל:
 $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \xi \\ -\xi \end{pmatrix}$ סגור תחת כפל:
כל $\xi_1 + \xi_2 = 0$ כל ξ_1, ξ_2 שייכים ל- L
 $\Rightarrow$ היא תת-חלל היא תת-חלל

האם L היא תת-חלל:
נבדוק סגור תחת חיבור:
 $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \xi \\ \xi+1 \end{pmatrix}$ סגור תחת חיבור:
כל $\xi_2 - \xi_1 = 1$ כל ξ_1, ξ_2 שייכים ל- L
 $\Rightarrow$ היא תת-חלל היא תת-חלל



$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$$

$$Y = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\}$$

$$X = \mathbb{Z}^{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3}$$

מציג / מציג את 0 כחידוש:

$$m+n \quad \mathbb{Z} \text{ יש בו חידוש:}$$

$$1, 3 \in Y$$

$$1+3=4 \notin Y$$

גם-קבוצה Y אינה סגורה ביחס +.

סכום של מספרים זוגיים
הוא מספר זוגי

$$2p+2q=2(p+q)$$

הם קבוצה סגורה:

כ"פ $x+y \in L$ ו' סגור ב'חס כתיב ו'.

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda \bar{x}_1 \\ \lambda \bar{x}_2 \\ \lambda \bar{x}_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} \in L \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

$$2(\lambda \bar{x}_1) - 3(\lambda \bar{x}_2) + \lambda \bar{x}_3 = \lambda (2\bar{x}_1 - 3\bar{x}_2 + \bar{x}_3) = \lambda \cdot 0 = 0$$

"0

$\lambda x \in L \quad \Leftrightarrow$ ו' סגור ב'חס ככל הסקלר.

נוקמה: L חתומה ב- $\mathbb{R}^3$.

14 $V = \mathbb{R}^3$ כחלק $\mathbb{R}^3$ מרחב וקטורי 3-ממדי

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

סגור תחת חיבור
סגור תחת כפל

3

מרחב וקטורי 3-ממדי

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \right\}$$

האם V הוא מרחב וקטורי?

$$x+y = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}$$

$x+y \in L$?

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2y_1 - 3y_2 + y_3 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in L$$

$$2y_1 - 3y_2 + y_3 = 1 \Leftrightarrow y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in L$$

$$2(x_1+y_1) - 3(x_2+y_2) + (x_3+y_3) = \underbrace{(2x_1 - 3x_2 + x_3)}_{=1} + \underbrace{(2y_1 - 3y_2 + y_3)}_{=1} = 1+1 = 2 \neq 1$$

לכן V אינו מרחב וקטורי

לכל מטריצה קטורים שלשה תת-מרחבים וקטוריים

$U \subset \mathbb{R}^3$: מרחב וקטורי בגודל 1
 $W \subset \mathbb{R}^2$: מרחב וקטורי בגודל 2
 $\mathbb{R}^3 = L$: המרחב של בגודל 3

$$\begin{cases} x - 3z = 0 \\ 2x + 8y + 7z = 0 \end{cases}$$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

15

ז'ורז עיי בצלאל אילן 3/17: W

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן גבס'ס:

לג נעלב בצלאל אילן: L

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{13}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 3z = 0 \\ y + \frac{13}{8}z = 0 \end{cases}$$

הצלאל אילן

z זכר : $z=t$, e ו' $P_{10} \cap P_{11}$.

$$\begin{cases} x=3z=24t \\ y=-\frac{13}{8}z=-13t \end{cases} \Leftrightarrow z=8t \quad \text{כאשר } z \text{ ו' } e \text{ זכר}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ -13 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \begin{cases} x=24t \\ y=-13t \\ z=8t \end{cases}$$

מסקנה: אם L זכר P_{10} ו' P_{11} אז L זכר $P_{10} \cap P_{11}$ ו' $P_{10} \cap P_{11}$ זכר L .

$$L \subseteq \begin{pmatrix} 24 \\ -13 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{כאשר } L \text{ זכר}$$

$$\dim L = 1$$

$$3 - 2 = 1$$

כאשר

קבוצת הפתרונות למערכת אינטגרלית

עם n נעלמים – תג-מרב קלאסי ב- $\mathbb{R}^n$

משפט תת-קבוצה $L < V$ היא תת-חבורה $\Leftrightarrow L$ תת-חבורה

$$\left(\lambda x + \mu y \in L \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in L \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{cases} \right)$$

הוכחה: $\Leftarrow$ נניח L תת-חבורה

$$\lambda x + \mu y \in L \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x \in L \\ \mu y \in L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in L \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$$

סגור תחת סכימה +
סגור תחת מכפלה

$x + y \in L \Leftrightarrow x, y \in L$:פ.3

$\lambda x \in L \Leftrightarrow \begin{cases} x \in L \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow$ נניח: $\lambda x + \mu y \in L \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in L \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$

(1) $x + y \in L : \lambda = \mu = 1$ עדין

(2) $\lambda x \in L : \mu = 0$ עדין

ל.ע.מ

משפט נניח $L \subset V$ תת-מרחב.

אזי $L \geq 0$.

הוכחה:

לפי ההזזרה של תת-מרחב, הקבוצה L היא מרחב וקטורי, לכן (אקסיומה ז') מכילה יא 0 .

מ.ש.ל.

15

$L \subseteq \mathbb{R}^3$ היא תת-מרחב? $L = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

נראה כי L אינו מרחב וקטורי, לכן נבדוק האם $L \geq 0$?

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

בהנחת אפס, האם קיימים סקלרים

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu$$

$\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ (לפתור) | יש פתרון $\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ | לא מתקבל $\Leftrightarrow 0 \in L$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad \swarrow$$

$$R_2 - 2R_3 \rightarrow R_2 \quad R_1 + R_2 \rightarrow R_1$$

$$R_1 - 2R_3 \rightarrow R_1$$

לא מתקבל אין פתרון

$$0 \notin L$$

$\mathbb{R}^3$ אינה ג-ת-מרתג ב- L

? $\mathbb{R}^3 \rightarrow L$ linear map, $L = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

(1) קוצים נצוק $L \ni 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$R_1 \leftrightarrow R_3$$

יש פתרון (במקרה יחיד, אבל לא תשובה שלילית). ולכן אפשר להמשיך.

(2) $L \ni 0$

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כל λ, μ יש λ_1, μ_1

$$\lambda_1 := \lambda + 1$$

$$\mu_1 := \mu + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

המשפט

ה' $\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ קבוצה

כדי שיהיה קבוצה, נסמן:

ציינו ב' x, y הם וייצוגים

$$u, v \in \{ \lambda x + \mu y \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} = L$$

$$x := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \text{span}(x, y)$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u + \beta v \in L$$

$$u = \lambda_1 x + \mu_1 y$$

$$\Leftrightarrow u \in L$$

$$v = \lambda_2 x + \mu_2 y$$

$$\Leftrightarrow v \in L$$

$$\alpha u + \beta v = \alpha (\lambda_1 x + \mu_1 y) + \beta (\lambda_2 x + \mu_2 y) = \underline{\alpha \lambda_1 x} + \underline{\alpha \mu_1 y} + \underline{\beta \lambda_2 x} + \underline{\beta \mu_2 y} =$$

$$= (\alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2) x + (\alpha \mu_1 + \beta \mu_2) y \in L$$

המשפט: L תת-חלל

נגזרה מדרג. $\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 0 \\ 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 = 2 \end{cases}$ נסמן ב- L את הקבוצה ב- $\mathbb{R}^3$ של הפתרונות.
האם L היא תת-מרחב?

$X_1 = X_2 = X_3 = 0$ אינו פתרון למערכת, לכן $0 \neq L$, לכן L אינה תת-מרחב.

נהוגה מחרנה

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{array} \right.$$

נסמן ב- L את הקבוצה ב- $\mathbb{R}^3$ של הפתרונות.

האם L היא תת-מרחב?

הגדרת-מרחב וקטורי

V מרחב וקטורי

$$x_1, x_2, \dots, x_k \in V$$

$$\text{span}(x_1, \dots, x_k) := \{ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \}$$

הקבוצה של כל ציבופים ליניאריים על $x_1, \dots, x_k$

משפט $\text{span}(x_1, \dots, x_k)$ תת-מרחב וקטורי ב- V .

הוכחה: (א) סגירות ביחס לכתימה:

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_k + \beta_k)x_k \in \text{span}(x_1, \dots, x_k) \iff \begin{cases} u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k \\ v = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k \end{cases} \iff u, v \in \text{span}(x_1, \dots, x_k)$$

ציבופ ליניארי על $x_1, \dots, x_k$

וקטור = איבר של מרחב וקטורי

⊙ זכרון: ג'אס סכום בסדר:

צירוף ליניארי $x_1, \dots, x_k$

$$\lambda u = (\lambda \alpha_1) x_1 + \dots + (\lambda \alpha_k) x_k \in \text{span}(x_1, \dots, x_k) \quad \Leftrightarrow \quad u = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u \in \text{span}(x_1, \dots, x_k) \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ש.ע.נ

$x_1, \dots, x_k$ הנכנסים ל V הנגזרת מרחב $\text{span}(x_1, \dots, x_k)$

$$\sum |n'|$$

$$\sum_{m=2}^5 a_k = a_k^{m=2} + a_k^{m=3} + a_k^{m=4} + a_k^{m=5} = 4a_k$$

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \sum_{k=2}^5 a_k = \sum_{m=2}^5 a_m = \sum_{\odot=2}^5 a_{\odot} = \sum_{\odot=2}^5 a_{\odot} \neq \sum_{m=2}^5 a_k = 4a_k$$

לפי מרחב

אחרי מרחב

א/ר בהנכנסת נ"מ כנסת גזרה;

$$u+v = \sum_{p=1}^k \alpha_p x_p + \sum_{p=1}^k \beta_p x_p = \sum_{p=1}^k (\alpha_p x_p + \beta_p x_p) \stackrel{\text{②) } \alpha_p + \beta_p}{=} \sum_{p=1}^k (\alpha_p + \beta_p) x_p \in \text{Span}(x_1, \dots, x_k) \quad \text{③}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \sum_{p=1}^k \alpha_p x_p \\ v = \sum_{p=1}^k \beta_p x_p \end{cases} \quad \Leftrightarrow u, v \in \text{Span}(x_1, \dots, x_k) \quad \text{④}$$

$$\sum_{n=1}^k a_n + \sum_{n=1}^k b_n = \sum_{n=1}^k (a_n + b_n)$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k + b_1 + b_2 + \dots + b_k = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_k + b_k) = \sum_{h=1}^k (a_h + b_h)$$

$$\lambda u = \lambda \sum_{p=1}^k \alpha_p x_p = \sum_{p=1}^k \lambda (\alpha_p x_p) \stackrel{(5) \text{ linearity}}{=} \sum_{p=1}^k (\lambda \alpha_p) x_p \Leftrightarrow u = \sum_{p=1}^k \alpha_p x_p \Leftrightarrow \begin{cases} u \in \text{Span}(x_1, \dots, x_k) \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$V = \mathbb{R}^2$ מרחב וקטורי על חזיון בנורמל נורמלי.

נניח: $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

האם $y \in \text{Span}(x_1, x_2)$?

(1) קבוצת הקבוצות $\{x_1, x_2\}$ היא בסיס
(2) λ_1, λ_2 סקלרים
(3) $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = y$

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 2 \\ 4\lambda_1 + 6\lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$: λ_1, λ_2 סקלרים
כאן y היא צירוף ליניארי של x_1, x_2
כלומר: $y \in \text{Span}(x_1, x_2)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 18 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$R_2 + 4R_1 \rightarrow R_2$

$y \in \text{Span}(x_1, x_2)$

$\lambda_2 = \frac{1}{2}$
 $\lambda_1 = 3\lambda_2 - 2 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$

כלומר: $y = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$

כ"ס > ל > ג ג"ס

הנכונות:

במרחב וקטורי יש חיבור ויש כפל הסקלרי.

בזוגות/ה/שית אמ"ן: בקבוצה א וקטורים (חזים) במשוא.

$\mathbb{R}^2$: זוגות/ה/שית

(20)

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad V = \mathbb{R}^3$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$L := \text{Span}(x, y) \quad \text{שז"ר}$$

$$\{ \lambda x + \mu y : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

$$? \quad u \in L, v \in L \quad \underline{\text{אם כן:}}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{: } f_3$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{למעשה} \\ \text{יש פתרון} \end{array} \Rightarrow u \in L$$

$$u \in \text{Span}(x, y)$$

$$\mu = -1 \\ \lambda = 1$$

$$x - y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} u \\ u \end{array}$$

$v \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow \text{לא קיים פתרון} \Rightarrow v \notin L$$

$$u \in \text{span}(x, y)$$

$$v \notin \text{span}(x, y)$$

$v \notin L$

$$L \neq V, \text{ כן } \checkmark$$

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad ; 2 \geq \text{דרגת } t \text{ של פולינום ב } V = \mathbb{R}_2[t]$$

(21)

שאלה: האם L סגור?

$$L := \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0 = 0\}$$

נניח שיש פולינום x ב L

$\Leftrightarrow$ L סגור

כל פולינום ב L

יש לו $a_0 = 0$

$$\lambda x(t) + \mu y(t) = \lambda a_1 t + \lambda a_2 t^2 + \mu b_1 t + \mu b_2 t^2 =$$

$$= (\lambda a_1 + \mu b_1)t + (\lambda a_2 + \mu b_2)t^2 \in L$$

כל פולינום ב L

$$\lambda x(t) + \mu y(t) \in L \Leftrightarrow \lambda, \mu \in \mathbb{R}, x(t), y(t) \in L$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = a_1 t + a_2 t^2 \Leftrightarrow x \in L \\ y(t) = b_1 t + b_2 t^2 \Leftrightarrow y \in L \end{cases}$$

לכן L סגור

הערה: $a_0 = 0$ הוא תנאי הכרחי

(22)

$$v(t) = t^2, u(t) = (t-1)^2, y(t) = t+2, x(t) = t^2 - 3t - 1, V = \mathbb{R}_2[t]$$

.2 ≥ סדר מדרג

? $u, v \in \text{Span}(x, y)$ ס/כ

? $\lambda x + \mu y = u$ ס/כ? λ, μ מספרים ממשיים

$$\lambda x + \mu y = \lambda(t^2 - 3t - 1) + \mu(t + 2) = \lambda t^2 - \underline{\underline{3\lambda t}} - \lambda + \underline{\mu t} + \underline{2\mu} =$$

סדר מדרג

$$= \lambda t^2 + (-3\lambda + \mu)t + (-\lambda + 2\mu)$$

סדר מדרג
סדר 2
סדר 1

$$\lambda t^2 + \underline{\underline{(-3\lambda + \mu)t}} + \underline{(-\lambda + 2\mu)} = \underline{t^2} - \underline{2t} + \underline{1}$$

2 סדר מדרג סדר 2 $\Leftrightarrow$ סדר מדרג סדר 2 סדר 2 סדר 2

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

סדר מדרג
 $u \in \text{Span}(x, y)$ ס/כ

(1) t^2 $\lambda = 1$

(2) t $-3\lambda + \mu = -2$

(3) 1 $-\lambda + 2\mu = 1$

$$v(t) = t^2 \quad \text{סדר 2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{array} \right)$$

⚡

סדר 2
 $v \notin \text{Span}(x, y)$

$v \notin \text{Span}(x, y), u \in \text{Span}(x, y) : \exists \lambda \in \mathbb{R}$

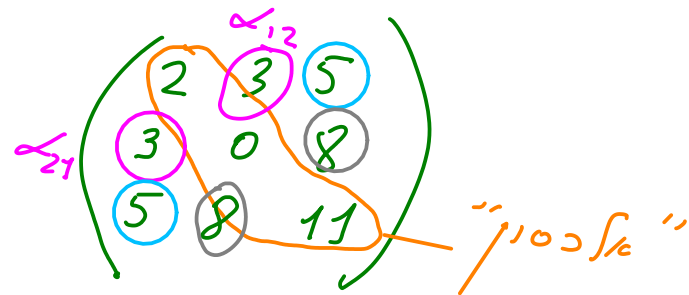
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

סדר 1, סדר 2, סדר 3

$V = M_3$ סדר 3, נבחר בסיס, $\dim V = 9$ (23)

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 5 \\ 3 & -8 & 5 \\ 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -4 & 7 & 0 \\ 8 & 11 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 5 \\ 15 & 20 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(-3) \cdot \begin{pmatrix} 12 & 0 & 5 \\ 3 & -8 & 5 \\ 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 & 0 & -15 \\ -9 & 24 & -15 \\ -21 & -27 & -12 \end{pmatrix}$$



לגזור S_3 כתת-קבוצה של M_3 סמטריזציה

שורה 1 = עמודה 1
 שורה 2 = עמודה 2
 שורה 3 = עמודה 3

סמטריזציה!

מאגף גז'ז נ' 3×3 כצורה

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{31}$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32}$$

$\Leftrightarrow$ סמטריזציה A

$S_3 \subseteq M_3$ תת-קבוצה.
השאלה:

$$A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}}$$

האם S_3 תת-מרחב ב- M_3 ?

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad \Leftrightarrow \quad \text{סמטריזציה } A$$

$i, j = 1, 2, 3$

$$A \in S_3 \quad \text{אם}$$

$$A + B \in S_3$$

$$(A, B \in S_3) \quad \text{אם}$$

היכר β_{ij} בערך i וסומך j במרכז $A+B$ של $\alpha_{ij} + \beta_{ij}$ (1)

$$(A+B)_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \quad B = (\beta_{ij})_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix}$$

$$(A+B)_{ij} = (A+B)_{ji} \quad \text{כל } A+B \in S_3 : \text{ של } 3$$

$$\alpha_{ij} + \beta_{ij} = \alpha_{ji} + \beta_{ji}$$

$$A \in S_3 \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad \text{כדור מסתובב}$$

$$B \in S_3 \quad \beta_{ij} = \beta_{ji}$$

$$(\lambda A)_{ij} = (\lambda A)_{ji} : \text{ של } 3 \quad (2)$$

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda \alpha_{ij} = \lambda \alpha_{ji} = (\lambda A)_{ji}$$

25

$$L := \left\{ t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

האם L גז-מרחב ?

$$0 \in L \quad \text{כן, ברור, להחליף.}$$

L אינה סגורה ביחס לכפל בסקלר

L אינו גז-מרחב.

$$\text{לכן} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin L$$

26

$$L := \left\{ t^3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

האם L גז-מרחב ?

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \alpha^3 u, \quad y = \beta^3 u \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{עבור}$$

$$x, y \in L \quad \text{כן, ברור}$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{עבור}$$

$$\lambda x + \mu y = \lambda \alpha^3 u + \mu \beta^3 u = (\lambda \alpha^3 + \mu \beta^3) u = \left(\sqrt[3]{\lambda \alpha^3 + \mu \beta^3} \right)^3 u \in L \Rightarrow \underline{\underline{L \text{ גז-מרחב}}}$$

משפט $L_1, L_2 \subseteq V$ גזר-מרחב'ם $\Leftarrow L_1 \cap L_2$

הוכח:

$$L_2 = \text{span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \mathbb{R}^2$$

⑨

$$U_2 = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0 = 0\} \quad U_1 = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_1 = 0\}$$

ז'ס

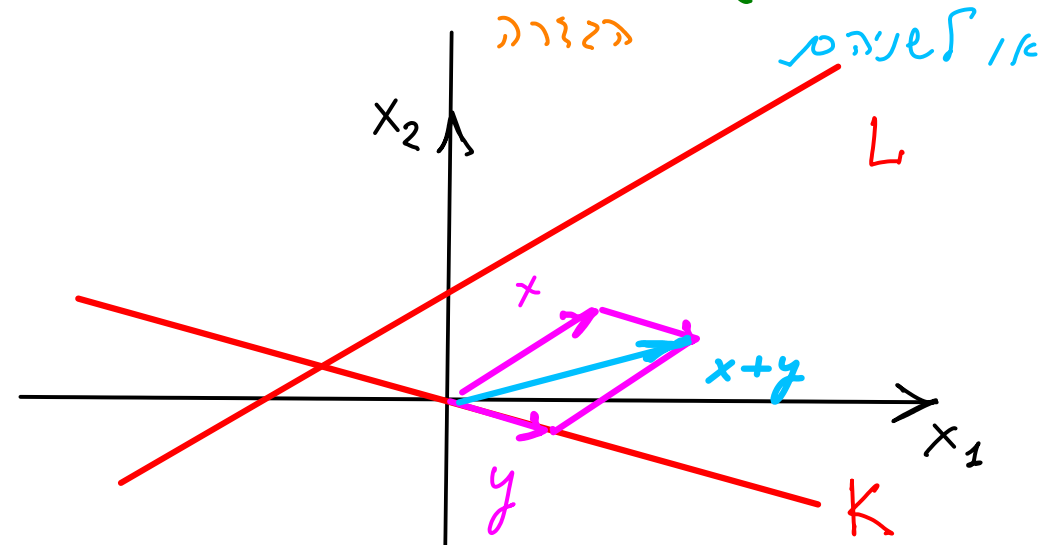
(2)4

$V \supset L, K$ חזירק סל אס

$U \neq L \cup K$ גר-חיתום, גר-חיתום

X, Y

$$a \in Y \cup X \Leftrightarrow (a \in X) \text{ OR } (a \in Y)$$



האם $U_1 \cup U_2$ גר-חיתום?

למה לא?

$$x := 1 + t^2 \in U_1 \subset U_1 \cup U_2$$

$$y := t \in U_2 \subset U_1 \cup U_2$$

$$x + y = 1 + t + t^2 \notin U_1 \notin U_2$$

אבל!

מסקנה: מכאן $x, y \in U_1 \cup U_2$ אבל $x + y \notin U_1 \cup U_2$

כלומר $U_1 \cup U_2$ אינו סגור ביחס לסכימה.

למה לא?

$$x \in L$$

$$y \in K$$

$$x + y \notin L \cup K$$

$$V = \mathbb{R}^2 \quad (11)$$

$$(x_1, x_2)$$

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \Rightarrow (0, 0)$$

$$\lambda(x_1, x_2) := (\lambda x_1, x_2)$$

$$0(x_1, x_2) = (0, 0)$$

$$0(1, 1) = (0, 1) \neq (0, 0)$$

$$(1+0)x = x$$

$$(1+0) = 1 \cdot x + 0 \cdot x = 1x$$

$$x + 0 \cdot x = x$$

$$0x = 0$$

$$x$$

לכן $m > n$ אינו יכול להתקיים.

כלומר $y_1, \dots, y_m \in \text{Span}(x_1, \dots, x_n)$

כלומר y_1, y_2, y_3

$y_1, y_2, y_3 \in \text{Span}(x_1, x_2) : m=3, n=2$

($\alpha_{11} \neq 0$;/ $\alpha_{12} \neq 0$)

$$y_1 = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2$$

x_1, x_2 הם בסיס $\Rightarrow y_1 \in \text{Span}(x_1, x_2)$

$$y_2 = \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2$$

$\Rightarrow y_2 \in \text{Span}(x_1, x_2)$

$$y_3 = \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2$$

$$? \quad \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0$$

כלומר $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ (או $\mathbb{C}$)

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = \lambda_1 (\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2) + \lambda_2 (\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2) + \lambda_3 (\alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2) =$$

$$= (\lambda_1 \alpha_{11} + \lambda_2 \alpha_{21} + \lambda_3 \alpha_{31}) x_1 + (\lambda_1 \alpha_{12} + \lambda_2 \alpha_{22} + \lambda_3 \alpha_{32}) x_2 = 0$$

בצורה מקבוצה:



$$\sum_{j=1}^3 \alpha_{ji} \lambda_j = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_{11} \lambda_1 + \alpha_{21} \lambda_2 + \alpha_{31} \lambda_3 = 0 \\ \alpha_{12} \lambda_1 + \alpha_{22} \lambda_2 + \alpha_{32} \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

: $\sum$ leaves no other choice

$$y_i = \sum_{j=1}^2 \alpha_{ji} x_j$$

$$y_1 = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2$$

$$y_2 = \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2$$

$$y_3 = \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2$$

$$: y_1 = \sum_{i=1}^2 \alpha_{1i} x_i \\ \dots$$

2 ממשותף ב-1 ו-2
3 ממשותף



ממשותף 3 ממשותף

$$y_j = \sum_{i=1}^2 \alpha_{ji} x_i, j=1,2,3$$

3 ממשותף

$$\sum_{j=1}^3 \lambda_j y_j = 0$$

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0$$

הנה צבנה:

? $\sum_{j=1}^3 \lambda_j \sum_{i=1}^2 a_{ji} x_i = 0$ - $\int$ כמה פנינו - $\int$ $\int$

$$\sum_{j=1}^3 \lambda_j \sum_{i=1}^2 a_{ji} x_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 \lambda_j a_{ji} x_i = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \lambda_j a_{ji} x_i = \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^3 \lambda_j a_{ji} \right) x_i \stackrel{?}{=} 0$$

$\sum_{j=1}^3 \lambda_j a_{ji}$
כמה פנינו

? $\sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^3 \lambda_j a_{ji} \right) x_i = 0$ כמה פנינו - $\int$ $\int$

$\sum_{j=1}^3 \lambda_j \alpha_{ij} = 0$ עבור $i=1,2$ $\sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^3 \lambda_j \alpha_{ij} \right) x_i = 0$ במרחב N מרבי, ok

$\sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^3 \lambda_j \alpha_{ij} \right) x_i = 0$ כל x $\sum_{j=1}^3 \lambda_j \alpha_{ij} = 0$ כל i מרחב N מרבי, ok
 כל i מרחב N מרבי, ok

מרחב N מרבי:

למשל נניח $m > n$ יש וסדרים $m > n$.

יש/אז $y_1, \dots, y_m \in \text{span}(x_1, \dots, x_n)$ כלומר.

הוכחה: נניח: $y_j \in \text{span}(x_1, \dots, x_n)$ $\Leftrightarrow j=1, \dots, m$ $y_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} x_i$ כלומר $j=1, \dots, m$ כלומר α_{ji} מספרים.

נניח: $\sum_{j=1}^m \lambda_j y_j = 0$ כלומר λ_j מספרים.

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} x_i = 0$$

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} x_i = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \lambda_j \alpha_{ji} x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_j \alpha_{ji} x_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \alpha_{ji} \right) x_i \stackrel{?}{=} 0$$

כלומר x_i כלומר $j=1, \dots, m$

$$\text{for } i=1, \dots, n \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j \alpha_{ij} = 0$$

$$m_k, m_1, \dots, m_N \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \lambda_{ji} \right) x_i = 0 \quad \text{wobei}$$

$$e' \Rightarrow \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \alpha_{ji} \right) x_i = 0 \quad - \int \int$$

$\sum_{j=1}^m \lambda_j \alpha_{ij} = 0$, ו' יומר חזקתו | כל א ,
 בגלל שנספר ג'שטטל
 קל | מספר ג'שטטל

Le N

מרחבים וקטוריים ממיינז סופי

|| מרחב וקטורי V יש ממיינז סופי אם ניתן למצוא m וקטורים $x_1, \dots, x_m$: $V = \text{Span}(x_1, \dots, x_m)$

2 $V = \mathbb{R}[t]$ פולינומים על t – דוגמה/ למרחב וקטורי ממיינז אינסופי.

נניח מצאנו $x_1, \dots, x_m$ מ פולינומים שפויסם אג $\sqrt{}$, נסמן כ- d אג גרמיה דגמה
גיוור גין ממצור א $x_1, \dots, x_m$ - אס כ- $\text{Span}(x_1, x_m)$

אין פולינומים מממצב $d+1$.

$$V = \text{Span}(1, t, t^2)$$

3 $V = \mathbb{R}_2[t]$ ממיינז סופי !

מכאן, לכל מרחבים וקטוריים יש ממיינז סופי

V מרחב וקטורי מממדי n
 מרחב V בסיס $e_1, \dots, e_n \in V$

$$x \in V$$

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

"בסיס" V

$$V = \text{span}(e_1, \dots, e_n) \quad (1)$$

$$e_1, \dots, e_n \text{ ב"ח} \quad (2)$$

תנאי (1) $x \in V$ ניתן לכתוב כצירוף ליניארי של $e_1, \dots, e_m$

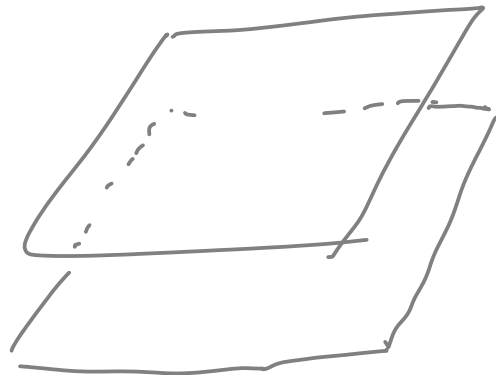
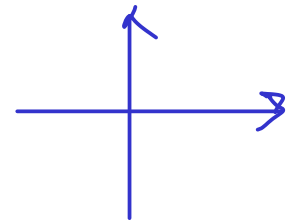
$$u = \lambda v$$

$$u, v$$

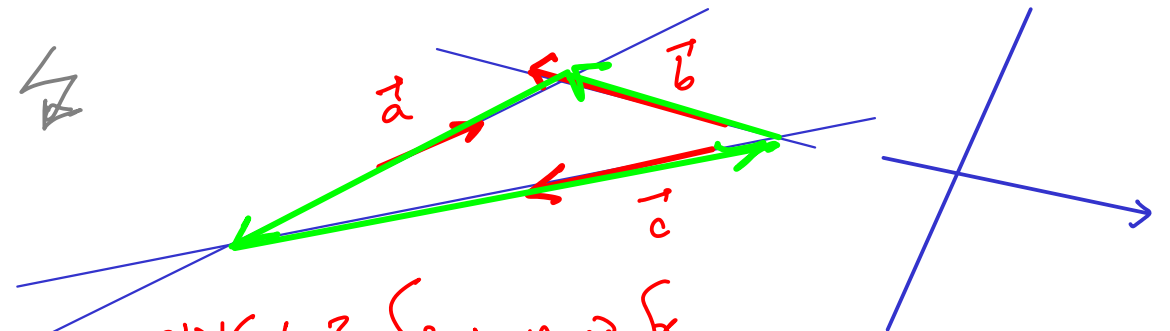
$$\Leftrightarrow u \parallel v$$

$$u, v, w$$

$$\Leftrightarrow u, v, w \in \text{ישות}$$

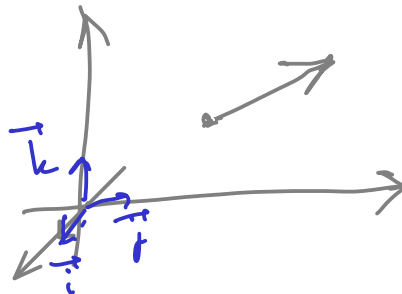


$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$$



3 וקטורים
 a, b, c

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0}$$



$$\vec{a} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$$

$$[\vec{a}] = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

ה' ע"פ ה"ע

3"02

1

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V = \mathbb{R}^3$$

? 0'02 (x₁, x₂, x₃) 077

$$: \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \quad \int \cdot 3 \quad u = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{נקד}$$

$$\text{span}(x_1, x_2, x_3) = \mathbb{R}^3 \quad ; \int \cdot 3 \quad \textcircled{K}$$

הזמנו לשלוק ה' כמ' -> בזמנו -> מ'ע'מ'ה' ל' ה'מ'מ'ה'
המ'מ'ה' ה'ב'ה' ה'מ'מ'ה' ה'מ'מ'ה' :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

מ'ע'מ'ה' ל' ה'מ'מ'ה' ->

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -2 & 1 & \alpha_2 \\ 1 & 3 & -1 & \alpha_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -2 & 1 & \alpha_2 \\ 0 & 2 & -1 & \alpha_3 - \alpha_1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -2 & 1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2 \end{array} \right) \sim$$

$R_3 - R_1 \rightarrow R_3$ $R_3 - R_2 \rightarrow R_3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{\alpha_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2 \end{array} \right)$$

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (\Rightarrow) \quad \text{מ'ע'מ'ה' ל' ה'מ'מ'ה'}$$

Span(x₁, x₂, x₃) - ה' מ'ע'מ'ה' ל' ה'מ'מ'ה'

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \swarrow$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Span}(x_1, x_2, x_3) \quad , \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{לפי 2.1}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{ב-3} : x_1, x_2, x_3 \quad \text{ב-1}$$

הצגנו כי x הוא צירינגר של x_1, x_2, x_3 ב-1.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

(יורד מ-1/2) ב-1/2

לפי 2.1

יש צירינגר

$\Downarrow$

ב-1 x_1, x_2, x_3

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \underline{\underline{\text{ב-1} : x_1, x_2, x_3 \text{ צירינגר}}}}$$

$$p_1(x) = x+1, \quad p_2 = x-2, \quad p_3 = x^2+x+3$$

$$V = \mathbb{R}_2[x] \quad \text{מ'כיוון ש} \dim V = 3 \geq 2$$

שאלה: האם p_1, p_2, p_3 הם בסיס?

נניח $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0$ כאן $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ הם סקלרים אם $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ אז $0 = 0$ (הכלל)

אם $\lambda_3 \neq 0$ אז נחלק ב- λ_3 ונקבל:

$$\lambda_1(x+1) + \lambda_2(x-2) + \lambda_3(x^2+x+3) = 0$$

$\downarrow$
מקדם

$\Leftrightarrow$ המקדמים שווים ל-0

①

✗

ⓧ^{x²}

$$\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לפי הכלל של רוקר $\Rightarrow$ p_1, p_2, p_3 הם בסיס

(K)

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, u(x) \text{ שווה ל-}$$

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = u(x)$$

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & \alpha_1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & \alpha_1 \\ 0 & 3 & -2 & \alpha_2 - \alpha_1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_3 \end{array} \right)$$

$$\text{Span}(p_1, p_2, p_3) = \mathbb{R}_2[x] \iff \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ שרירותיים}$$

$$\mathbb{R}_2[x] \rightarrow \underline{\underline{p_1, p_2, p_3}} \text{ :בסיס}$$

$$\text{If } y_1, \dots, y_m \in \text{Span}(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow m \leq n$$

Lemma Let V be an n -dimensional vector space. If $b_1, \dots, b_m$ are linearly independent vectors in V , then $m \leq n$.

Proof: We will use induction on m . For $m=1$, it is clear that b_1 is linearly independent, so $1 \leq n$.

Inductive step: Assume that for any set of k linearly independent vectors $b_1, \dots, b_k$ in V , we have $k \leq n$. We want to show that if $b_1, \dots, b_{k+1}$ are linearly independent, then $k+1 \leq n$.

Suppose $b_1, \dots, b_{k+1}$ are linearly independent. Consider the set $b_1, \dots, b_k$. By the inductive hypothesis, $k \leq n$. We will show that $k+1 \leq n$.

Let $b_1, \dots, b_{k+1}$ be linearly independent. We will show that $k+1 \leq n$. Suppose $k+1 > n$. Then $b_1, \dots, b_{k+1}$ are linearly dependent, which contradicts our assumption.

$$m \leq n$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1, \dots, b_m \in \text{Span}(c_1, \dots, c_n) \\ \text{If } b_1, \dots, b_m \text{ are linearly independent, then } m \leq n \end{cases} \quad (1)$$

$$n \leq m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1, \dots, c_n \in \text{Span}(b_1, \dots, b_m) \\ \text{If } c_1, \dots, c_n \text{ are linearly independent, then } n \leq m \end{cases} \quad (2)$$

$$\dim V = n$$

dimension

$$m = n \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq n \\ n \leq m \end{cases} \quad (3)$$

d.l.n

יש וקטורים בסיס
העצמי, אכן
 $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

$$V = \mathbb{R}^2 \text{ המרחב הוורטקלי} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad [3]$$

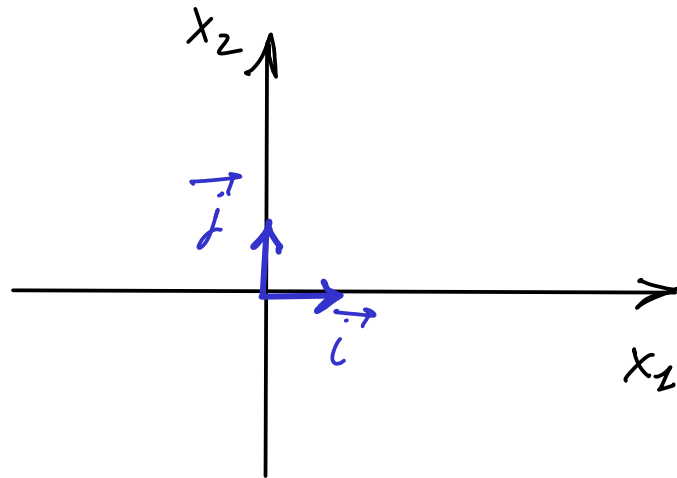
$$\text{ב-} \mathbb{R}^2 \text{ יש בסיס וקטורים } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e_1, e_2 בסיסים הסטנדרטיים ב- $\mathbb{R}^2$

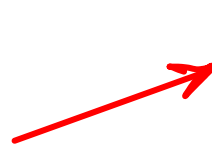
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0 \quad (*)$$

$$V = \mathbb{R}_2[t] \text{ המרחב הוורטקלי של פולינומים ממעלה } \leq 2 \quad [4]$$

$$\dim \mathbb{R}_2[t] = \Leftrightarrow e_1(t) = 1, e_2(t) = t, e_3(t) = t^2 \text{ וקטורים בסיס}$$



במרחב



$$V \text{ המרחב הוורטקלי של וקטורים} \quad [5]$$

$$\text{במרחב } V \text{ מצויים } \langle \cdot \rangle \text{ שני וקטורים } \vec{i}, \vec{j}$$

$$\dim V = 2 \Leftrightarrow \vec{i}, \vec{j} \text{ בסיס מרחב } V$$

לענין ① נניח: $L < V$ נכונה $\Leftrightarrow \begin{cases} \dim L = \dim V \end{cases}$

$L = V$

② $L = 0 \Leftrightarrow \dim L = 0$

הוכחה: ① נניח שקיים $0 \neq x \in V$ שכל $x \in L$.

נבחר בסיס L בסדר $e_1, \dots, e_n$.

כל $x, e_1, \dots, e_n$ בסיס $\Leftrightarrow \dim V \geq n$.

כל $\dim V \geq \dim L$ $\Leftrightarrow$ כל בסיס של L הוא בסיס של V .
 $x \in V \setminus L$ אינו נכונה, כלל $L = V$.

② ברור.

לענין

$L = \{0\}$
 כל L יש רק וקטור אפס.

משפט נ"ח $\dim V = n$

ש"כ מחרבה בו ו וקלאר'ס בס'ס וז"ל $V \Leftrightarrow$ המחרבה בג"ל.

הוכחה: נ"ח $x_1, \dots, x_n$ בג"ל, ש"כ $\dim(\text{Span}(x_1, \dots, x_n)) = n$ $\Leftrightarrow$ $\text{Span}(x_1, \dots, x_n) = V$ ^{ש"כ. המשפט}

לכן $x_1, \dots, x_n$ מק"מ - כל הגז'ל $\text{Span}(x_1, \dots, x_n) = V$ בס'ס.

ד"ל.

בס'ס במרחב וקלאר' V ממ"ס $x_1, \dots, x_n$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$$

① $V = \text{Span}(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow$ וקלאר' ב- V הוא צביון ליניארי

② $x_1, \dots, x_n$ בג"ל $\Leftrightarrow$ הצביון יח'י

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^4 \supset L = \text{Span}(u_1, u_2, u_3)$$

גודל הסבסטי $0 \leq \dim L \leq 3$
(רמז)

נניח שהסבסטי u_1, u_2, u_3 איננו בסיס (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -8 \\ -3 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -14 \\ -2 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$C_1 - C_2 \rightarrow C_1$
 $C_3 - 3C_2 \rightarrow C_3$
 $C_3 + 14C_2 \rightarrow C_3$
 $C_3 \leftrightarrow C_2$
 $C_2 \leftrightarrow C_1$
 $\frac{1}{33}C_1 \rightarrow C_1$

$\dim L = 3$
 $\Leftarrow$ הסבסטי u_1, u_2, u_3 איננו בסיס $\Leftarrow$ גודל הסבסטי $0 \leq \dim L \leq 3$

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) $\mathbb{R}^4 \ni u_1, u_2, u_3$ איננו בסיס $\Rightarrow$ הם ליניארי תלויים

$$\lambda_1 w + \lambda_2 u_1 + \lambda_3 u_2 + \lambda_4 u_3 = 0 \quad ; \quad \text{נניח } \lambda_4 = 1 \quad ; \quad u_1, u_2, u_3, w$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_4 \\ \lambda_3 + 3\lambda_4 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_4 \\ \lambda_1 + \frac{1}{33}\lambda_2 + 2\lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_4 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$\dim \mathbb{R}^4 = 4$ $\Rightarrow$ w, x_1, x_2, x_3 איננו בסיס $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^4$ איננו בסיס

מ"ס"ע"ל

7 $V = M_2$ מ"ס"ע"ל 2 מ"ס"ע"ל

מ"ס"ע"ל

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מ"ס"ע"ל

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3 + \delta E_4$$

מ"ס"ע"ל $\dim V = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מ"ס"ע"ל

מ"ס"ע"ל (A, B, C, D)

מ"ס"ע"ל

מ"ס"ע"ל

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 \\ 0 & -\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_3 & -\lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda_4 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 - \lambda_4 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ \hline -\lambda_2 + \lambda_3 & -\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_4 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הערכים של $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ שגורמים למטריצה הזו להיות אפסית

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_4 = \lambda_1$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1$$

$$\lambda_3 = \lambda_2 = -\lambda_1$$

$$-\cancel{\lambda_1} + \cancel{\lambda_1} + \lambda_4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_4 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$$

לכן A, B, C, D הם מטריצות אפסיות

כל λ_1 הוא פיתרון

$$x_1, x_2, x_3 \quad \text{ל } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \quad v(t) = -t^2 + 3t + 11 \quad \text{משוואה דיונרית}$$

$$x_3(t) = t - 3, \quad x_2(t) = 2t^2 - 3t, \quad x_1(t) = t^2 - t + 6 \quad \text{למשוואה}$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = v : [v] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \text{משוואה דיונרית}$$

למשוואה דיונרית (ע' א' ב')

$$\alpha_1 (t^2 - t + 6) + \alpha_2 (2t^2 + 3t + 11) + \alpha_3 (t - 3) = -t^2 + 3t + 11$$

$$\textcircled{t^2} \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 = -1$$

$$\textcircled{t} \quad -\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 3$$

$$\textcircled{1} \quad 6\alpha_1 + 11\alpha_2 - 3\alpha_3 = 11$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 6 & 11 & -3 & 11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 29 & 3 & 29 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{29} & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{14}{29} & -3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{29} & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{29} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{87}{14} \end{array} \right)$$

$$\alpha_1 = -\frac{18}{14} - 1 = -\frac{16}{7}$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{29} \cdot \frac{87}{14} = \frac{9}{14}$$

$$\alpha_3 = -\frac{87}{14}$$

$$[v] = \begin{pmatrix} -\frac{87}{14} \\ \frac{9}{14} \\ -\frac{16}{7} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \sim 100$

$$? \text{ למד } x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V = \mathbb{R}^4$$

ס/ע.)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

למד x_1, x_2, x_3, x_4 כסדר (לפי הסדר) כגון x_1, x_2, x_3, x_4 כסדר

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, V = \mathbb{R}^3$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \right\} = \text{Span}(u, v) \quad : \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \text{with } |\alpha_i| \leq 1 \quad \beta_N$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \alpha_1 \\ -3 & -1 & \alpha_2 \\ 2 & 1 & \alpha_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \alpha_1 \\ 0 & 5 & 3\alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 & -3 & \alpha_3 - 2\alpha_1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \frac{3\alpha_1 + \alpha_2}{5} \\ 0 & -1 & \frac{\alpha_3 - 2\alpha_1}{-3} \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \frac{3\alpha_1 + \alpha_2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{9\alpha_1 + 13\alpha_2 - 5\alpha_3}{15} \end{array} \right)$$

$$\frac{\alpha_3 - 2\alpha_1}{-3} + \frac{3\alpha_1 + \alpha_2}{5} =$$

$$\frac{-5\alpha_3 + 10\alpha_2 + 9\alpha_1 + 3\alpha_2}{15}$$

$$-9x_1 + 13x_2 - 5x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \text{Span}(u, v) \quad \text{p. 5}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$L := \text{span}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5), V = \mathbb{R}^3$$

dim L

אם $L \rightarrow 0$ אז $L = \{0\}$

:Gauß ל המטריצה המורכבת מהוקטורים $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ $\rightarrow$ הצורה הנורמלית

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$C_2 - 3C_4 \rightarrow C_2$$

$$C_3 - C_5 \rightarrow C_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \overset{v_1}{1} & \overset{v_2}{0} & \overset{v_3}{0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim \text{Span}(v_1, v_2, v_3) = 3 \Rightarrow L = V$$

קיימים 3 וקטורים בלתי תלויים
בבסיס v_1, v_2, v_3
אם $L = V$ אז $\dim L = 3$

אם היינו לוחצים עם האצבע היינו מקבלים גם 3 שורות שונות ל-0

המספר של שורות (לוחצים) שונות ל-0 בלוחצים נקרא הדרגה של המאכזה

rank
(2)

הסכום של תת-מרחבים

נניח $L_1, L_2 \subset V$ תת-מרחבים.

אז תת-מרחב $\{x+y : x \in L_1, y \in L_2\}$ נקרא הסכום של L_1, L_2 :

$$L_1 + L_2 := \{x+y : x \in L_1, y \in L_2\}$$

$L_1 + L_2$ גם תת-מרחב.

הדרגה

$$\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$$

Coen

$$L_1 \cap L_2 \rightarrow w_1, \dots, w_r \quad \text{ס'סג} \quad \gamma \gamma \gamma \quad \underline{\text{דאס איז דאס!}}$$

$$L_1 \rightarrow \text{ס'סג} \quad u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_r$$

$$: L_1 \rightarrow \text{ס'סג} \quad \gamma \gamma \gamma \quad w_1, \dots, w_r \quad \text{ס'סג}$$

$$L_2 \rightarrow \text{ס'סג} \quad w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_q$$

$$: L_2 \rightarrow \text{ס'סג} \quad \gamma \gamma \gamma \quad w_1, \dots, w_r \quad \text{ס'סג}$$

$$L_1 + L_2 \rightarrow \text{ס'סג} \quad u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_q \quad \underline{\text{דאס איז דאס!}} \quad (2)$$

$$\text{Span}(u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_q) = L_1 + L_2 \quad \text{דאס איז דאס!} \quad (16)$$

$$\lambda x + \mu x = (\lambda + \mu)x$$

$$x + y = \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^r (\beta_j + \gamma_j) w_j + \sum_{l=1}^q \delta_l v_l \in \text{Span}(u_i, w_j, v_k) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^r \beta_j w_j & \Leftrightarrow x \in L_1 \\ y = \sum_{k=1}^r \gamma_k w_k + \sum_{l=1}^q \delta_l v_l & \Leftrightarrow y \in L_2 \end{cases}$$

$$\text{כאשר } u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_q \quad ; \text{ } \text{פס } \textcircled{2}$$

$$\forall i, j, k \quad \gamma_k = 0, \beta_j = 0, \alpha_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^r \beta_j w_j + \sum_{k=1}^q \gamma_k v_k = 0 \quad \text{פס } \textcircled{3}$$

$$\alpha_1 \neq 0 \quad \text{כאשר} \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^r \beta_j w_j + \sum_{k=1}^q \gamma_k v_k = 0 \quad \text{נניח}$$

$$\text{כאשר } u_1, \dots, u_p \quad \text{על } H, z \neq 0 \quad \text{כאשר} \quad z_i = \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i \quad / \text{נניח}$$

$$u_i, w_j, v_k \quad \text{כאשר } z \in L_2 \quad \text{על } H \quad z = -\sum_{j=1}^r \beta_j w_j - \sum_{k=1}^q \gamma_k v_k \in L_2, \text{ נניח}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0 \quad / \text{נניח} \quad L_2 \rightarrow \text{זוהי} \quad w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_q$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_r = 0 \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^r \beta_j w_j + \sum_{k=1}^q \gamma_k v_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^r \beta_j w_j + \sum_{k=1}^q \gamma_k v_k = 0 \quad \text{פס } \textcircled{4}$$

כאשר $w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_q$ על H

$$\dim L_1 = p + z$$

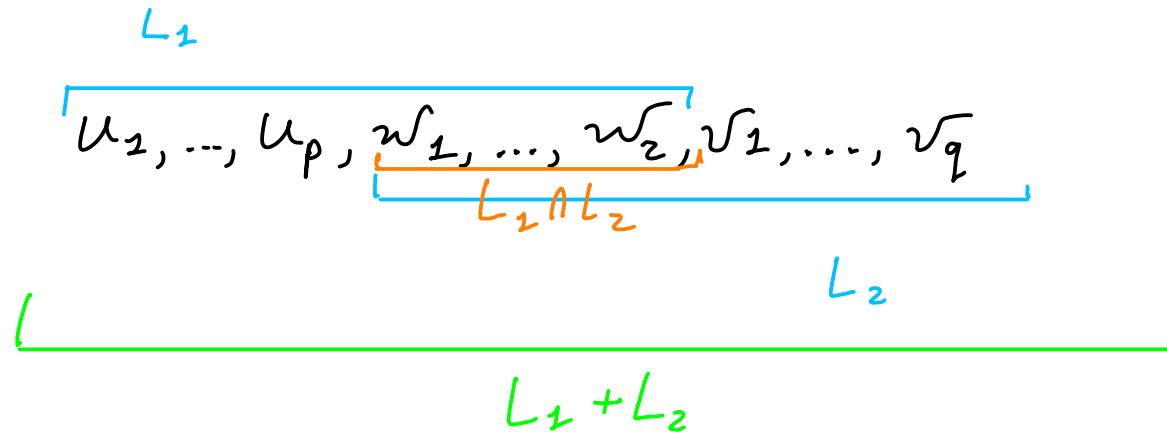
$$\dim L_2 = r + q$$

$$\dim (L_1 \cap L_2) = z$$

$$\dim (L_1 + L_2) = p + z + q$$

Proof

$$(p + z + q) + z = (p + z) + (r + q)$$



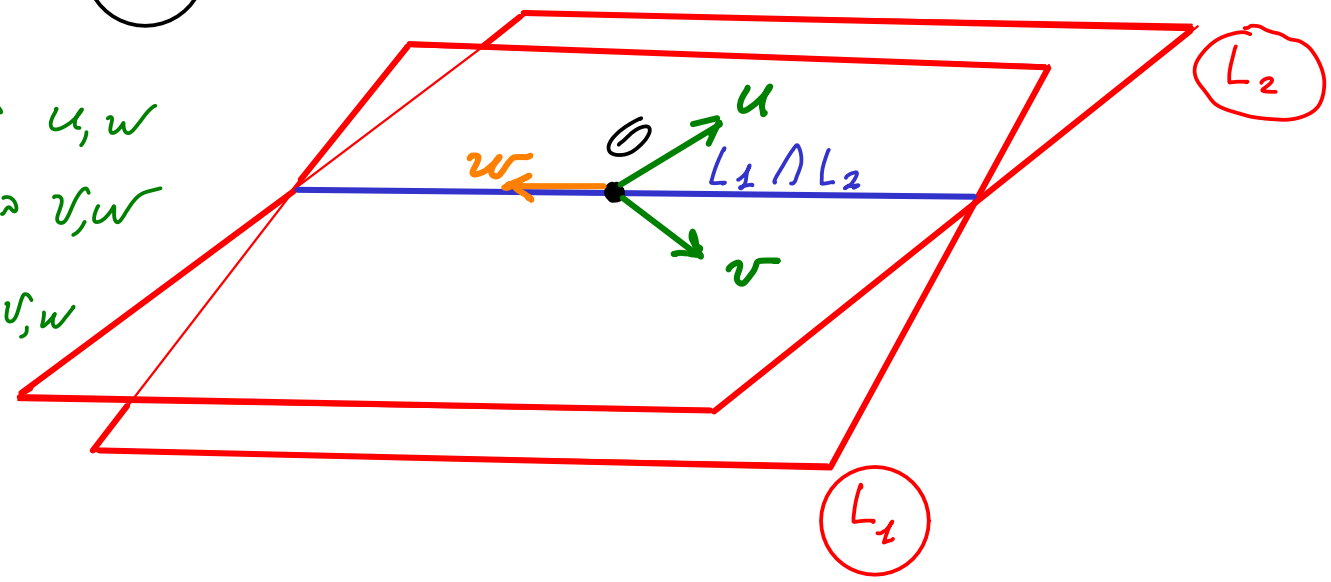
(3)

V - המרחב הווקלי עם מטרית פאסיט $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

L_1, L_2 - 2 מישורים שצוברים זימן נקי באיט $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ואינם מקבילים זה לזה.

אנחנו יונעים על V חיבור נכסאי, L_1, L_2 גורמים.

V



L_1 מכיל u, w

L_2 מכיל v, w

V מכיל u, v, w

$L_1 \cap L_2$ מכיל w

$\dim L_1 = 2$

נראה!

$\dim L_2 = 2$

$\dim V = 3$

$\dim L_1 + \dim L_2 = 2 + 2 = 4$

$3 \neq 4$

מה עושה?

$\dim V = 3$

$2 + 2 = 3 + 1$

$\dim V + \dim(L_1 \cap L_2) = 3 + 1 = 4$

התוצאה:

מטריצה

ממדרג 2

מממדים 2x3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{1 שורה} \\ \text{2 שורה} \end{matrix} \in M_{2 \times 3} \quad \boxed{1}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

הממד הראשון
הממד השני
 a_{ij}

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2,3}}$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

ממדרג n - 1 ממדרג m או ממדרג = מממדים

ל"ב ב"ב א"ל

203

$$m=n$$

הצגה של $M_n(\mathbb{R})$

$$M_{n \times 1} = \mathbb{R}^n$$

2

λA , $A+B$

כבר ידוע שהכנסה של A ו- B היא $A+B$

$A, B \in M_{m \times n}$ הם מטריצות $m \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 6 & 11 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 14 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)_{ij} := \alpha_{ij} + \beta_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = (\alpha_{ij}) \in M_{m \times n} \\ B = (\beta_{ij}) \in M_{m \times n} \end{cases}$$

$$(\lambda A)_{ij} := \lambda \alpha_{ij}$$

בין מרחיבים דבר שרירותי כפי:

$$ab = ba$$

$$1a = a$$

$$a(bc) = (ab)c$$

$$a(b+c) = ab + ac$$

~~$$AB = BA$$~~
 שרירותי

$$IA = A$$

$$A(BC) = (AB)C$$

$$A(B+C)$$

שרירותי

כפי:

$$M_{2 \times 2} \ni \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 8 & 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 11 \\ 0 \cdot 3 + 3 \cdot 8 & 0 \cdot (-5) + 3 \cdot 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 17 \\ 24 & 33 \end{pmatrix}$$

3

אם $B \in M_{n \times k}$ ו- $A \in M_{m \times n}$ אז $AB \in M_{m \times k}$

$$AB \in M_{m \times k}$$

$$\iff B \in M_{n \times k}$$

$$A \in M_{m \times n}$$

$AB, BA \in M_{n \times n}$ $AB \neq BA$, $A, B \in M_{n \times n}$, $n \geq 2$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-5) \cdot 0 & 3 \cdot 2 + (-5) \cdot 3 \\ 8 \cdot 1 + 11 \cdot 0 & 8 \cdot 2 + 11 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 8 & 49 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$2 \times 2 \quad \quad 2 \times 2 \quad \quad 2 \times 2$

$2 \times 2 \rightarrow 1377C_N$ 1

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 1 \\ 10 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \quad \quad 2 \times 3 \quad \quad 2 \times 3$

$2 \times 3 \rightarrow 1377C_N$ 2

ישן סדר גודל $m \times n$ וכל אחד מהם $m \times n$.

היינו $m \times n$ וכל אחד מהם $m \times n$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : 2 \times 3 \text{ וכל אחד מהם } 2 \times 3$$

$$\begin{aligned} A + B &= B + A & A, B \in M_{n \times n} \\ (A + B) + C &= A + (B + C) \\ \exists 0 : & A + 0 = 0 + A = A \\ \forall A \exists B : & A + B = 0 \end{aligned}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 15 & -12 \end{pmatrix}$$

3

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.5 & -4 & 2 \\ -3 & -4.5 & 2.5 \end{pmatrix}$$

4

• 'xG' > x > n $M_{m \times n}$

$R^n = M_{n \times 1}$ $\hookrightarrow$ $\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 & 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 \\ 5 \cdot 3 + (-4) \cdot 4 & 5 \cdot 4 + (-4) \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A B

2×2 2×2 2×2

5

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 6 & 3 \cdot 8 + (-2) \cdot 9 & 3 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-5) \\ 5 \cdot 5 + (-4) \cdot 6 & 5 \cdot 8 + (-4) \cdot 9 & 5 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

A B

6

!! $BA \neq AB$

~~$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$~~

$(2 \times 2)(2 \times 3) \rightarrow 2 \times 3$

$i=1, \dots, m$
 $j=1, \dots, n$

$A = (\alpha_{ij}), B = (\beta_{ij})$

$(A+B)_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$

$(\lambda A)_{ij} = \lambda \alpha_{ij}$

A B AB BA
כבר A B AB BA
כבר A B AB BA

$A, B \in M_{m \times n}$: A, B $m \times n$

$A, B \in M_{m \times n}$: A, B $m \times n$

$a[1,2]$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

7 הסקה של $\mathbb{Z}_N$ כיגור'א:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0+1 \cdot 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\mathbb{Z}_N$
 $0 \neq k$

8

גורסו כחלק של $\mathbb{Z}_N$ כיגור'א: $A^2 = 0$ לא יגור'א - $A \neq 0$.

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}$$

$$A \in M_{2 \times 3}$$

$$B \in M_{3 \times 2}$$

$$(AB)_{21} = \alpha_{21} \beta_{11} + \alpha_{22} \beta_{21} + \alpha_{23} \beta_{31} =$$

$$= \sum_{k=1}^3 \alpha_{2k} \beta_{k1}$$

α_{ij}

row = i
 column = j

$$\begin{matrix} 2 \times 2 & & 3 \times 2 \\ 2 \times 3 & & 3 \times 2 \\ A & B \\ 3 \times 2 & & 2 \times 3 \\ B & A \\ 3 \times 3 \end{matrix}$$

סדר, אבסורדיות, נגדיות

$$i=1, \dots, m$$

$$j=1, \dots, p$$

$$(AB)_{ij} := \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \beta_{kj}$$

$$AB \in M_{m \times p} \iff \begin{cases} A \in M_{m \times n} \\ B \in M_{n \times p} \end{cases}$$

$$AB \neq BA, \text{ בדרך כלל}$$

תכונות של מכפלה

$$(m \times n) \cdot (n \times p) = (m \times p)$$

$$A \in M_{m \times n} \quad B \in M_{n \times p} \quad C \in M_{p \times q}$$

$$A \in M_{m \times n} \quad B, C \in M_{n \times p}$$

$$A, B \in M_{m \times n} \quad C \in M_{n \times p}$$

אסוציאטיביות

$$(AB)C = A(BC) \quad (*)$$

$$A(B+C) = AB + AC \quad (**)$$

$$(A+B)C = AC + BC \quad (***)$$

$$A = (\alpha_{ij})$$

$$B = (\beta_{ij})$$

$$C = (\gamma_{ij})$$

הוכחה

$$i=1, \dots, m \quad j=1, \dots, q \quad \sum_{k=1}^p ((AB)C)_{ij} = (A(BC))_{ij} \quad \text{: 3}$$

Ⓚ

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{k=1}^p (AB)_{ik} \gamma_{kj} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{l=1}^n \alpha_{il} \beta_{lk} \right) \gamma_{kj} = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \alpha_{il} \beta_{lk} \gamma_{kj} =$$

$$(AB)_{ik} = \sum_{l=1}^n \alpha_{il} \beta_{lk}$$

! super (a b) c = a (b c) $\sum$ $\sum$ $\sum$ $\sum$

$$= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^p \alpha_{il} \beta_{lk} \gamma_{kj} = \sum_{l=1}^n \alpha_{il} \left(\sum_{k=1}^p \beta_{lk} \gamma_{kj} \right) = \sum_{l=1}^n \alpha_{il} (BC)_{lj} = (A(BC))_{ij}$$

הוכחה

Ⓚ

הוכחה

$(BC)_{lj}$

$$((AB)C)_{ij} = (A(BC))_{ij}$$

הוכחה

$i=1, \dots, m$
 $j=1, \dots, q$

$$M_n := M_{n \times n}$$

$$I_n B = B ; A I_n = A : I_n \in M_n, \exists n \in \mathbb{N} \rightarrow n \in \mathbb{N} \quad \underline{\underline{\mathbb{C} \in \mathbb{N}}}$$

$$B \in M_{n \times m}, A \in M_{m \times n} \quad \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9

$$I_2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

$$A I_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

עבור $n=3$:

10

|| עבור $n \in \mathbb{N}$ הרי $A = (a_{ij}) \in M_n$ האנטי-מטריצה $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ מהווים את האלכסון של A .

לכן, $I_n \in M_n$ האנטי-מטריצה I_n היא מטריצה $n \times n$ עם 1 על האלכסון ו- 0 בשאר המקומות.

"Kronecker δ δ_{ij} "

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

:" δ_{ij} " / NO

$$I_n = (\delta_{ij})_1^n = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$(I)_{ij} = \delta_{ij} \quad : / \delta$$

$$\delta_{12} = 0$$

$$\delta_{10,10} = 1$$

$$\delta_{10,11} = 0$$

$$A = (a_{ij})_1^n \quad A \in M_n \quad \text{דיוכנסה}$$

$$(I_n A)_{ij} = \sum_{k=1}^n (I_n)_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} a_{kj} = \delta_{ii} a_{ij} = a_{ij} \quad \text{S/O}$$

$$k=i \iff \delta_{ik} \neq 0$$

$$I_n A = A \quad / \delta$$

ל.ע.נ

!! δ_{ij}

$$AB = BA = I$$

: B

אם $A \in M_n$ אז B קיימת

מצוינות הפסוק

A הפסוק אם קיים B : $AB=BA=I$
 במקרה כזה, B הפסוק (הפסוק) A -

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

11

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{11} + \frac{6}{11} & \frac{2}{11} - \frac{2}{11} \\ \frac{15}{11} - \frac{15}{11} & \frac{6}{11} + \frac{5}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$AB=I_2$, $BA=I_2$ $\Leftrightarrow$ B הפסוק A -

$$B = A^{-1}$$

אין למצוא A^{-1} ?

אם מוגדרים - צריך "עזר" בעזרת Γ : Group

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ \textcircled{3} & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{11} & -3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \textcircled{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{11} & \frac{1}{11} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{11} & \frac{1}{11} \end{array} \right)$$

A I_2 I_2 A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} \quad | \quad \text{p. 8}$$

∴ B ist invertierbar

$$A \text{ invertierbar} = A^T \text{ invertierbar}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(A \ B)^T = B^T \ A^T$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A I_n = I_n A = A$$

A $\int \delta$

$$AB = BA = I_n$$

$$AC = CA = I_n$$

Coen (יחידה $\sqrt{C}$ ב M_n דו-כיוונית)

$B, C \in M_n$ $\implies$ $A \in M_n$ $\sqrt{C}$ נ"ח $n \times n$

$$B = C \text{ 's/c}$$

דו-כיוונית

$$(BA)C = B(AC)$$

$$I_n C = B I_n$$

$\sqrt{C}$ $C = B$ $\int \delta$

Coen

נניח $A, B \in M_n$ הריבוי

הן הריבוי $B^{-1}A^{-1}$ הריבוי AB .

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n \quad (1) \quad \text{דוכח: } \underline{\text{דוכח:}}$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n \quad (2)$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A \underbrace{(BB^{-1})}_{I_n} A^{-1} = \underbrace{AI_n}_A A^{-1} = AA^{-1} = I_n \quad (1)$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1} \underbrace{(A^{-1}A)}_{I_n} B = \underbrace{B^{-1}I_n}_{B^{-1}} B = B^{-1}B = I_n \quad (2)$$

Se.

$$(AB)C = A(BC)$$

$$AI_n = I_n A = A$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim ?$$

!תעק /%

נקודה: A איז הפיכה.

$$A^{-1} = ?$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

12

נתונה מטריצה $Ax=0$ כ/א $A = \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ k & k^2 & 1 \\ k^2 & 1 & k \end{pmatrix}$

מצא עבור אלו ערכים ממשיים של k הפתרונות מהווים משור עבור זקן נאטי הצירים.

במילים אחרות: צ"ל ערכים של k עבורם הפתרונות מהווים משפחה דו-פרמטרי.

הדרגת המטריצה: $3 - \text{מספר השרשרת} = 2$
 מספר השרשרת: מספר העצמים

$$\text{rk}(A) = 1$$

לכן נחפש k : הצורה המזווגת של A מכילה שורה אמת $(0 \neq)$

$$\begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ k & k^2 & 1 \\ k^2 & 1 & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 0 & 1-k^3 \\ 0 & 1-k^3 & k-k^4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 1-k^3 & k(1-k^3) \\ 0 & 0 & 1-k^3 \end{pmatrix}$$

$$R_2 - k R_1 \rightarrow R_2$$

$$R_3 - k^2 R_1 \rightarrow R_3$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$1-k^3=0$$

$$- \text{כז' נקודת } A : \text{rk}(A)=1$$

$$k=1 \Leftrightarrow \begin{cases} k^3=1 \\ k \in \mathbb{R} \end{cases} //$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מצא את כל הפתרונות למשוואה

המטריצה המורחבת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\rightsquigarrow$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

ניתן לבחור את x_1, x_2 כמשתנים חופשיים: $x_3 = 1 - x_1 - x_2$

$$\begin{aligned} x_1 &=: s \\ x_2 &=: t \\ x_3 &= 1 - s - t \end{aligned}$$

ניתן לרשום את הפתרון הכללי בצורה:

$$X(s, t) = \begin{pmatrix} s \\ t \\ 1-s-t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הצגה פרמטרית של משווא
(2 במשתנים)

שצמודי הנק' $(0, 0, 1)$

מצא ערכי גאון ערכיט גא k הגאכר'ג $A = \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ k & k^2 & 1 \\ k^2 & 1 & k \end{pmatrix}$ הג'כג

ג'ג'ג: A הג'כג $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

ע'ג גקוגס:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ \textcircled{k} & k^2 & 1 \\ \textcircled{k^2} & 1 & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 0 & 1-k^3 \\ 0 & 1-k^3 & k-k^4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 1-k^3 & k(1-k^3) \\ 0 & 0 & 1-k^3 \end{pmatrix}$$

$R_2 - k R_1 \rightarrow R_2$ $R_2 \leftrightarrow R_3$
 $R_3 - k^2 R_1 \rightarrow R_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & k & k^2 \\ k & k^2 & 1 \\ k^2 & 1 & k \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 1-k^3 & k(1-k^3) \\ 0 & 0 & 1-k^3 \end{vmatrix} = -(1-k^3)^2$$

$\det =$ כגל גא'ג'ג
ג'גל כגס'ג

$k \neq 1 \Leftrightarrow A$ הג'כג $\sqrt{k}$

עקרונות אקסטריון

$$R_i + \lambda R_j \rightarrow R_i \quad (\varepsilon_2)$$

$$\lambda R_i \rightarrow R_i \quad (\lambda \neq 0) \quad (\varepsilon_2)$$

$$R_i \leftrightarrow R_j \quad (\varepsilon_3)$$

מכריז וג אקסטריון

קשר בין מכריז וג אקסטריון ופירוק אקסטריון ?

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{cccc}
 \textcircled{2} & 8 & 4 & 2 \\
 2 & 5 & 1 & 5 \\
 4 & 10 & -1 & 1
 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc}
 0 & 3 & 3 & -3 \\
 2 & 5 & 1 & 5 \\
 4 & 10 & -1 & 1
 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{cccc}
 0 & 1 & 1 & -1 \\
 2 & 5 & 1 & 5 \\
 4 & 10 & -1 & 1
 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc}
 0 & 1 & 1 & -1 \\
 2 & 5 & 1 & 5 \\
 0 & 0 & -3 & -9
 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_3 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc}
 0 & 1 & 1 & -1 \\
 2 & 5 & 1 & 5 \\
 0 & 0 & 1 & 3
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

3×4
 $R_1 - R_2 \rightarrow R_1$
 $\frac{1}{3}R_1 \rightarrow R_1$
 $R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3$
 $-\frac{1}{3}R_3 \rightarrow R_3$

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{cccc}
 \textcircled{2} & 5 & 1 & 5 \\
 0 & 1 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & 3
 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc}
 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\
 0 & 1 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & 3
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$
 $\frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1$

אמן בעזרתך ע"י כפל בהתכונות:

$$\left(\begin{array}{ccc}
 1 & -1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc}
 2 & 8 & 4 & 2 \\
 2 & 5 & 1 & 5 \\
 4 & 10 & -1 & 1
 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc}
 0 & 3 & 3 & -3 \\
 2 & 5 & 1 & 5 \\
 4 & 10 & -1 & 1
 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc}
 \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc}
 0 & 3 & 3 & -3 \\
 2 & 5 & 1 & 5 \\
 4 & 10 & -1 & 1
 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc}
 0 & 1 & 1 & -1 \\
 2 & 5 & 1 & 5 \\
 4 & 10 & -1 & 1
 \end{array} \right)$$

1

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 4 & 10 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$E_1(\frac{1}{2}) \quad E_{12} \quad E_3(-\frac{1}{3}) \quad E_{32}(-2) \quad E_1(\frac{1}{3}) \quad E_{12}(-1)$

$\int_{\mathcal{M}} \omega \in \mathbb{R}^N$ הנגזרת היא פונקציה $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$

$$E_{ij}(\lambda)$$

$$R_i + \lambda R_j \rightarrow R_i$$

$$E_i(\lambda)$$

$$\lambda R_i \rightarrow R_i$$

$$(\lambda \neq 0)$$

$$E_{ij}$$

$$R_i \leftrightarrow R_j$$

$$n=3$$

$$E_{13}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(E_{13}(\lambda)) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\det(E_{ij}) = -1 \neq 0$$

(n > 0)

$$E_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = a \cdot d \cdot f$$

$$\det(E_i(\lambda)) = \lambda \quad (\lambda \neq 0)$$

$$\det E_{ij}(\lambda) = 1 \quad \textcircled{1} \quad \text{לפי } n \text{ ש"ס} \quad \underline{\underline{\text{לפי } n}}$$

$$\det E_i(\lambda) = \lambda \quad \textcircled{2}$$

$$\det E_{ij} = -1 \quad \textcircled{3}$$

בסך, בל נכיר כי אכן נ"ל הפ"ה.

$$E_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(E_{12}(\lambda))^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{ij}(\lambda) = (E_{ji}(\lambda))^T$$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \left(\begin{array}{c|c|c} \alpha_{11} + \lambda \alpha_{21} & \alpha_{12} + \lambda \alpha_{22} & \alpha_{13} + \lambda \alpha_{23} \\ \hline \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{array} \right)$$

$$R_1 + \lambda R_2 \rightarrow R_1$$

$$n=2$$

$$E_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det E_{12}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - \lambda \cdot 0 = 1$$

ה'כ"ה $E_{12}(\lambda) \mid \delta$

$$E_{12}(\lambda) \text{ ה'כ"ה } \sqrt{k_{NE}} \text{ ה'כ"ה } \sqrt{3_N} \text{ ה'כ"ה } \sqrt{3} \text{ ה'כ"ה } \Leftrightarrow R_1 + \lambda R_2 \rightarrow R_1 \text{ ה'כ"ה } \sqrt{r} \text{ ה'כ"ה}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \lambda \alpha_{21} & \lambda \alpha_{22} & \lambda \alpha_{23} \end{pmatrix}$$

$$2 \times 2$$

$$(\lambda \neq 0)$$

$$\lambda R_2 \rightarrow R_2$$

$$n=2$$

$$E_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det E_2(\lambda) = \lambda$$

$$\text{ה'כ"ה } E_2(\lambda) \Leftarrow \lambda \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{pmatrix}$$

$2 \times 2 \quad \quad 2 \times 3$

$R_i \leftrightarrow R_j$

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det E_{12} = -1 \neq 0$
 $\Rightarrow E_{12}$ invertible

Case

$\Rightarrow$ In $\mathbb{C}$ we have $R_i + \lambda R_j \rightarrow R_i$ Gauss step (k)

$$E_{ij}(A) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(i) (j)

$$E_i(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

(i) (i)

$\Rightarrow$ In $\mathbb{C}$ we have $\lambda R_i \rightarrow R_i$ Gauss step (j)
 $\lambda \neq 0$

$$E_{ij} :=$$



1101

$$E_{12} =$$

E_{12}

$$h=3$$

2

$$R_1 + \lambda R_2 \rightarrow R_1$$

פחולג היבוכה:

$$R_1 - \lambda R_2 \rightarrow R_1$$

E_{12}

$\Rightarrow$

$$E_{ij}(\mu) E_{ij}(\lambda) = E_{ij}(\lambda + \mu)$$

$$E_{ij}(0) = I_n \quad \underline{\underline{\text{הערה:}}}$$

Claim $E_{ij}(\lambda)$ הפיכה לכל λ, i, j .

בוכחה 1: נקח C_n כי $A \in M_{n \times n}$, A כל סכום $E_{ij}(\lambda)$ ו $E_{ij}(\mu)$ נקיים $R_i + \lambda R_j \rightarrow R_i$ ו $R_i + \mu R_j \rightarrow R_i$

(2) כל סכום A ו $E_{ij}(\mu)$ ו $E_{ij}(\lambda)$ נקיים $R_i + \mu R_j \rightarrow R_i$ ו $R_i + \lambda R_j \rightarrow R_i$

לכן כל סכום $E_{ij}(\mu) E_{ij}(\lambda)$ ו $E_{ij}(\lambda + \mu)$ נקיים $R_i + \lambda R_j + \mu R_j \rightarrow R_i$

$$R_i + (\lambda + \mu) R_j \rightarrow R_i$$

נסקו: כל סכום $E_{ij}(\lambda + \mu) = E_{ij}(\mu) E_{ij}(\lambda)$

בה נתון $A \in M_{n \times n}$ ו C_n כל סכום A ו $E_{ij}(\lambda)$ ו $E_{ij}(\mu)$ נקיים

$$E_{ij}(\mu) E_{ij}(\lambda) = E_{ij}(\lambda + \mu) \quad \text{לכן:}$$

$$E_{ij}(-\lambda) E_{ij}(\lambda) = E_{ij}(0) = I_n, \mu = -\lambda \text{ נגזר}$$

$$E_{ij}(\lambda) E_{ij}(-\lambda) = E_{ij}(0) = I_n$$

$$E_{ij}(-\lambda) = (E_{ij}(\lambda))^{-1}$$

$$E_{ij}(\lambda) \text{ הפיכה}$$

הוכחה 2: הפיכה הפוכה - $R_i + \lambda R_j \rightarrow R_i$ ו- $R_i - \lambda R_j \rightarrow R_i$ $\Rightarrow I_n = E_{ij}(-\lambda) E_{ij}(\lambda)$

הוכחה 3: $E_{ij}(-\lambda) = (E_{ij}(\lambda))^{-1}$ $\Rightarrow$ הפיכה

הוכחה 3: $E_{ij}(\lambda)$ הפיכה $\Rightarrow$ $\det E_{ij}(\lambda) = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1$

$\Rightarrow \det E_{ij}(\lambda) = 1 \neq 0$ $\Rightarrow$ הפיכה

הוכחה

Coen $E_i(\lambda)$ הפ'כה עבור כל $\lambda \neq 0$.

$$E_i(\lambda)A \quad A \in M_{n \times m}$$

הוכחה 1: כפל ב- $E_i(\lambda)$ מעביר $R_i \rightarrow \lambda R_i$. הפעולה הנגדית היא $\frac{1}{\lambda} R_i \rightarrow R_i$ שהיא כפל ב- $E_i(\frac{1}{\lambda})$.

נסקנה: $E_i(\frac{1}{\lambda}) = (E_i(\lambda))^{-1}$

הוכחה 2: $\det E_i(\lambda) = \lambda \neq 0$ לכן $E_i(\lambda)$ הפ'כה.

Coen E_{ij} הפ'כה לכל i, j .

הוכחה 1: כפל בכל M_n מעביר $R_i \leftrightarrow R_j$. הפעולה הנגדית: $R_j \leftrightarrow R_i$ שהיא אותה.

נסקנה: $E_{ij} = (E_{ij})^{-1}$

1/6" דען א צאן 1/6"

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2 \\ \textcircled{5}x_1 + 9x_2 = 2 \end{cases}$$

$$R_2 - \frac{5}{3}R_1 \rightarrow R_2$$

$$E_{21}\left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \tilde{A} = \begin{pmatrix} \textcircled{3} & -1 & | & 2 \\ 0 & \frac{32}{3} & | & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$E_1\left(\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} \textcircled{3} & -1 & | & 2 \\ 0 & \frac{32}{3} & | & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & | & \frac{2}{3} \\ 0 & \textcircled{\frac{32}{3}} & | & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$E_2\left(\frac{3}{32}\right) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & | & \frac{2}{3} \\ 0 & \textcircled{\frac{32}{3}} & | & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & | & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} 3 & -1 & | & 2 \\ 5 & 9 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{21}\left(-\frac{5}{3}\right) \tilde{A}$$

$$E_{21}\left(-\frac{5}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

העצם/ציריג מזורז.

3"02

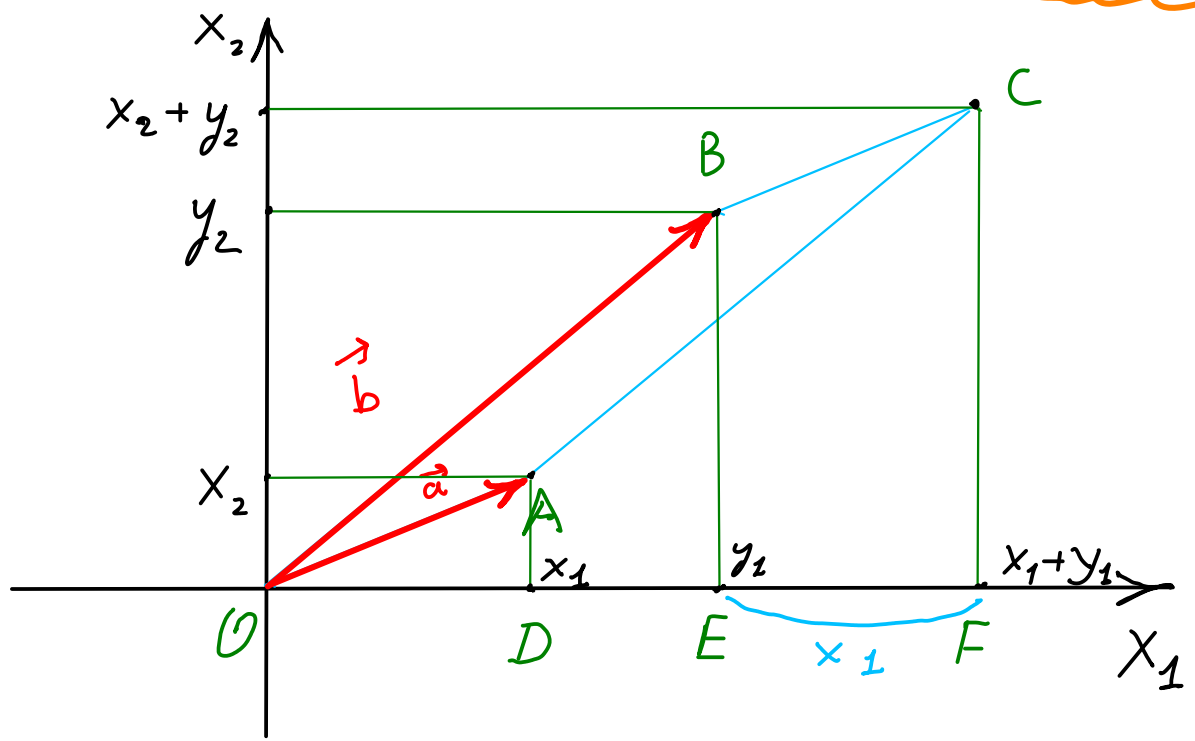
1

:p.10'o

$$E_2\left(\frac{3}{23}\right)E_1\left(\frac{1}{3}\right)E_{21}\left(-\frac{5}{3}\right) \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 9 & 2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{8} \end{array} \right)$$

הצורה הזו

הצורה הזו



$$[\vec{a}] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

הצורה הזו

$$S_{\square} = S_{OBCA} = ?$$

1

$$[\vec{b}] = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$[\vec{a} + \vec{b}] = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$S_{\square} = S_{\triangle OBE} + S_{BCFE} - S_{\triangle OAD} - S_{ACFD} =$$

$$= \frac{1}{2} y_1 y_2 + \frac{1}{2} x_1 (y_2 + x_2 + y_2) - \frac{1}{2} x_2 x_1 - \frac{1}{2} y_1 (x_2 + x_2 + y_2) =$$

$$= \frac{1}{2} y_1 y_2 + \frac{1}{2} x_1 x_2 + \frac{1}{2} \cdot 2 x_1 y_2 - \frac{1}{2} x_1 x_2 - \frac{1}{2} y_1 \cdot 2 x_2 - \frac{1}{2} y_1 y_2 = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

$$S(\vec{a}, \vec{b}) = |x_1 y_2 - x_2 y_1| : \text{הערך המוחלט של ההפרש בין המכפלה הסקלרית והמכפלה הווקטורית}$$

$$\pm S(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{x_1 y_2 - x_2 y_1} \quad \text{הכיוון}$$

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad \text{קנין הווקטוריות מסדר 2,}$$

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad \text{נרש}$$

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ גלויים וליניאריים} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \quad \text{הקנה תלוגה כ'א ר:}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad \text{הקנה מסדר 2, } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$(\vec{v} \in \text{Image } A \neq \emptyset) \quad \vec{v} \in \text{Image } A \Leftrightarrow \det A = 0 \quad \text{נרש}$$

determinant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} := \alpha\delta - \gamma\beta$$

$$\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \delta & \beta \end{vmatrix} = \gamma\beta - \alpha\delta = -(\alpha\delta - \gamma\beta) = -\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha & \gamma \\ \lambda\beta & \delta \end{vmatrix} = \lambda\alpha\delta - \lambda\beta\gamma = \lambda(\alpha\delta - \beta\gamma)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \gamma \\ \beta_1 + \beta_2 & \delta \end{vmatrix} = (\alpha_1 + \alpha_2)\delta - (\beta_1 + \beta_2)\gamma = \\ = (\alpha_1\delta - \beta_1\gamma) + (\alpha_2\delta - \beta_2\gamma)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = 0 \iff \exists \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \delta & \beta \end{vmatrix}$$

הכנסה "אלו"
: אלף ג

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha & \gamma \\ \lambda\beta & \delta \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \gamma \\ \beta_1 + \beta_2 & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma \\ \beta_1 & \delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma \\ \beta_2 & \delta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}$$

: 2×2 $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ $\mathbb{R}$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$$

$$\det(C_1, C_2) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda C_1, C_2$$

$$\det(C_2, C_1) = -\det(C_1, C_2)$$

$$\det(\lambda C_1, C_2) = \lambda \det(C_1, C_2)$$

$$\det(C_1' + C_1'', C_2) = \det(C_1', C_2) + \det(C_1'', C_2)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \overset{C_1}{\alpha} & \overset{C_2}{\gamma} \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \delta & \beta \end{vmatrix} \quad \text{הכנסה ושינוי סימן}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda \alpha & \gamma \\ \lambda \beta & \delta \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \gamma \\ \beta_1 + \beta_2 & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma \\ \beta_1 & \delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma \\ \beta_2 & \delta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}$$

נכנסים לזוגי ויכוחות 3×3

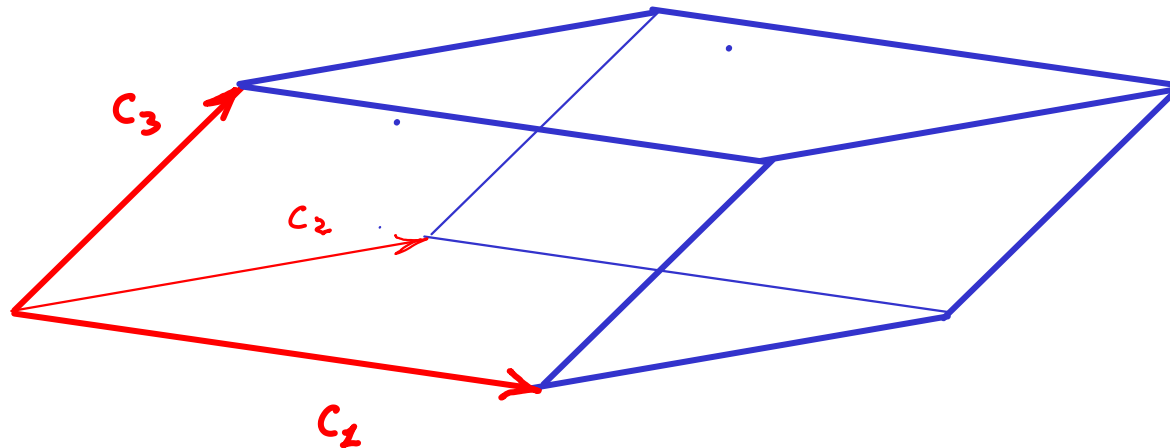
$$\det(C_1, C_2, C_3) = -|C_2, C_1, C_3|$$

$$|C, C, C| = 0$$

בכך

$$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}^3$$

$$\det(C_1, C_2, C_3) = \pm \begin{matrix} \text{הנפח של} \\ \text{המשולש} \\ \text{הנוצר} \\ \text{על ידי } C_1, C_2, C_3 \end{matrix}$$



$$: e \text{ ל } e_N \text{ ל } e_{N+1}$$

$$\det(C_1, C_2, C_3) = 0 \iff C_1, C_2, C_3 \text{ הם וקטורים ליניאריים תלויים} \iff \exists \lambda \text{ כזה ש- } C_1, C_2, C_3$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \alpha_{22} \alpha_{33} - \alpha_{11} \alpha_{23} 0 - \alpha_{12} 0 \alpha_{33} + \alpha_{12} \alpha_{23} 0 + \alpha_{13} \alpha_{21} 0 - \alpha_{13} \alpha_{22} 0 =$$

$$= \alpha_{11} \alpha_{22} \alpha_{33}$$

Gauß-Addition

$$\det(C_1, C_2, C_3) = \det(C_1 + \lambda C_2, C_2, C_3) = \det(C_1, C_2, C_3) + \det(\lambda C_2, C_2, C_3) = \quad C_i + \lambda C_j \rightarrow C_i \quad (\varepsilon_1)$$

$$C_1 + \lambda C_2 \rightarrow C_1$$

$$= \det(C_1, C_2, C_3) + \lambda \det(C_2, C_2, C_3) = \det(C_1, C_2, C_3)$$

$\searrow 0$

$$\det(C_1' + C_1'', C_2) = \det(C_1', C_2) + \det(C_1'', C_2)$$

$$\det(\lambda C_1, C_2) = \lambda \det(C_1, C_2)$$

$$\det(\lambda C_1, C_2, C_3) = \lambda \det(C_1, C_2, C_3) \quad \lambda C_i \rightarrow C_i \quad (\lambda \neq 0) \quad (\varepsilon_2)$$

$$\det(C_2, C_1, C_3) = -\det(C_1, C_2, C_3) \quad C_i \leftrightarrow C_j \quad (\varepsilon_3)$$

$$\begin{vmatrix} \textcircled{2} & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \textcircled{3} & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot (-4) = -4$$

$R_1 - 2R_3 \rightarrow R_1$ $R_2 \leftrightarrow R_3$ $R_1 \leftrightarrow R_2$ $R_2 + 3R_3 \rightarrow R_2$ $R_2 \leftrightarrow R_3$

$R_2 - R_3 \rightarrow R_2$

$\neq 0$
 $\rightarrow$ $\neq 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) = -6 + 2 = -4$$

$C_3 - C_2 \rightarrow C_3$ $\rightarrow$ $\neq 0$

Laplace פיתוח

פיתוח לפי שורה 1:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} (\alpha_{21} \alpha_{33} - \alpha_{23} \alpha_{31}) + \alpha_{13} (\alpha_{21} \alpha_{32} - \alpha_{22} \alpha_{31}) = \\
 = \alpha_{11} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} = \\
 = \alpha_{11} M_{11} - \alpha_{12} M_{12} + \alpha_{13} M_{13}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{\alpha_{11}} & \cancel{\alpha_{12}} & \cancel{\alpha_{13}} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \cancel{\alpha_{11}} & \cancel{\alpha_{12}} & \cancel{\alpha_{13}} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} \cancel{\alpha_{11}} & \cancel{\alpha_{12}} & \cancel{\alpha_{13}} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) = -6 + 2 = -4$$

כנזיר

$$C_3 - C_2 \rightarrow C_3 \quad \begin{matrix} \text{נציב} \\ \text{לפי הנוסחה} \end{matrix}$$

$$1 \cdot M_{31} - 0 \cdot M_{32} + 0 \cdot M_{33} = M_{31}$$

$\det A$ מוגדר כך שיהיה נכונה הבחנה.

משפט נניח $A \in M_n$, אז $\det A = 0 \iff$ בין שורות A (או עמודות) קיימת אי-תלות.

מסקנה: $\det A \neq 0 \iff A$ הפיכה

תכונות נוספות

נניח R_i היא השורה מספר i של המטריצה:

$$\begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix}$$

$R_1 = R'_1 + R''_1$ המשפט הנ"ל קרוי לפטור גאוס

$$R'_1 = (1, 2, 3) \quad R''_1 = (-3, 0, 8) \Rightarrow R_1 = R'_1 + R''_1 = (-2, 2, 11)$$

$$\begin{vmatrix} R'_1 + R''_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R'_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R''_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix}$$

משפט



$$\begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i + \lambda R_j \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow R_i = R_j \quad (i > j)$$

(i > j)

$$\begin{vmatrix} \lambda R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix}$$

2

$$\begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix}$$

2

צדן

(k)

הכנסה נכונה בסך הכל $n=3$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \alpha_{22} \alpha_{33}$$

$$\det(A^T) = \det(A) \quad (?)$$

צדן (Laplace)

$n=3$

הכנסה נכונה בסך הכל $n=3$

$$(-1)^{1+1} = 1$$

$$(-1)^{1+2} = -1$$

$$(-1)^{1+3} = 1$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

המינור M_{11}

המינור M_{12}

המינור M_{13}

$$= \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} = \alpha_{11} M_{11} - \alpha_{12} M_{12} + \alpha_{13} M_{13} =$$

$$= \sum_{i=1}^3 (-1)^{1+i} \alpha_{1i} M_{1i}$$

ע"מ Laplace על כ"ס i

$$\det(\alpha_{ij}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \alpha_{ij} M_{ij}$$

ע"מ Laplace על כ"ס j

$$\det(\alpha_{ij}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \alpha_{ij} M_{ij}$$

$$\det(AB) = \det(BA) \quad \text{נכונות}$$

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

$$A, B \in M_n \quad \underline{\text{Coen}}$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} \quad \text{נכון}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 3 & 8 & 0 \\ 7 & -3 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 8 & 0 \\ -7 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cancel{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +1 \quad (2)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad (2)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & -9 & 13 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot M_{21} = (-1) \cdot (-61) = 61$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -9 & 13 \end{vmatrix} = -52 - 9 = -61$$

$$\begin{aligned} R_4 - R_3 &\rightarrow R_4 \\ R_3 - R_2 &\rightarrow R_3 \\ R_2 - R_1 &\rightarrow R_2 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} (-1)^{2+1} (-1)^{2+1} \cdot 5 = -5$$

∴ > 0, >

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{=2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} M_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 0 - 5 \cdot 1) = -5$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \left(3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right) - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \left(3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \right) - 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 21 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 24 = 21(9-1) - 24 =$$

$$= 8(21 - 3) = 8 \cdot 18 = 144$$

מספרים מרוכבים

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2} =$$

$$= 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

1

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 5 \cdot 4}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2\sqrt{-1}$$

נסמן: $i = \sqrt{-1}$ "יחידה מצומצמת"

$$i^2 = -1$$

מצב כזה לא מתקיים בעולם של מספרים.

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

2

ניתן לראות מה המצב

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$$

מצב זה:

$$\lambda = \rho + i\omega$$

ρ, ω מספרים רגילים

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \in M_2 \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad AI = IA = A$$

$$\mathbb{R} \ni \rho, \omega \quad \lambda = \rho + i\omega \quad \text{מספר מרוכב}$$

$$\rho \text{ החלק הממשי של } \lambda$$

$$\omega \text{ החלק המזונו של } \lambda$$

התאם המזונו של הממשי

$$\rho =: \operatorname{Re}(\lambda)$$

$$\omega =: \operatorname{Im}(\lambda)$$

$\mathbb{C}$ הקו המזונו של הממשי

$\mathbb{C} \rightarrow \div, \times, -, +$ արտադրական

$$\lambda_1 = 1 + 3i$$

$$\lambda_2 = 3 - 4i$$

4

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (1 + 3i) + (3 - 4i) = \underline{1} + \underline{3i} + \underline{3} - \underline{4i} = 4 - i$$

$$i^2 = -1$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = (1 + 3i) - (3 - 4i) = 1 + 3i - 3 + 4i = -2 + 7i$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = (1 + 3i)(3 - 4i) = 3 - 4i + 9i - 12 \underbrace{i^2}_{=-1} = 15 + 5i$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = ?$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \rho + i\omega \text{ արտ} \\ \overline{\lambda} &= \rho - i\omega \text{ արտ} \end{aligned} \quad ||$$

$$\overline{\lambda} = 2 + 3i \quad \Leftarrow \quad \lambda = 2 - 3i \quad \boxed{5}$$

התלק, הממשי $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) = \operatorname{Re}(\lambda)$
 התלק, הממשי $\operatorname{Im}(\overline{\lambda}) = -\operatorname{Im}(\lambda)$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$\overline{\lambda} = -i \quad \Leftarrow \quad \lambda = i \quad \boxed{6}$$

$$\overline{\lambda} = 2 \quad \Leftarrow \quad \lambda = 2 \quad \boxed{7}$$

λ^* : הממשי, הממשי

לשם $\lambda \cdot \overline{\lambda}$ מספר ממשי חיובי, $\lambda \neq 0$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

הוכחה: (1) $\lambda = p + i\omega$, $\overline{\lambda} = p - i\omega$

$$\lambda \overline{\lambda} = (p + i\omega)(p - i\omega) = p^2 - (i\omega)^2 = p^2 - i^2 \omega^2 = p^2 - (-1) \omega^2 = p^2 + \omega^2 \geq 0$$

$$\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = \omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 + \omega^2 = 0 \quad (2)$$

לשם

$$\lambda \bar{\lambda} = ?$$

$$\lambda = 1 - 2i$$

$$\bar{\lambda} = 1 + 2i$$

$$\lambda \bar{\lambda} = (1 - 2i)(1 + 2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ (מספר מרוכב) $\sqrt{\rho^2 + \omega^2}$ $\lambda = \rho + i\omega$ $\rho, \omega \in \mathbb{R}$

$$|\lambda| := \sqrt{\rho^2 + \omega^2}$$

$$\lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2$$

לענין

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$\mathbb{R} \ni \lambda = \rho + 0 \cdot i$$

$|\lambda|$ מסתמך על המרחק בין הנקודה λ לראש הצירים (0,0)

$$|\lambda| = \sqrt{\rho^2 + 0^2} = \sqrt{\rho^2} = |\rho|$$

ρ (מספר ממשי)

$$\sqrt{(-2)^2} = 2 = |-2|$$

$$|\lambda| = ? , \lambda = \rho + i \cdot 0$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(3) &= 3 \\ \operatorname{Im}(3) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1 \overline{\lambda_2}}{\lambda_2 \overline{\lambda_2}} = \frac{\lambda_1 \overline{\lambda_2}}{|\lambda_2|^2} = \frac{(1+3i)(3+4i)}{3^2 + (-4)^2} = \frac{3+9i+4i+12i^2}{9+16} =$$

$$= \frac{-9+13i}{25}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = -\frac{9}{25}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = \frac{13}{25}$$

$$\lambda_1 = 1+3i$$

$$\lambda_2 = 3-4i$$

$$\frac{1}{i} = -i$$

$$\frac{1}{i} = \frac{1 \cdot \overline{i}}{|i|^2} = \frac{-i}{1} = -i$$

לנקודה $(1,2)$ מ'צג
 א-ה מספר $1+2i$

פירוש גיאומטרי למספרים מרוכבים

הגאומטריה בין מספרים מרוכבים
 ובין נקודות במישור E_2 עם
 מדידת צירים קרטזית.

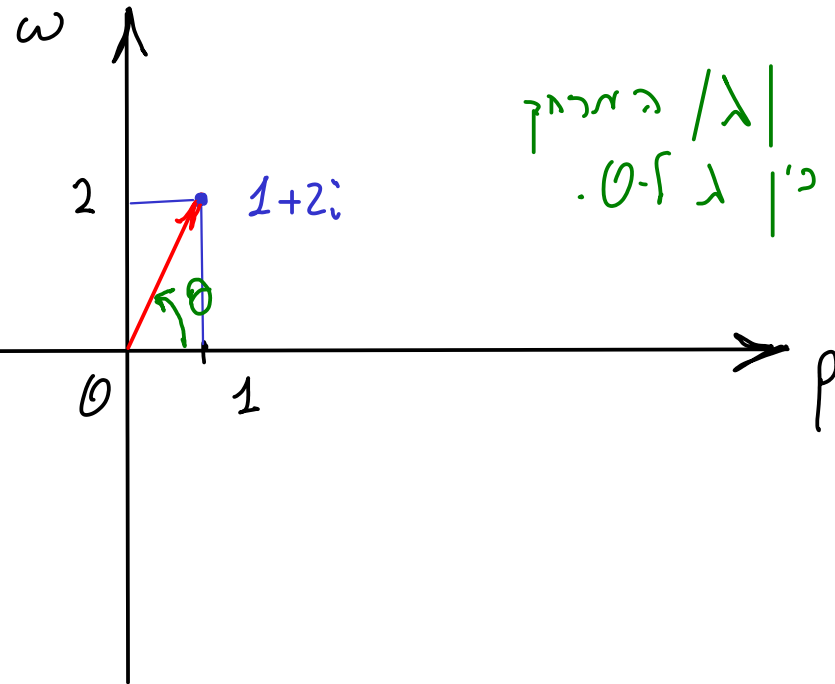
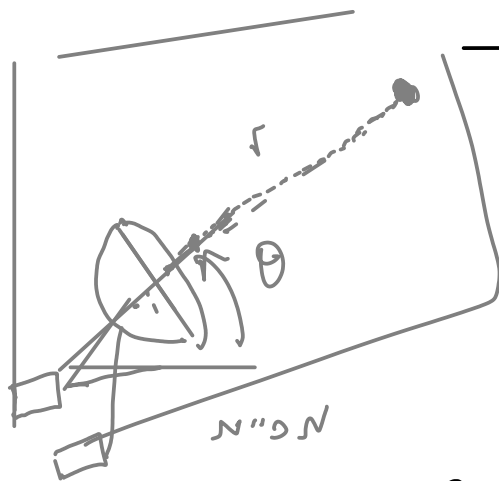
חיבור של מספרים מרוכבים
 בעצם חיבור של וקטורים הממשיים.

קואורדינטה קוטבית: $(|\lambda|, \theta)$

$$\begin{cases} |\lambda| = \sqrt{\rho^2 + \omega^2} \\ \theta = \arctg \frac{\omega}{\rho} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = |\lambda| \cos \theta \\ \omega = |\lambda| \sin \theta \end{cases}$$

$$(1,2) \leftrightarrow 1+2i$$



$|\lambda|$ הימני
 בין λ ל-0.

יש 2 הצגות לכל מספר מרוכב:

ציור תיבור/קיסור: $\rho + i\omega$
 ציור כפף/תיילוק: $(\theta, |\lambda|)$
 ההצגה הקרטזית: $\rho + i\omega$
 ההצגה הקוטבית (פולרית): $(\theta, |\lambda|)$

$$\lambda = \rho + i\omega = |\lambda| \cos \theta + |\lambda| \sin \theta \cdot i = |\lambda| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

בינאים דסימל $e^{i\theta}$ פנוי.
 אס מה?

$e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta$

נסק ד ← מהס קטבונת מסקול:

האם נכון $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$?

כ/!!!

לכל n, m :

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

$$\underbrace{a \cdots a}_n \cdot \underbrace{a \cdots a}_m = \underbrace{a \cdots a}_{n+m}$$

$$\rho_1 + i\omega_1 = \rho_2 + i\omega_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \omega_1 = \omega_2 \end{cases}$$

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Coen

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) =$$

הוכחה:

$$= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) =$$

זהו כביכול

$\cos(\theta_1 + \theta_2)$

$\sin(\theta_1 + \theta_2)$

זהו כביכול

$$= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

פ.ע.נ

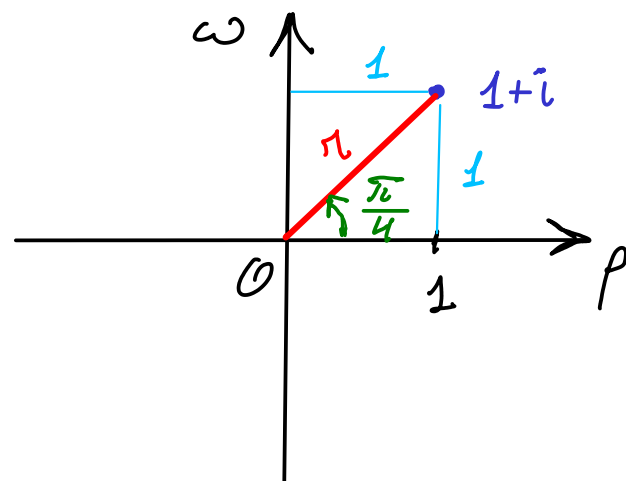
$$\int_0^\theta |e^{i\theta}| = 1$$

Coen

פ.ע.נ

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = \sqrt{1} = 1$$

הוכחה:



$$r = |\lambda|$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$|\lambda| = \sqrt{2}$$

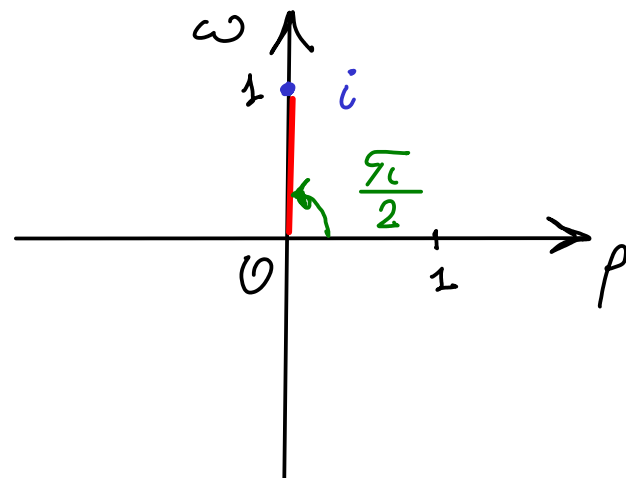
$$\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

גודל/ערך

$1+i$ היא צמד הקואורדינטות
 $\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$ היא צמד קואורדינטות

רשום בצורה קוטבית את המספר $1+i$

11



$$|i| = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{\underline{i = e^{i \frac{\pi}{2}}}}$$

הכנסו ופרשו

$$r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

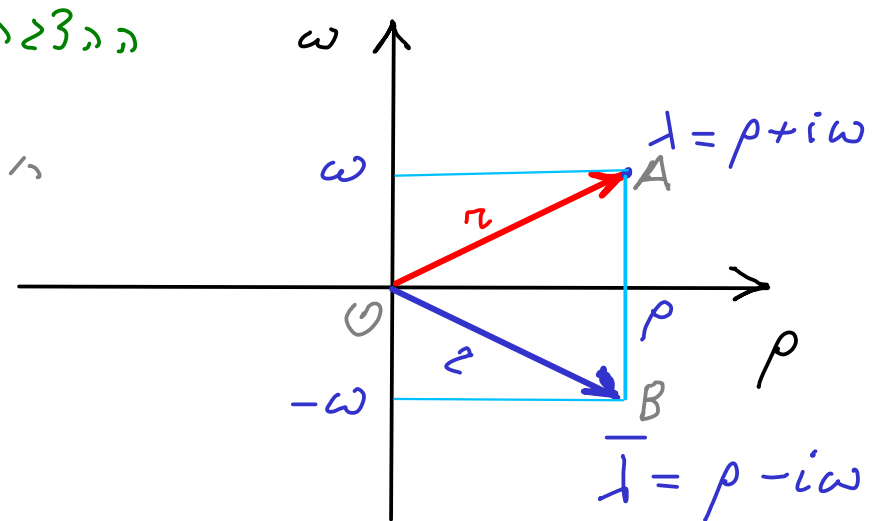
$$e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}$$

רשום את i בצורה קוטבית

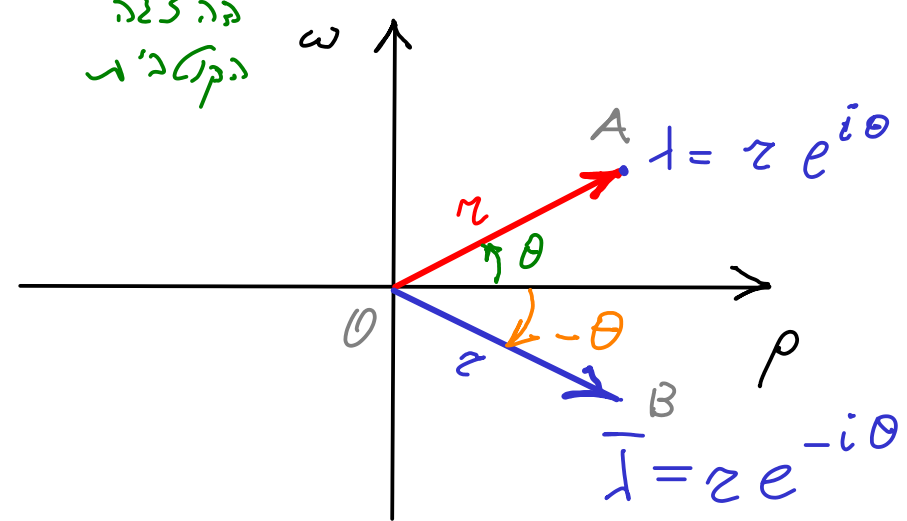
12

ההצגה הקרטזית

היחס בין חלקי הממשי והדמיוני



ההצגה הקוטבית



הסבר

$$\lambda = \rho + i\omega$$

$$\bar{\lambda} = \rho - i\omega$$

$$|\lambda| = z$$

משפט של טריגונומטריה

$$z = OA = OB \quad (1)$$

הזווית AOB היא

$$\bar{\lambda} = z e^{-i\theta} \quad (2)$$

$$\lambda \bar{\lambda} = z e^{i\theta} \cdot z e^{-i\theta} = z^2 e^{i\theta} e^{-i\theta} = z^2 e^{i(\theta - \theta)} = z^2 e^{i0} = z^2 = |\lambda|^2$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\lambda = \rho + i\omega$$

1 קרי

$$\lambda^2 = (\rho + i\omega)(\rho + i\omega) = \rho^2 + 2\rho \cdot i\omega + (i\omega)^2 = \rho^2 + 2i\rho\omega - \omega^2 = (\rho^2 - \omega^2) + 2i\rho\omega$$

ρ, ω רציונלי

$$\begin{cases} \rho^2 - \omega^2 = 1 \\ 2\rho\omega = 0 \end{cases}$$

מקרה 1/2 $\swarrow$

$$\begin{aligned} -\omega^2 = 1 &\Rightarrow \rho = 0 \text{ (1)} \\ \rho = \pm 1 &\Rightarrow \rho^2 = 1 \Rightarrow \omega = 0 \text{ (2)} \end{aligned}$$

! סתירה ω, ρ

$$1 = 1 + i \cdot 0$$

מקרה 2

$$\underline{\lambda = \pm 1} \quad \text{גלגל}$$

$$(re^{i\theta})^2 = r^2 e^{i2\theta}$$

$$(re^{i\theta})^2 = 1$$

r, θ רציונלי

2 קרי

$$r^2 e^{2i\theta} = 1$$

$$|\lambda\mu| = |\lambda| \cdot |\mu|$$

$$|r^2 e^{2i\theta}| = r^2 |e^{2i\theta}| = r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$$

$$|r^2 e^{2i\theta}| = |1|$$

נכנס r -

אין לזה ולו אף הסתידון השט

$$? 1 \quad \text{מה שיש לנו} \quad (re^{i\theta})^2 = 1$$

האם זה נכון? 1 לא ממש

$$k \in \mathbb{Z} \quad \int_0^{2\pi} e^{2\pi i k} = 1 \quad \underline{\underline{\text{כן}}}$$

$$e^{2\pi i 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

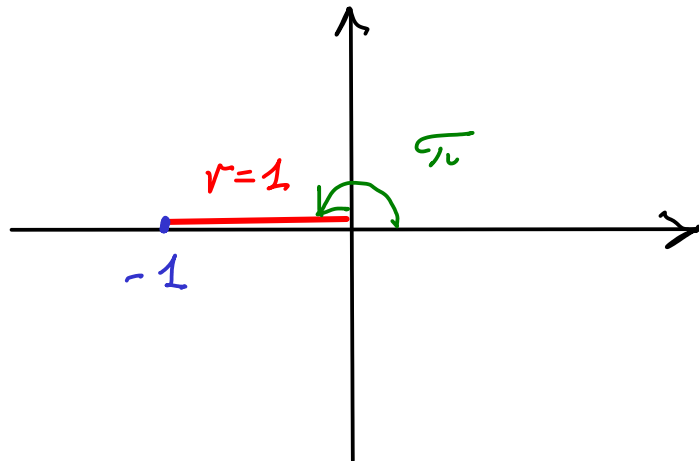
$$\Leftarrow k = 0 \quad (1^\circ \quad \underline{\text{הנחה}})$$

$$e^{2\pi i k} = \cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k) = \cos(0 + 2\pi k) + i \sin(0 + 2\pi k) =$$

$$\Leftarrow k \in \mathbb{Z} \quad (2^\circ)$$

$$= \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i 0 = 1$$

$$\underline{\int_0^{2\pi} e^{2\pi i k} = 1}$$



!-1,1,2 2 1,2,3

$$\lambda = e^{\frac{2\pi i k}{2}} = e^{\pi i k}$$

$$\angle = \lambda^2 = 1 = e^{2\pi i k}$$

$k=0,1$ 2, 3, 4 5, 6, 7, 8 9, 10, 11, 12 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000

$$\lambda = e^{\pi i 0} = 1$$

$$\angle = k=0$$

$$\lambda = e^{\pi i} = -1$$

$$\angle = k=1$$

$$\lambda^3 = 1 \quad \boxed{2}$$

$$1 = e^{2\pi i k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$|\lambda| = 1, \quad \text{נורמליות של } \lambda$$

$$\lambda = e^{i\theta} \quad | \lambda | = 1$$

$$(e^{i\theta})^3 = e^{2\pi i k}$$

$$e^{3i\theta} = e^{2\pi i k}$$

$$\Rightarrow 3\theta = 2\pi k \Rightarrow \theta = \frac{2}{3}\pi k$$

$$(k \in \mathbb{Z})$$

$$\lambda = e^{\frac{2}{3}\pi k i}$$

$$, \quad k = 0, 1, 2$$

$$e^{\frac{2}{3}\pi i \cdot 3} = e^{2\pi i} = 1 \quad \text{כי } k=3 \text{ נותן } 1$$

$$\lambda_1 = 1$$

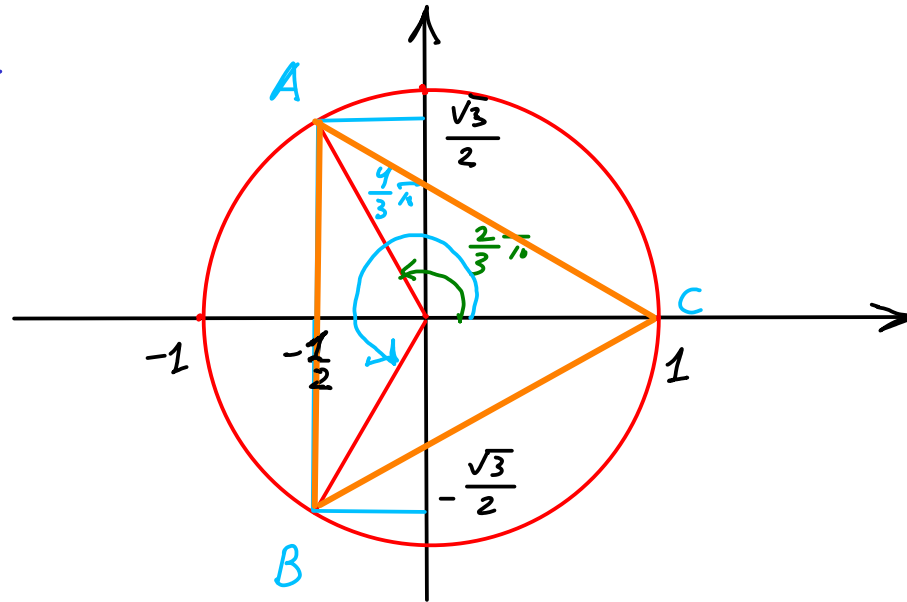
$$\lambda_2 = e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

$$\lambda_3 = e^{\frac{4}{3}\pi i}$$

הצגת λ_2, λ_3 כזוגות מרוכבים

$$\lambda_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_3 = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

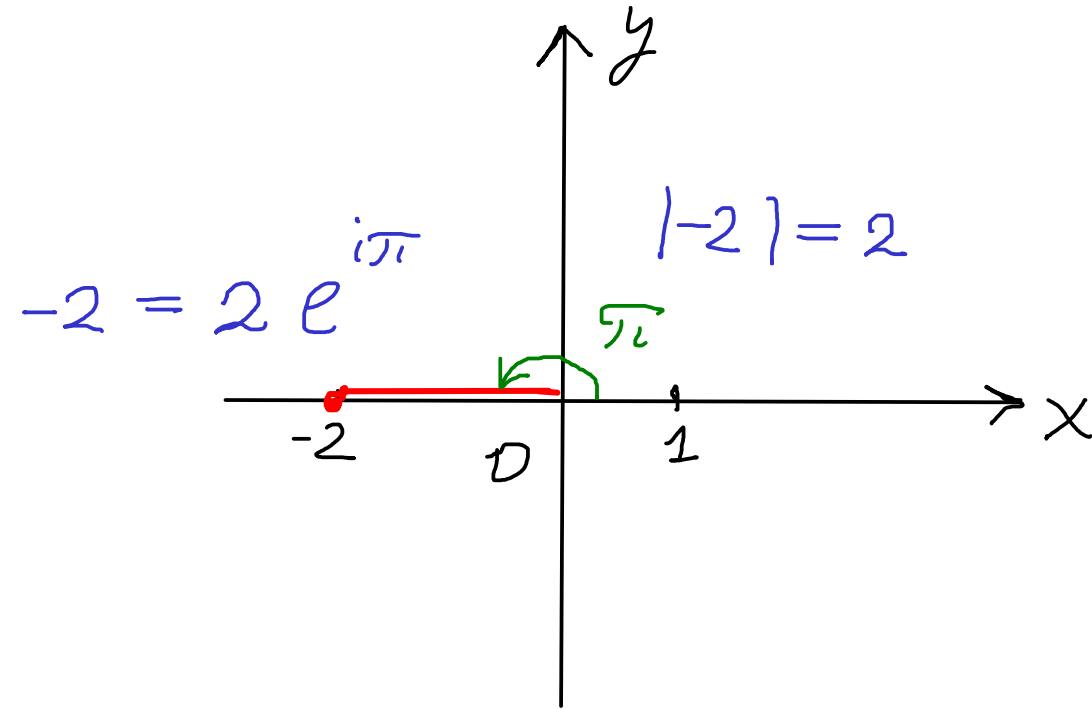
הערה: $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$ (1)

הנקודות הן קודות ΔABC (2)

נמצא את כל הברונות למשוואה

$$z^3 = -2$$

$$180^\circ \leftrightarrow \pi$$



$$z^3 = 2e^{i\pi} \quad \text{לפי}$$

$$z = 2^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

מה בעצמו, חצי עיגול 2 בעצמו?

(1) נמצא את הברונה הקטנה -2 :

$$\cos \theta + i \sin \theta =: e^{i\theta}$$

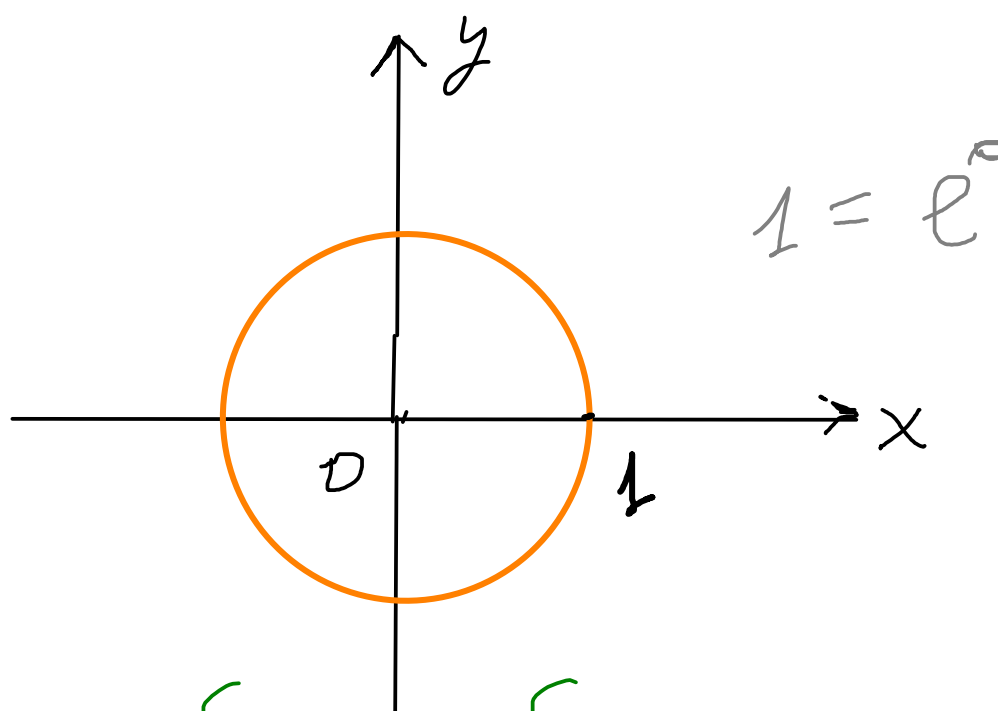
על כן: $e^{i\theta}$ מקיים את תכונת ההסקה:

$$x^n = \overbrace{x \cdot \dots \cdot x}^{n \text{ פעמים}}$$

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i\theta_1 + i\theta_2}$$

כדי למצוא את כל הערכים של z המקיימים $z^2 = -2$ נשתמש בביטוי הקוטבי של -2 ונשווה אותו לביטוי הקוטבי של z^2 .



$$1 = e^{2\pi i}$$

$$1 = e^{-2\pi i}$$

$$e^{2\pi i k} = 1$$

כאשר k הוא מספר שלם, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$-2 = 2e^{i\pi} \cdot e^{2\pi i k} = 2e^{2\pi i (k + 1/2)}$$

לכן, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(2) נמצא את השורשים ה-3 של $z^3 = 2$

$$z = 2^{1/3} e^{i \frac{2k+1}{3} \pi}$$

$$\Leftarrow z^3 = 2 e^{i \pi (2k+1)}$$

$$k=0$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} e^{i \frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$k=1$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} e^{i \pi} = -\sqrt[3]{2}$$

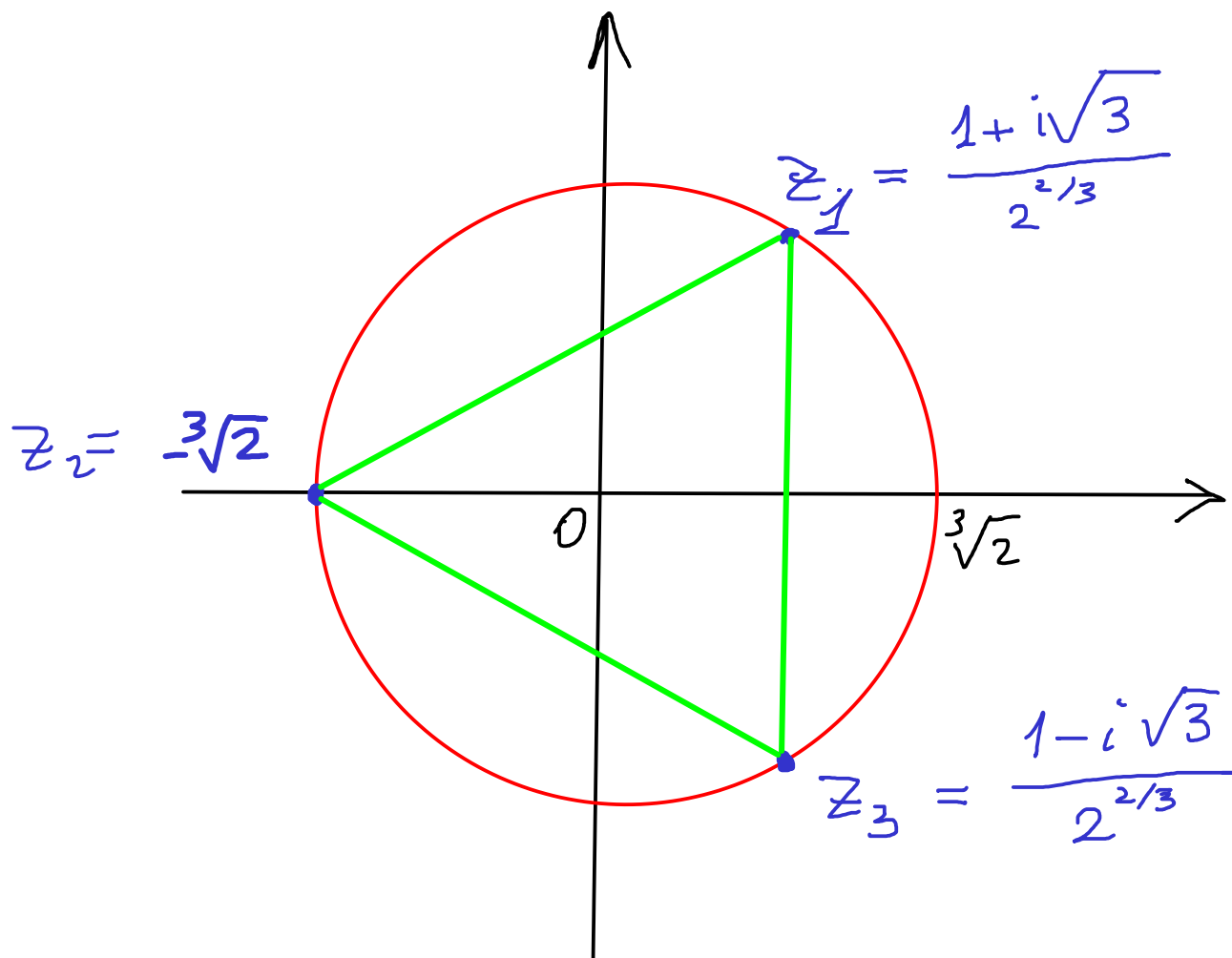
$$k=2$$

$$z_3 = \sqrt[3]{2} e^{i \frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$k=3$$

$$z = \sqrt[3]{2} e^{i \frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt[3]{2} e^{i \frac{\pi}{3}} = z_1$$

לפי גודל וזווית מסתבר שהם.

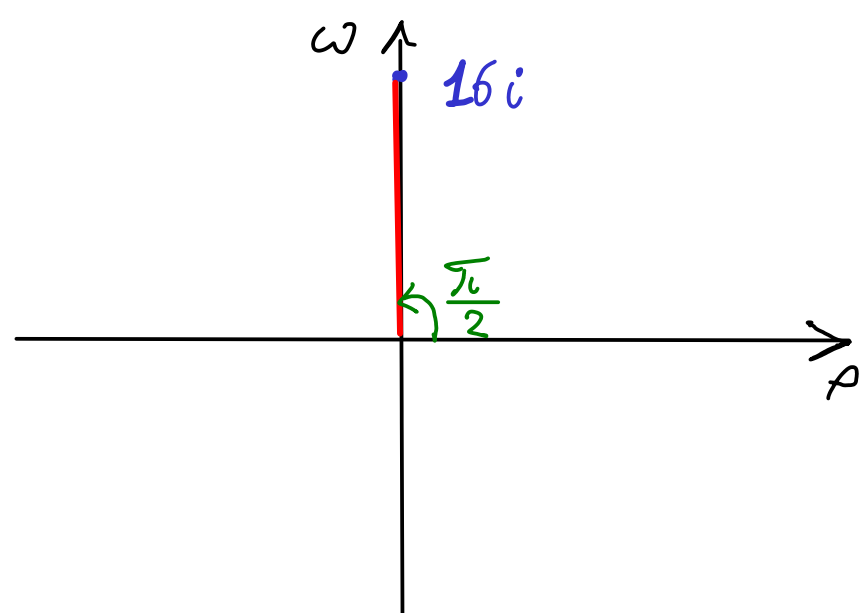


כל ערך של z המשוואה מקיים

$$|z| = \sqrt[3]{2}$$

לכן כל הנקודות של המשוואה נמצאות על המעגל שמרכזו

בנקודה $\sqrt[3]{2}$ על ציר הריאלי, מרכזים



$$|16i| = 16$$

$$e^{i2\pi k} = 1$$

$$16i = 16e^{\frac{4k+1}{2}\pi i}$$

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

$$k=0 \quad z_1 = 2e^{\frac{\pi i}{8}} = 2\left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}\right)$$

$$k=1 \quad z_2 = 2\left(\cos \frac{5}{8}\pi + i \sin \frac{5}{8}\pi\right)$$

$$z^4 = 16i$$

: Euler $\rightarrow \sqrt[4]{16}i$ $\rightarrow$ $\sqrt[4]{16}$ $\rightarrow$ $\sqrt[4]{16}$ $\rightarrow$ $\sqrt[4]{16}$ $\rightarrow$ $\sqrt[4]{16}$ (1)

$$16i = 16e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$e^0 = 1$$

$$: (k \in \mathbb{Z}) \quad 1 = e^{2\pi i k} \rightarrow \sqrt[4]{16} \sqrt[4]{16} \sqrt[4]{16} \sqrt[4]{16}$$

$$z^4 = 16e^{\frac{4k+1}{2}\pi i} \quad (2)$$

$$z = 2e^{\frac{4k+1}{8}\pi i} \quad k=0, 1, 2, 3$$

הפגיונר נמצאים על המרחק מכונים 2 עם המכש בנאליה
יקוזקוזים של כבוד

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{9}{8}\pi + i \sin \frac{9}{8}\pi \right)$$

$$z_4 = 2 \left(\cos \frac{13}{8}\pi + i \sin \frac{13}{8}\pi \right)$$

