

1

$$z^3 = -4i \bar{z}$$



$$|z^3| = |-4i \bar{z}|$$

:|z| נכנס

$$|z|^3 = |-4| \cdot |i| \cdot |\bar{z}|$$

$$|z|^3 = 4 |z|$$

$$|z| = 0 \quad z = 0$$

$$0^3 = -4i \bar{0}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \quad (1)$$

אם לא נמצא פתרון נבדוק את המקרה:

(2) נניח $z \neq 0$ $\Leftrightarrow$ נחלק את שני האגפים ב- $|z|$:

$$|z|^2 = 4$$

$$|z| = 2$$

$$|\lambda \mu| = |\lambda| \cdot |\mu|$$

$$|\bar{\lambda}| = |\lambda|$$

כדי להוכיח את זה נכתוב:

$$\lambda = \rho + i\omega$$

$$\bar{\lambda} = \rho - i\omega$$

$$|\lambda| = \sqrt{\rho^2 + \omega^2}$$

$$|\bar{\lambda}| = \sqrt{\rho^2 + (-\omega)^2} = \sqrt{\rho^2 + \omega^2} = |\lambda|$$

לפי, אם $z \neq 0$ נרצה, $|z| = 2$.

$\theta : \sqrt{3}$

$$z = 2e^{i\theta}$$

$z \neq 0$ אם $\sqrt{3}$

$$z^3 = -4i \bar{z}$$

כדי למצוא θ , נציב $2e^{i\theta}$ במקומו:

$$(2e^{i\theta})^3 = -4i \cdot 2e^{-i\theta}$$

$$8e^{i3\theta} = -8ie^{-i\theta} \quad | \cdot e^{i\theta}$$

$$e^{3i\theta} \cdot e^{i\theta} = -ie^{-i\theta} e^{i\theta}$$

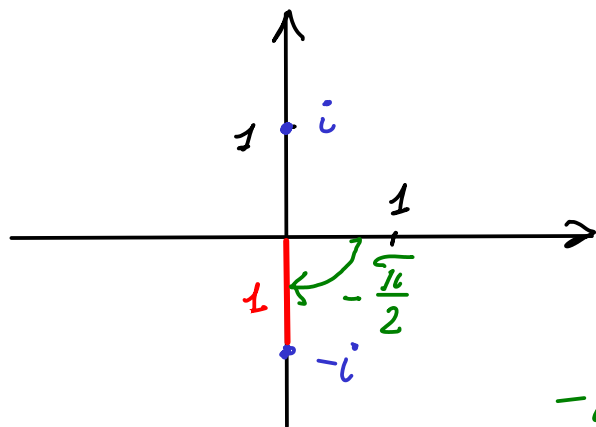
$$e^{4i\theta} = -ie^0$$

$$e^{4i\theta} = -i$$

כדי למצוא θ , נציב $-i$ במקומו ונקבל:

$$e^{4i\theta} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot 1 = e^{-i\frac{\pi}{2} + 2\pi ki}$$

$$1 = e^{2\pi ki}, k \in \mathbb{Z}$$



$$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$4\theta = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\theta = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_1 = 2e^{-\frac{\pi i}{8}}$$

$$z_2 = 2e^{\frac{3\pi}{8}i}$$

$$z_3 = 2e^{\frac{7\pi}{8}i}$$

$$z_4 = 2e^{\frac{11\pi}{8}i}$$

$$-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

$$-\frac{1}{8} + 1$$

$$-\frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{11}{8}$$

$$\rho_1 + i\omega_1 = \rho_2 + i\omega_2$$



$$\begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \omega_1 = \omega_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z &= re^{i\theta} \\ (re^{i\theta})^3 &= -4i re^{-i\theta} \\ r^3 e^{3i\theta} &= -4i re^{-i\theta} \\ r^2 e^{4i\theta} &= -4i \end{aligned}$$

$$-4i = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

work p73

$$z_1 e^{i\theta_1} = z_2 e^{i\theta_2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} z_1 = z_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$z^2 e^{4i\theta} = 4 e^{-i\frac{\pi}{2} + 2\pi i k}$$

$$z = x + iy$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$z^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$$

$$x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) = -4i(x - iy) = -4y + i4x$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -4y \\ 3x^2y - y^3 = 4x \end{cases}$$

הצגת ה'!

X, Y קבוצות

(1) תחום X

(2) Y תחום

(3) $f: X \rightarrow Y$ פונקציה

$$y = f(x)$$

$$f: X \rightarrow Y$$

$$x \xrightarrow{f} y$$

x הוא y תחום
 y הוא x תחום

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ - $\frac{1}{2}$ נקודות

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ - $\frac{1}{2}$ נקודות

$\frac{1}{2}$ - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ נקודות

$-\frac{1}{2}$ - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ נקודות

$Y = [0, \infty)$, $X = [-1, 1]$

$x = \frac{1}{2}$, $y = f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f(x) = 2$ - נקודות

$$f: X \rightarrow Y$$

1 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ פונקציה

$$\mathbb{R} \supset X, Y$$

לכן פונקציה - הצגתה

נניח U, V מרחבי וקטוריים

$T: U \rightarrow V$ העתקה ליניארית אם

$$x_1, x_2 \in U \quad \text{כל} \quad T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2) \quad (*)$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad \text{כל} \quad x \in U \quad \text{כל} \quad T(\lambda x) = \lambda T(x) \quad (**)$$

כ"ס 3 באדר תשס"א

$$U = V = \mathbb{R}^2 \quad \text{המרחב} \quad \text{הממדי} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 3x_2 - 15x_1 \end{pmatrix} \quad \text{הע"ס} \quad T \text{ ליניארית?}$$

אם העתקה, שכל הו: האם T ליניארית?

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -27 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{המקור} \quad y = \begin{pmatrix} 3 \\ -27 \end{pmatrix} \quad \text{המטרה}$$

$$T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ 3\alpha_2 - 15\alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$T(x_1 + x_2) \stackrel{?}{=} T(x_1) + T(x_2) \quad \text{for } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \subseteq \text{vector space } \mathbb{R}^2$$

$$x_1 + x_2 \quad (1) \quad \text{definition}$$

$$T(x_1 + x_2) \quad (2)$$

$$T(x_1), T(x_2) \quad (3)$$

$$T(x_1) + T(x_2) \quad (4)$$

$$\text{definition} \quad (5)$$

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 \in \mathbb{R}^2$$

$$\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \quad x_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_2 \in \mathbb{R}^2$$

$$x_1 + x_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$T(x_1 + x_2) = \begin{pmatrix} (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) \\ 3(\alpha_1 + \beta_1) - 15(\alpha_2 + \beta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) \\ (3\alpha_1 - 15\alpha_2) + (3\beta_1 - 15\beta_2) \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$T(x_1) = T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ 3\alpha_2 - 15\alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$T(x_2) = T \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_2 \\ 3\beta_2 - 15\beta_1 \end{pmatrix} \quad \text{! p'ile} \quad (3)$$

$$T(x_1) + T(x_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ 3\alpha_2 - 15\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_2 \\ 3\beta_2 - 15\beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) \\ (3\alpha_2 - 15\alpha_1) + (3\beta_2 - 15\beta_1) \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 3x_2 - 15x_1 \end{pmatrix}$$

" + 1/c m/c T "

$$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2) \quad \underline{\text{linearity}}$$

$$: T(\lambda x) = \lambda T(x)$$

ס"ק, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\int_0^1 |x| dx$ $x \in \mathbb{R}^2$ $\int_0^1 |x| dx$ הצגה (2)

$\lambda x \quad (1)$

$$T(\lambda x) \quad (2)$$

$$T(x) \quad (3)$$

$$\lambda T(x) \quad (4)$$

منه 5

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R}^2$$

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$$

$$T(\lambda x) = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_1 + \lambda \alpha_2 \\ 3(\lambda \alpha_1) - 15(\lambda \alpha_2) \end{pmatrix}$$

$$T(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ 3\alpha_1 - 15\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda T(x) = \begin{pmatrix} \lambda (x_1 + x_2) \\ \lambda (3x_2 - 15x_1) \end{pmatrix}$$

$$T(\lambda x) = \lambda T(x)$$

נכון.

$$T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \overset{! \text{ נ'ר}}{2} \\ 3\alpha_1 - 15\alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

נ'ר נ'ר נ'ר נ'ר נ'ר

$$U=V=\mathbb{R}^2$$

$$x_1 + x_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$T(x_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2 \\ 3\alpha_1 - 15\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$T(x_2) = \begin{pmatrix} \beta_1 + 2 \\ 3\beta_1 - 15\beta_2 \end{pmatrix}$$

$$T(x_1) + T(x_2) = \begin{pmatrix} (\alpha_1 + 2) + (\beta_1 + 2) \\ (3\alpha_1 - 15\alpha_2) + (3\beta_1 - 15\beta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 + \overset{!}{4} \\ 3(\alpha_1 + \beta_1) - 15(\alpha_2 + \beta_2) \end{pmatrix}$$

$$T(x_1 + x_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 + \overset{!}{2} \\ 3(\alpha_1 + \beta_1) - 15(\alpha_2 + \beta_2) \end{pmatrix}$$

~~! נ'ר נ'ר~~

נ'ר נ'ר נ'ר נ'ר נ'ר

$$T(x_1 + x_2) \neq T(x_1) + T(x_2) : \underline{\text{נ'ר נ'ר}}$$

$$T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad U = V = \mathbb{R}^2 \quad \boxed{3}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad x_1 + x_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \end{pmatrix} \quad T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2) \text{ ; } \text{נכון}$$

$$T(x_1 + x_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 \\ (\alpha_2 + \beta_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + 2\alpha_2\beta_2 \end{pmatrix}$$

! נ'ילה נ'ילה ~~נ'ילה~~

$$T(x_1) + T(x_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_2 \\ \beta_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 \end{pmatrix}$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha_1 + b\alpha_2 \\ c\alpha_1 + d\alpha_2 \end{pmatrix} \quad \text{נ'ילה נ'ילה } T$$

$$U = V = \mathbb{R}^2$$

נ'ילה נ'ילה $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ נ'ילה נ'ילה

כשר $T: U \rightarrow V$ נ"ר T הומומורפיזם ליניארי.

$$T(0) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{כי} \\ 0 \in U \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{כי} \\ 0 \in V \end{array}$$

דוגמה $T(0) = T(x - x) = T(x) + T(-x) = T(x) - T(x) = 0$ $\text{כי } 0 = x - x$ $\text{כי } x \in U$ הוכחה

$$-x = (-1)x$$

$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2 \\ 3x_1 - 15x_2 \end{pmatrix}$ T הומומורפיזם ליניארי $U = V = \mathbb{R}^2$ 4

T איננו ליניארי $T(0) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2 \\ 3 \cdot 0 - 15 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$

$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$ $U = V = \mathbb{R}^2$ 5

$T(0) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 \\ 0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ T הומומורפיזם ליניארי T כשר

$$T \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i T(x_i) \quad \Leftrightarrow \quad \text{נ"כ} \quad T: U \rightarrow V \quad \text{הומומורפיזם} \quad \underline{\underline{\text{Coen}}}$$

$$T \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \right) = \sum_{i=1}^k T(\lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i T(x_i) \quad \leftarrow \quad \underline{\text{הוכחה:}}$$

$\uparrow$ (1) $\uparrow$ (2)

$$T(x_1 + x_2) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i x_i = x_1 + x_2 \quad \Leftarrow \quad \sum_{i=1}^2 \lambda_i x_i = x_1 + x_2 \quad \Leftarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, k=2 \quad \text{נ"כ} \quad \Rightarrow$$

$$T \left(\sum_{i=1}^1 \lambda_i x_i \right) = T(\lambda_1 x_1) = \sum_{i=1}^1 \lambda_i T(x_i) = \lambda_1 T(x_1) \quad \Leftarrow \quad k=1 \quad \text{נ"כ}$$

Induction

קואורדינטות ב וקטור

נניח $\dim V = n$, בקבוצת בסיס $e_1, \dots, e_n \in V$ ^B סף וקטור $x \in V$ $\iff x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ יתכן $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ יחידים.
 $\text{Span}(e_1, \dots, e_n) = V$
 $e_1, \dots, e_n$ "מערב" אלמנט

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$[x]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{שמאל}$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ קואורדינטות של x בבסיס B .

$\mathbb{R}_2[t]$ המרחב של פולינומים של t ממעלה ≥ 2 .

6

$$x(t) = 9 - 6t + t^2 = 9e_1 + (-6)e_2 + e_3 \iff x(t) = (t-3)^2 \quad \text{בסיס } (1, t, t^2)$$

"קריסטל" של הפולינום x

$$[x]_B = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{סך}$$

$$E = (e_1 \ e_2 \ e_3)$$

$$T(x) := [x]_B$$

אנחנו רוצים, בדרך כלל, $\overbrace{e_1, \dots, e_n}^B \in V$ נניח Coen

$$T: V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

אנחנו רוצים, בדרך כלל, $\mathbb{R}^n$

$$y = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i, \quad x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$

(כך) הוכחה

$$x+y = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^n \beta_i e_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_i e_i + \beta_i e_i) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) e_i$$

כך

$$x+y = y+x$$

$$\lambda x + \mu x = (\lambda + \mu)x$$

$$[x+y]_B = [x]_B + [y]_B \quad | \text{כך}$$

$$[x+y]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad | \text{כך}$$

$\mathbb{R}^n$ הוכחה

$$T(x+y) = Tx + Ty \quad | \text{כך}$$

$$T(\lambda x) = \lambda T(x) \quad \Leftarrow [\lambda x]_B = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_1 \\ \lambda \alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda \alpha_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \lambda [x]_B \Leftarrow$$

$\mathbb{R}^n$ הוכחה

$$\lambda x = \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^n \lambda (\alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i) e_i \quad (כך)$$

$\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$

ה"ע 10V

: 0'0 > 1, t, t^2

Span(1, t, t^2) ⇒ x = α₁ + α₂t + α₃t^2

λ + μt + νt^2 = 0 ⇒ λ = μ = ν = 0

x(t) = (t-3)^2 ∈ V

[x] = (9, -6, 1)^T ∈ R^3

(t-3)^2 = t^2 - 6t + 9
α₃ = 1, α₂ = -6, α₁ = 9

בתור בסיס

קווצר ה"ע R^3 - V

T: R_2[t] → R^3
T(x) = [x]_E

3"02

1

x(t) = α₁ + α₂t + α₃t^2

V = R_2[t]

E = (1, t, t^2)

"L_2/L_0" 0'0 > e' V - 2

[x]_E = (α₁, α₂, α₃)^T ∈ R^3

T: V → R^3

[λx]_E = λ[x]_E

[x+y]_E = [x]_E + [y]_E

סכום
של וקטורים

סכום
של סקלרים

R_2[t] : T

R^3 : T

T(x) = [x]_E

$$\mathcal{D}(\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2) = \alpha_2 + 2\alpha_3 t \in \mathbb{R}_1[t]$$

$$\mathcal{D}: \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}_1[t] \quad \boxed{2}$$

dim dim

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_2[t]$$

$$\mathcal{D}(x+y) = \mathcal{D}(x) + \mathcal{D}(y)$$

$$\textcircled{1} \quad \underline{\mathbb{R}^3}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}_2[t]$$

$$\mathcal{D}(\lambda x) = \lambda \mathcal{D}(x)$$

$$\textcircled{2}$$

$$x+y = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2)t + (\alpha_3 + \beta_3)t^2$$

$$x = \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2$$

$$\textcircled{1}$$

$$y = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2$$

$$\mathcal{D}(x+y) = (\alpha_2 + \beta_2) + 2(\alpha_3 + \beta_3)t$$

$$\mathcal{D}(x) + \mathcal{D}(y) = (\underline{\alpha_2} + \underline{2\alpha_3}t) + (\underline{\beta_2} + \underline{2\beta_3}t) = (\alpha_2 + \beta_2) + 2(\alpha_3 + \beta_3)t$$

! same

$$\lambda x = \lambda \alpha_1 + \lambda \alpha_2 t + \lambda \alpha_3 t^2$$

$$\mathcal{D}(\lambda x) = \lambda \alpha_2 + 2\lambda \alpha_3 t = \lambda (\alpha_2 + 2\alpha_3 t) = \lambda \mathcal{D}(x)$$

$\mathcal{D}(x)$

$$\textcircled{2}$$

5. $T: U \rightarrow V$ ליניאר/כ"י מוגדר 2 תת-מרחבים.

התמונה של T

$$\text{התמונה של } T = \text{Im}(T)$$

$$\text{Im } T := \{Tx : x \in U\}$$

Claim נניח $T: U \rightarrow V$ כ"י/ליניאר, $b_1, \dots, b_n \in V$,
 $\text{Im}(T) = \text{span}(Tb_1, \dots, Tb_n)$ כל

$$\begin{cases} X \subseteq Y \\ Y \subseteq X \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = Y$$

הוכחה: X, Y קבוצות, X, Y

$$I_m(T) \subseteq \text{Span}(Tb_1, \dots, Tb_n) \quad (1)$$

$$y = Tx \quad : x \in U \quad \text{אם } y \in I_m(T) \quad \text{אז}$$

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \quad \Leftrightarrow \text{אם } b_1, \dots, b_n \in U$$

הוכחה

$$y \in \text{Span}(Tb_1, \dots, Tb_n) \Leftrightarrow y \in I_m(T)$$

$$\text{Span}(Tb_1, \dots, Tb_n) \supseteq I_m(T) \quad \text{אם}$$

$$y = Tx = T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T b_i \in \text{Span}(Tb_1, \dots, Tb_n) \quad \text{אם}$$

$$\text{Span}(Tb_1, \dots, Tb_n) \subseteq I_m(T) \quad (2)$$

$$y = \sum_{i=1}^n \beta_i T b_i \quad \text{אם } y \in \text{Span}(Tb_1, \dots, Tb_n) \quad \text{אז}$$

$Tb_1, \dots, Tb_n$ הם

$\beta_1, \dots, \beta_n$

הם

$$\sum_{i=1}^n \beta_i T b_i = T\left(\sum_{i=1}^n \beta_i b_i\right) \in I_m(T) \quad : T \text{ הם } \sum_{i=1}^n \beta_i b_i \in U \quad \text{אם}$$

לכן $y \in I_m(T) \Leftrightarrow y \in \text{Span}(Tb_1, \dots, Tb_n)$

$$\text{Im}(T) = \text{span}(Tb_1, \dots, Tb_n)$$

$$t^2 - 4t + 3$$

$$V := \mathbb{R}_2[t] \quad \boxed{3}$$

$$\mathcal{D}(\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2) := \alpha_2 + 2\alpha_3 t \quad \text{: הסתכל} \quad \text{מ"ע} \quad \mathcal{D}: V \rightarrow V \quad \text{ל"ע}$$

$$\mathcal{D} \left((t-3)^2 \right) = 2(t-3) \quad \text{, הפוך}$$

$$\text{Im}(\mathcal{D}) \quad \text{התמונה} \quad \text{ל"ע}$$

$$\mathcal{D}(3 - 4t + t^2) = -4 + 2t$$

$$(1, t, t^2) \quad \text{בסיס} \quad \text{ל"ע} \quad \text{התמונה} \quad \text{ל"ע} \quad \text{התמונה} \quad \text{ל"ע}$$

$$Tb_1 = 0$$

$$b_1(t) = 1$$

$$Tb_2 = 1$$

$$b_2(t) = t$$

$$Tb_3 = 2t$$

$$b_3(t) = t^2$$

$$\text{span}(0, 1, 2t) = \text{span}(1, t) \quad \text{: כי} \quad \text{Im } T = \text{span}(0, 1, 2t) \quad \text{ל"ע}$$

$$\text{Im}(T) \quad \text{התמונה} \quad \text{ל"ע} \quad \text{התמונה} \quad \text{ל"ע} \quad \text{התמונה} \quad \text{ל"ע}$$

$$\dim \text{Im}(T) = 2 \quad \text{, הפוך}$$

$$\text{Im}(T) = \text{Span}(Tb_1, \dots, Tb_n)$$

התמונה של $\text{Span}(Tb_1, \dots, Tb_n)$ היא $\text{Im}(T)$

התמונה של $\text{Im}(T)$ היא V

המשפט של קולמון:

$$\dim \text{Span}(x_1, \dots, x_m) \leq m$$

המשפט:

$$\dim \text{Im}(T) \leq \dim V$$

surjective

$$\text{Im}(T) = V$$

הפונקציה $T: U \rightarrow V$ היא סורטיבית

יש מקרה $y \in V$ כזה שיש $x \in U$ כך ש-

$$y = Tx$$

המשפט 3 - תנאי הסף
המשפט 1 - תנאי הכרחי

[4]

$v_1, \dots, v_m \in V$ $b_1, \dots, b_m \in U$ בסיס בסיס

יש קוויטר דאסער, און אונזערע v_i זענען דאסער!

$$T b_1 = v_1$$

$$T b_2 = v_2$$

...

$$T b_m = v_m$$

$x \in U$ $\int$ דאסער

$$T x = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$$

$$\Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i$$

$$T: \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}_2[t] \quad \boxed{5}$$

$$\int \text{דאסער} \quad -t-t^2, t-2, t^2+t+1 \quad \int 3$$

$$\begin{cases} T(t^2+t+1) = -t^2-t-1 \\ T(t-2) = 3t-6 \\ T(-t-t^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{R_1+R_3 \rightarrow R_1}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$R_1+R_3 \rightarrow R_1$

הערכים של δ הם $\delta = 1$ ו- $\delta = -1$.
 T היא מטריצה סימטרית.

$$B := (t^2+t+1, t-2, -t^2-t)$$

$$[t^2+3]_B$$

הערכים
של δ

$$\underline{T(t^2+3)} \text{ על } \mathbb{R}_N$$

$$\alpha_1(t^2+t+1) + \alpha_2(t-2) + \alpha_3(-t^2-t) = t^2+3$$

הערכים של δ הם $\delta = 1$ ו- $\delta = -1$.
 T היא מטריצה סימטרית.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{array} \right) \stackrel{R_2-R_1 \rightarrow R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{array} \right) \stackrel{R_3+2R_2 \rightarrow R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \stackrel{R_1-R_3 \rightarrow R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$(t^2 + t + 1) - (t - 2) = t^2 + 3 \quad \text{...}$$

$$T(t^2 + 3) = T(t^2 + t + 1) - T(t - 2) = -t^2 - t - 1 - (3t - 6) =$$

... 1, 5

$$= -t^2 - 4t + 5$$

$$T(1) = T(b_1) + T(b_3) = -t^2 - t - 1$$

$$\Leftrightarrow b_1 + b_3 = 1$$

... 3, 1, 1, 3

$$T(t-2) = T(t) - 2T(1) = T(t) + 2(t^2 + t + 1) = 3t - 6$$

$$T(t) = 3t - 6 - 2(t^2 + t + 1) = 3t - 6 - 2t^2 - 2t - 2 = -2t^2 + t - 8$$

$$T(-t - t^2) = -T(t) - T(t^2) = 0$$

$$T(t^2) = -T(t) = 2t^2 - t + 8$$

$$T(t^2 + 3) = T(t^2) + 3T(1) = 2t^2 - t + 8 + 3(-t^2 - t - 1) = -t^2 - 4t + 5$$

$$\begin{cases} T(t^2 + t + 1) = -t^2 - t - 1 \\ T(t - 2) = 3t - 6 \\ T(-t - t^2) = 0 \end{cases}$$

$$T: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$$

תחום תחום

$$\underline{T \text{ ליניאר}}$$

kernel

$$\text{Ker}(T) = \{x \in \mathcal{U} : Tx = 0\}$$

$$0 \text{ ליניאר "החסר" } = \text{החסר}$$

$$\text{Ker}(T) \text{ תת-חלל} \quad \underline{\text{צור}}$$

$$\text{ליניאר } \text{Ker } T$$

תת-חלל תת-חלל

$$\lambda x + \mu y \in \text{Ker } T \iff \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad x, y \in \text{Ker } T \quad \text{הוכחה:}$$

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda \underbrace{Tx}_0 + \mu \underbrace{Ty}_0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0 \implies \lambda x + \mu y \in \text{Ker } T.$$

ליניאר

$$T: U \rightarrow V$$

תחום תחום

$x \in U$ כל גומיון האקטור

$$y = Tx$$

x האקטור y התמונה

x נקודת y

תחום תמונה

$$Im T := \{Tx : x \in U\} \subset V$$

הקבוצה $Im T$ היא תת-תחום של V וכל נקודה ב- V היא תמונה של נקודה ב- U

(1)

(2) $U \ni 0 \rightarrow 0$ - נקודה קבוצה תמונה

תחום תמונה

$$\{x \in U : Tx = 0\}$$

$$T(\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2) = \alpha_1 + \alpha_2 t$$

$$U = V = \mathbb{R}_2[t], T \text{ נתון כפי הבננו!}$$

1

$$T((2t+3)^2) = 9 + 12t$$

למשל

האקטור T - תמונה

$$x(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2$$

Im T , Ker T - תמונה וקער?

$$T(\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2) = 0 \quad ; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$x(t) = \alpha t^2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 t = 0$$

! צריך 3 נקודות

$$x(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 \in \text{Ker } T \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$y(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t \Leftrightarrow y \in \text{Im}(T)$$

$$: \alpha_1 + \alpha_2 t \text{ נבחר } x(t) \text{ , } (Tx)(t) \text{ , } \forall x(t) \quad (2)$$

$$t^2 : \text{Ker } T \rightarrow \{0\}, \quad \dim \text{Ker } T = 1 \quad \underline{\text{נכון}}$$

$$1, t : \{0\}, \quad \dim \text{Im } T = 2$$

אם $\text{Im } T$ מכיל 3 וקטורים בלתי תלויים:

(a) קבוצת בסיס (הבסיס הנבחר) היא:

(b) מכיל 3 וקטורים תלויים: $1, t, t^2$
 ~~$1, t, 0$~~
 $1, t$ ב $\text{Im } T$ הם בסיס $\Leftrightarrow$ הם ב $\mathbb{R}[t]$

$$Tx = 0$$

(x שווה 0)

חידוש אחר $\text{Im } T$ יותר קשה מחדוש $\text{Ker } T$
 נבחר x נוחים $Tx = y$ נגיד, y נוחים x נוחים

$f(t) = t^2$
 $f(2) = f(-2)$
 ע. כ'ל'ל'ל'ל'ל'ל'ל'ל'ל'ל'ל'ל'ל'ל'ל'ל'ל'ל'

הפונקציה הזוגית

$T: U \rightarrow V$ הפונקציה הזוגית
 האם $Tx_1 = Tx_2$ כאשר $x_1 \neq x_2$?

$x_1 = x_2 \iff Tx_1 = Tx_2$



הפונקציה הזוגית $T: U \rightarrow V$ היא הפונקציה הזוגית
 כל $y \in V$ יש $x \in U$ כזה ש- $Tx = y$

$\text{Ker } T = 0 \iff T$ הפונקציה הזוגית

הוכחה:

$Tx_1 = Tx_2$ כאשר $x_1 \neq x_2$

הפונקציה הזוגית
 $A \Rightarrow B$
 $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

$$x_1 - x_2 \in \text{Ker } T \iff T(x_1 - x_2) = 0 \iff \begin{cases} Tx_1 - Tx_2 = 0 \\ \text{אם } T \text{ איננו } 0 \end{cases}$$

$$x_1 - x_2 \in \text{Ker } T \iff Tx_1 = Tx_2 \quad \text{אם } T \text{ איננו } 0$$

כאן 0 זה מרחב אפס, כלומר מרחב גסו'
 יקראו לא אפס.

בהקשר של $x_1 - x_2 \neq 0$, $\text{Ker } T \neq 0$.

$\Rightarrow$ (2) $\text{Ker } T \neq 0$ זה מרחב גסו' T איננו 0

כאן $\text{Ker } T = 0$ זה מרחב גסו' T איננו 0

$\Leftarrow$ (3) $\text{Ker } T \neq 0$, $x_1 \neq x_2$, $Tx_1 = Tx_2$ $\Rightarrow$ $x_1 - x_2 \in \text{Ker } T$

אם $0 \neq z \in \text{Ker } T$, $x_1 = z$, $x_2 = 0$, $x_1 \neq x_2$, $Tx_1 = Tx_2 = 0$

ל.ל.נ

רשומות

$T: U \rightarrow V$
 גרנטים $\text{Ker } T, \text{Im } T$ נמצאים במרחב וצמודים.
 כל קבוצת בסיס של T .

$$\dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T = \dim U \quad \underline{\text{Coev}}$$

נבחר בסיס $e_1, \dots, e_k \in \text{Ker } T$ ונבחר בסיס $e_{k+1}, \dots, e_n$ של $\text{Im } T$.
 נבחר בסיס $e_1, \dots, e_n$ של U .

נבחר בסיס $e_1, \dots, e_n$ של U .
 $\text{Span}(Te_1, \dots, Te_k, Te_{k+1}, \dots, Te_n) = \text{Im } T$

$$\text{span}(Te_1, \dots, Te_n) = \text{span}(Te_{k+1}, \dots, Te_n) \quad \text{כל } k$$

$$\dim(Te_{k+1}, \dots, Te_n) \leq n - k \quad \text{יד}$$

לכן $Te_{k+1}, \dots, Te_n$ בסיס, " = " נכונות

$$\text{כל } \sum_{i=k+1}^n \lambda_i e_i \in \text{Ker } T \Leftrightarrow$$

$$e_{k+1}, \dots, e_n \quad \text{בסיס}$$

$$T\left(\sum_{i=k+1}^n \lambda_i e_i\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=k+1}^n \lambda_i Te_i = 0, \text{ כל}$$

$\uparrow$
כל T

$$\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=k+1}^n \lambda_i e_i = 0 \quad \text{יד}$$

$\uparrow$
כל $e_{k+1}, \dots, e_n$

$\text{Ker } T \rightarrow \text{בסיס}$
 $\text{Im } T \rightarrow \text{בסיס}$
 $Te_{k+1}, Te_{k+2}, \dots, Te_n$
 $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n$
 $U \rightarrow \text{בסיס}$

ל.ע.נ

$$k + (n - k) = n = \dim U$$

$$\dim \text{Ker } T = k \quad \text{יד}$$

$$\dim \text{Im } T = n - k$$

$$\forall y \in V \\ \exists x \in U: Tx = y$$

$$, \text{Im } T = V$$

|| T התקף $\Leftrightarrow \forall y \in V$ $\exists x$ $Tx = y$ $\Leftrightarrow$ $\text{Im } T = V$

T התקף $\Leftrightarrow \forall y \in V$ $\exists x$ $Tx = y$ $\Leftrightarrow$ $\text{Im } T = V$

x מקור $Tx = y$ $\Leftrightarrow$ $x \in \text{Ker } T$

$$Tx = y$$

3 אפשרויות:

T התקף $\Leftrightarrow$ $\text{Im } T = V$

$$T \text{ התקף} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & | & \text{עמוד} \\ \hline 2 & | & \text{עמוד} \\ 3 & | & \text{עמוד} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow T x_1 = T x_2 : \text{יחידות } T$$

$$\text{Im } T = V : \text{על } T$$

$$\dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T = \dim V$$

$$T: V \rightarrow V \text{ על } T \text{ יחידות } T$$

$$T \text{ על } T \Leftrightarrow T \text{ יחידות } T$$

הוכחה:

$$(1) \Leftrightarrow T \text{ יחידות } T : \text{על } T$$

$$T \text{ על } T \Leftrightarrow \begin{cases} \dim \text{Im } T = \dim V \Leftrightarrow \text{Ker } T = 0 \Leftrightarrow T \text{ יחידות } T \\ \text{אם } \text{Im } T < V \end{cases}$$

$$(2) \text{על } T : \text{על } T \Leftrightarrow \text{Ker } T = 0$$

$$\text{Ker } T = 0 \Leftrightarrow \dim \text{Ker } T = \dim V - \dim \text{Im } T = \dim V - \dim V = 0$$

29

על

ההרכבה של הפונקציות

$$U \xrightarrow{S} V \xrightarrow{T} W$$

$T \circ S$

$$(T \circ S)(u) := T(Su)$$

$$u \in U$$

$$(TS)u := T(Su) \quad ||$$

$\forall u \in U$	$\Leftarrow$	$\forall u \in U$	(1)	<u><u>לכן</u></u>
$\forall u \in U$	$\Leftarrow$	$\forall u \in U$	(2)	

① T חת"ד ור"ל נקראת א'סומונרטיס

$$U \cong V$$

$$. U \rightarrow V$$

② U, V א'סומונרטיס $\Leftrightarrow$ ק"מ א'סומונרטיס

א'ן הבזל ב'ן שני מרחבים וקטוריים א'סומונרטיס.

$\dim V = n$ ונניח $T: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ב' $T_x := [x]_B$

כאשר B ב'סו V , $[x]_B$ בעמודה וקטוריות ו x ב'סו B ;

$$[x]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \quad \Leftrightarrow \text{ב'סו} \quad B = (b_1, \dots, b_n)$$

↑
בקואורדינטות
x

...so'2 nio'k $T:V \rightarrow \mathbb{R}^n$ oben

$\text{Ker } T = 0$; $\int_3$ הוכחה : 1

$$x = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \dots + 0 \cdot b_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{von Nullvektor} \quad [x]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{weil} \quad T x = 0 \quad : \text{Null}$$

$T \neq 0 \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad T_x = 0 \quad \text{! nicht!}$

$$T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

use $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ fr T (2)

3) ד' א'סו'ר'פ'ס'ט ה'תקע' ל' (1, 2) .

S.E.N

32 עמוד : S^T אטומורפיסם $S^T \leq$ אטומורפיסם

$(x \geq 0)$
 $f(x) = x^2$
 $g(x) = \sqrt{x}$
 $f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$
 $g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$
 $f \circ g = id$
 $g \circ f = id$
 $id(x) = x$

להוכיח כי הפונקציה

$$T: U \rightarrow V \quad \text{הפונקציה}$$

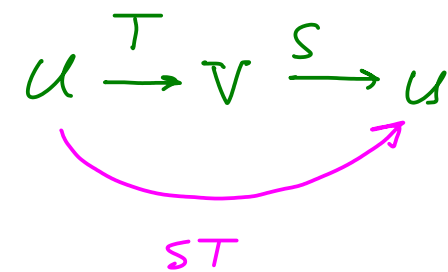
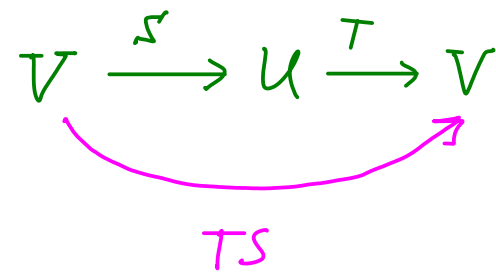
$$: T \text{ הפונקציה } S: V \rightarrow U$$

$$TS = id_V$$

$$ST = id_U$$

$$S = T^{-1}$$

$$(TS)_x = T(Sx)$$



$$T(\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \text{הפונקציה } T$$

$$T: \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

2

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \quad \text{כלומר} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 \in \text{Ker } T \quad \text{כלומר } T(1)$$

(2) T : $\mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}^3$: $x(t) \in \mathbb{R}_2[t] \xrightarrow{f_3} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ (a)

$$Tx = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$x = \lambda_1 + \lambda_2 t + \lambda_3 t^2$$

בסיס $1, t, t^2$

$$\dim \mathbb{R}_2[t] = 3$$

(b) הוכח כי T איז איזומורפיזם

$$\dim \ker T = 0$$

$$0 + \dim \operatorname{Im} T = 3$$

כאן

$$\dim \operatorname{Im} T = 3$$

כאן

$$\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^3$$

כאן

לכן T - איז איזומורפיזם $\mathbb{R}_2[t] \cong \mathbb{R}^3$

משפט 1.1.1: אם $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[t]$ היא איזומורפיזם

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 \quad ; \quad \text{אם } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{אז}$$

$$TS = id_{\mathbb{R}^3}$$

$$TS \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T(x_1 + x_2 t + x_3 t^2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{כי}$$

$$ST = id_{\mathbb{R}_2[t]}$$

$$ST(x_1 + x_2 t + x_3 t^2) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 \quad , \quad \text{כי}$$

$$V \cong W \quad , \quad U \cong V \quad \text{אז}$$

$$U \cong W \quad \text{כי}$$

$$V \rightarrow \text{אנדרטת} \quad (1) \\ x \mapsto [x] \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

$$V \cong \mathbb{R}^n$$

המשקלה;

$$V \cong \mathbb{R}^n \quad \text{אז} \quad U \cong \mathbb{R}^n$$

$$\dim U = \dim V \iff U \cong V \quad \underline{\underline{\text{Coben}}}$$

$$\exists T^{-1} \text{ הפ'כה } T \quad ||$$

$$T \text{ הפ'כה } \iff T \text{ יו'ע } \iff T \text{ הפ'כה } \quad \underline{\underline{\text{Coben}}}$$

מציאת בסיס ו'ניט' ו'א

$$x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$$

$$[x]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

נניח: $\dim V = n, V$

$$(b_1, \dots, b_n) = B \subset V$$

$$B[x]_B = ?$$

B "שורה" (שורה של קטניות)
 $[x]_B$ ממוזה של מספרים

$$(b_1, \dots, b_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + \dots + b_n \alpha_n = x$$

מסקנה:

$$x = B[x]_B$$

$$x = \Gamma[x]_\Gamma$$

בבסיס אחר, נז'ר, $\Gamma := (c_1, \dots, c_n)$

$$[x]_\Gamma = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

נוח מאוד להשתמש בקואורדינטות, אבל הקואורדינטות גלויות
 בבחינה של בבסיסים.

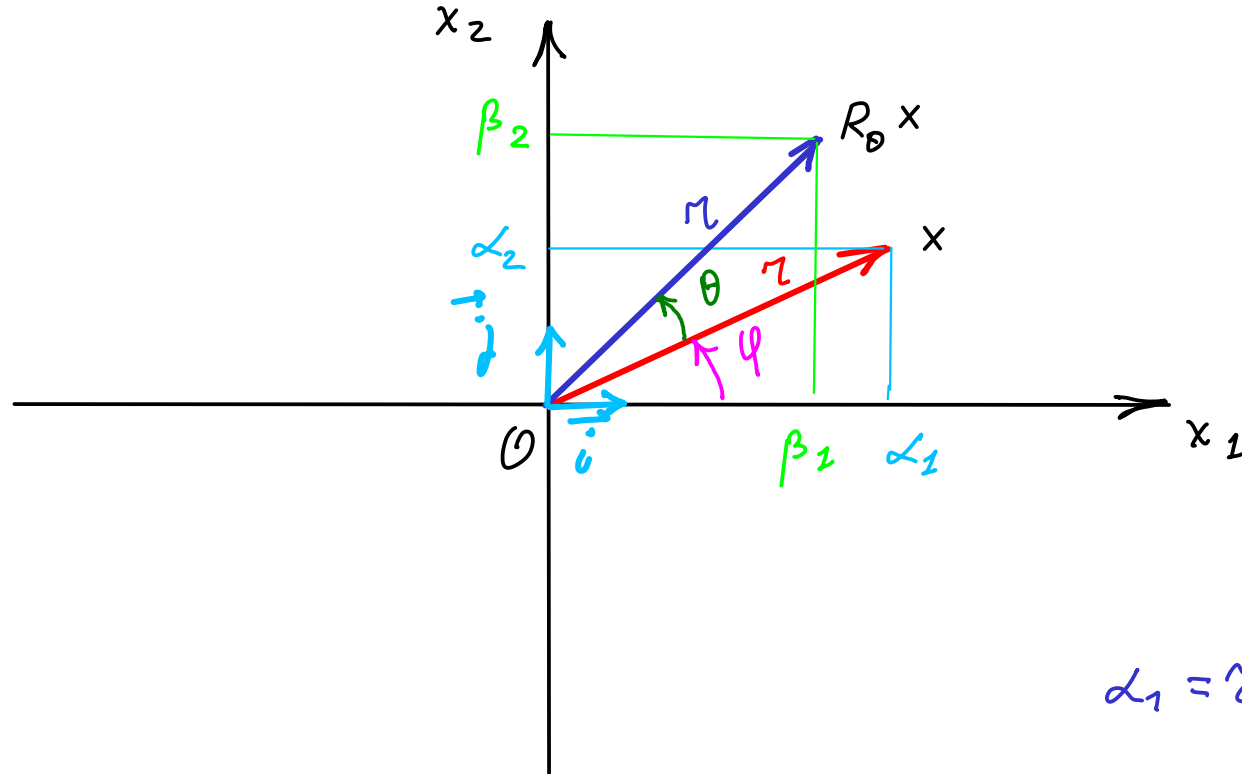
$$B[x]_B = \Gamma[x]_\Gamma \quad \text{כדי וז'}$$

אבל, בין $[x]_B$, $[x]_\Gamma$ יש יחס ברור.

"מערך מוקף" (E_2, θ)

$$[x] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} : \text{מנ״ס}$$

$$[R_\theta x] = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} : \text{פ״ב}$$



$$\alpha_1 = r \cos \varphi$$

$$\alpha_2 = r \sin \varphi$$

$$\beta_1 = r \cos(\theta + \varphi) = r(\cos \theta \cdot \cos \varphi - \sin \theta \cdot \sin \varphi) = \cos \theta \cdot \underbrace{r \cos \varphi}_{\alpha_1} - \sin \theta \cdot \underbrace{r \sin \varphi}_{\alpha_2} = \cos \theta \cdot \alpha_1 - \sin \theta \cdot \alpha_2$$

$$\beta_2 = r \sin(\theta + \varphi) = r(\sin \theta \cdot \cos \varphi + \cos \theta \cdot \sin \varphi) = \sin \theta \cdot \alpha_1 + \cos \theta \cdot \alpha_2$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

לכן, המטריצה R_θ המעבירה (x_1, x_2) ל-

$$[R_\theta] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

המטריצה R_θ המעבירה את $(\vec{i}, \vec{j})$ ל- $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

מרחב וקטורי

$$T: U \rightarrow V$$

m n

$$B := (b_1, \dots, b_m) \subset U$$

בסיס

$$\Gamma := (c_1, \dots, c_n) \subset V$$

$$Tb_1 \quad Tb_2 \quad \dots \quad Tb_m \in V$$

עמוד

בסיס T של U

$$\Gamma, B$$

$$[T]_{\Gamma}^B := \left([Tb_1]_{\Gamma}, [Tb_2]_{\Gamma}, \dots, [Tb_m]_{\Gamma} \right)$$

מטריצה

המרחב V

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{[T]_F^B : \mathbb{R}^3}{}$$

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

1

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)_{b_1, b_2, b_3}$$

$$F = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)_{c_1, c_2}$$

$$Tb_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Tb_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Tb_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

בסיס B של $\mathbb{R}^3$ (1)
 b_1, b_2, b_3 הן

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = Tb_i = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2$$

$$\gamma_1, \gamma_2 = ?$$

בסיס F של $\mathbb{R}^2$ (2)
 (c_1, c_2) הם Tb_1, Tb_2, Tb_3 הן

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \alpha_1 \\ 1 & -1 & \alpha_2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \alpha_1 \\ 2 & 0 & \alpha_1 + \alpha_2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \alpha_1 \\ 1 & 0 & \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \\ 1 & 0 & \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \end{array} \right) \sim$$

צריך לבדוק שהם בסיס:

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \end{array} \right)$$

$$[Tb_3]_r = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[Tb_2]_r = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -c_2$$

$$[Tb_1]_r = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad / \circledast$$

$$(-2)c_1 + (-1)c_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = Tb_3$$

$$[T]_r^B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

הערות

$$[T]_r^B \quad \text{הערות נוספות (3)}$$

$$S(x(t)) : t\dot{x}(t) + 3x(t)$$

$$[S]_E^E \quad : \underline{\int 3}$$

$$S: \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}_2[t] \quad \boxed{2}$$

$$E = (1, t, t^2) \quad \text{בסיס סטנדרטית}$$

e_1, e_2, e_3 ניקח את

$$Se_3 = t \cdot (2t) + 3t^2 = 5t^2$$

$$Se_2 = t \cdot 1 + 3t = 4t$$

$$Se_1 = 3$$

(1

$$se_3 = 5t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 5t^2$$

$$[se_3]_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$se_2 = 4t = 0 \cdot 1 + 4t + 0 \cdot t^2$$

$$[se_2]_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$se_1 = 3 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2$$

$$[se_1]_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$[S]_E^E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(3)

אם μ נא, $B = (b_1, \dots, b_m) \subset U$ אם μ , $T: U \rightarrow V$

אם μ נא ענ

$$C = (c_1, \dots, c_n) \subset V$$

$$[Tx]_r = [T]_r^B [x]_B$$

שכ

$$[x]_B = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} \quad \text{זו}$$

$$x = \sum_{i=1}^m \xi_i b_i \quad (1) \quad \underline{\text{הנחה 1}}$$

$$Tx = T\left(\sum_{i=1}^m \xi_i b_i\right) = \sum_{i=1}^m \xi_i T b_i \quad (=)$$

$$[T]_F^B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

$$: T \text{ מ } \mathcal{B}_1 \text{ ל } \mathcal{B}_2 \subset V$$

מספר שורות n

מספר עמודות m

$$[T]_F^B = \left([T b_1]_F, [T b_2]_F, \dots, [T b_m]_F \right) = \left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_{1m} \\ \alpha_{2m} \\ \alpha_{3m} \\ \vdots \\ \alpha_{nm} \end{pmatrix} \right)$$

$$[Tb_i]_r = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}$$

$$Tb_i = \alpha_{1i} c_1 + \alpha_{2i} c_2 + \alpha_{3i} c_3 + \dots + \alpha_{ni} c_n =$$

$$= \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} c_k$$

$$\textcircled{=} \sum_{i=1}^m \xi_i \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} c_k = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \xi_i \alpha_{ki} c_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \xi_i \alpha_{ki} \right) c_k = \sum_{k=1}^n \eta_k c_k$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = [Tx]_r \quad \text{ويعني}$$

$$x \in U \quad \text{ويعني} \quad \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{ki} \xi_i \right) c_k = \sum_{k=1}^n \eta_k c_k$$

ويعني

$$k=1, \dots, n \quad \text{ويعني} \quad \eta_k = \sum_{i=1}^m \alpha_{ki} \xi_i \quad \text{ويعني}$$

: $\beta_1, \dots, \beta_n$ - $\mathbb{C}$ $\delta_1, \dots, \delta_n$

$$\forall k \quad \beta_k - \delta_k = 0 \quad \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (\beta_k - \delta_k) c_k = 0 \quad \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \beta_k c_k - \sum_{k=1}^n \delta_k c_k = 0 \quad \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \beta_k c_k = \sum_{k=1}^n \delta_k c_k$$

$\uparrow$
: $\beta_1, \dots, \beta_n$

$$\eta_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \xi_i \quad \text{in } \mathbb{C}^n \quad (2)$$

: $\beta_1, \dots, \beta_n$ - $\mathbb{C}$ $\delta_1, \dots, \delta_n$

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

$$[Tx]_r = [T]_r^B [x]_B$$

. $\beta_1, \dots, \beta_n$

! 1321N $\sqrt{\quad}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \qquad 2 \times 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 5 & 2 \cdot 0 + 4 \cdot 7 \\ \hline -1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & -1 \cdot (-2) + 5 \cdot 5 & -1 \cdot 0 + 5 \cdot 7 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 28 \\ 14 & 17 & 25 \end{pmatrix}$$

$2 \times 2 \quad 2 \times 3 \quad 2 \times 3$

$$\begin{matrix} A & B \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \end{pmatrix} \end{matrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} & \alpha_{11}\beta_{13} + \alpha_{12}\beta_{23} \\ \hline \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} & \alpha_{21}\beta_{13} + \alpha_{22}\beta_{23} \end{array} \right)$$

$$(AB)_{ik} = \alpha_{i1}\beta_{1k} + \alpha_{i2}\beta_{2k} = \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} \beta_{jk}$$

$$B = (\beta_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, p}}, A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \quad \text{matrix multiplication}$$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \beta_{kj}$$

$$\forall i = 1, \dots, m$$

$$\forall j = 1, \dots, p$$

ע'נינים: N ו- M החדג

נניח $B = (b_1, \dots, b_n)$, $\Gamma = (c_1, \dots, c_n)$ בס'ם M במרחב V ו- N .

$$c_1 = \sum_{i=1}^n \mu_{i1} b_i$$

$$j = 1, \dots, n \quad c_j = \sum_{i=1}^n \mu_{ij} b_i$$

! $M := (\mu_{ij})_1^n$: מס' N ו- M חדג

$$\Gamma = B M_B^\Gamma$$

$$(c_1, \dots, c_n) = (b_1, \dots, b_n) M$$

" N ו- M חדג" - M

$$M_B^\Gamma = ([c_1]_B, \dots, [c_n]_B)$$

הנוסחה המפורסמת:

$$\Gamma = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{c_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{c_2} \right)$$

$$B = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{b_2} \right)$$

$$V = \mathbb{R}^2$$

4

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_B = ?$$

$$M_B^\Gamma = ? \quad \underline{\sqrt{3}}$$

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right]_B = ?$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \end{array} \right) \underset{\text{44' N8}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{x_1 + x_2}{2} \\ 0 & 1 & \frac{x_1 - x_2}{2} \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M_B^\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 4 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{invert}$$

$$(b_1, b_2) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 4 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{2} b_1 - \frac{1}{2} b_2, 4 b_1 - b_2 \right) = \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 4 + 1 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

invert

Def V - is a vector space Δ, Γ, B

$$M_B^\Delta = M_B^\Gamma M_\Gamma^\Delta \quad (1) \quad \text{is}$$

... $M_B^B = I \quad (2)$

$$M_B^\Gamma = (M_\Gamma^B)^{-1} \quad (3)$$

$(det M \neq 0)$ M is invertible

$$M_\Gamma^\Delta = M_B^\Gamma M_\Gamma^\Delta \iff \begin{cases} \Delta = \Gamma M_\Gamma^\Delta = B M_B^\Gamma M_\Gamma^\Delta \\ \text{is } B, \Gamma, \Delta \end{cases} \quad (1) \quad \text{is a consequence}$$

$$M_B^B = ([b_1]_B, [b_2]_B, \dots, [b_n]_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad (2)$$

Def $M_B^\Gamma M_\Gamma^B = M_B^B = I : (2), (1) \text{ is a consequence}$ (3)

$$\Gamma = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{c_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{c_2} \right)$$

$$B = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{b_2} \right)$$

$$V = \mathbb{R}^2 \quad \boxed{5}$$

$$M_B^\Gamma = ? \quad \underline{\text{3}}$$

$$E = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$:\mathbb{R}^2 \rightarrow$ $\text{הצגת וקטורים בסיסית}$

$$M_E^B = \left([b_1]_E, [b_2]_E \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$:M_E^B$$

$\text{בסיסית} \rightarrow \text{הצגת וקטורים}$

$$B \rightsquigarrow E \rightsquigarrow \Gamma$$

$$M_E^\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M_E^\Gamma \quad (2)$$

$$:M_B^\Gamma = M_B^E M_E^\Gamma \quad (3)$$

$$M_B^\Gamma = \left(M_E^B \right)^{-1} M_E^\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 4 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$\text{בסיסית} \rightarrow \text{הצגת וקטורים}$
 $\text{5231172} \rightarrow \text{117}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

מטריצי צימוד

$$T: V \rightarrow V$$

$$M_\Gamma^B = (M_B^\Gamma)^{-1}$$

$$[T]_B^B = M_B^\Gamma [T]_\Gamma^\Gamma M_\Gamma^B$$

על $B, \Gamma \subset V$ הם סטים

$$[T]_B^B = M [T]_\Gamma^\Gamma M^{-1} \quad \text{סימטרי}$$

$A \sim B$

$B = MAM^{-1}$: כל $M \in Mat_n$ ו"ק $\Leftrightarrow$ מטריצי צימוד $A, B \in Mat_n$



$A \sim B \iff$ על A, B מטריצי צימוד יציבים לכ

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

$\det A = \det B \iff A \sim B$ לכ

י.ע.נ

$$\det B = \det(MAM^{-1}) = \cancel{\det(M)} \cdot \det(A) \cdot (\cancel{\det(M)})^{-1} = \det A$$

הוכחה:

$$t_2(AB) = t_2(BA)$$

$$t_2 A = t_2 B \quad \textcolor{violet}{\Leftarrow} A \hookrightarrow B \quad \underline{\underline{\text{Coen}}}$$

וקאזיס ע³נ"מ וערכים ע³נ"מ

גזירה של λ

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

הפולינום המיינר

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$$

$A \in \text{Mat}_n$ ו- λ

$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda) \iff A \sim B \quad \underline{\underline{\text{Corollary}}}$$

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_n) = \det(MAM^{-1} - \lambda I_n) = \det(MAM^{-1} - \lambda MM^{-1}) =$$

הוכחה:

$$I_n = MM^{-1}$$

$$= \det(M(A - \lambda I_n)M^{-1}) = \det(M(A - \lambda I_n)) \cdot \cancel{\det(M^{-1})} = \det(M) \cdot \det(A - \lambda I_n) \cdot \cancel{(\det M)^{-1}} =$$

$$\boxed{\begin{aligned} \det(XY) &= \det X \cdot \det Y \\ \det(X^{-1}) &= (\det X)^{-1} \end{aligned}}$$

$$= \det(A - \lambda I_n) = p_A(\lambda).$$

$\Rightarrow$

$$p_B(\lambda) = p_A(\lambda).$$

Q.E.D.

מחזורי חיים בג'ו' ו'ג'

$$\text{o'od } b_1, \dots, b_n \in V$$
$$T: V \rightarrow V$$

$$[T]_B^B := \left([Tb_1]_B \quad [Tb_2]_B \quad [Tb_3]_B \quad \dots \quad [Tb_n]_B \right)$$

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

 $\leq$

$T: V \rightarrow V$ נ"ח $b_1, \dots, b_n \in V$ ו' $\sqrt{e}$ כל צורה ליניארית

123

$$:T \int e^{i\sum_{j=1}^n b_j \phi_j} :$$

$$\begin{aligned} T b_1 &= \lambda_1 b_1 = \lambda_1 b_1 + 0 b_2 + 0 b_3 + \dots + 0 b_n \\ T b_2 &= \lambda_2 b_2 = 0 b_1 + \lambda_2 b_2 + 0 b_3 + \dots + 0 b_n \\ T b_3 &= \lambda_3 b_3 = 0 b_1 + 0 b_2 + \lambda_3 b_3 + \dots + 0 b_n \\ &\vdots \\ T b_n &= \lambda_n b_n = 0 b_1 + 0 b_2 + 0 b_3 + \dots + \lambda_n b_n \end{aligned}$$

1

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

התחלה: נתון $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ מוגדר על ידי

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2$$

$$: P_T(\lambda) \quad \text{פולינום המינימום של } T$$

$$T \text{ (1) } \text{הערות:}$$

$$\det(T - \lambda \text{id})$$

הערות: $\det(T - \lambda \text{id})$ הוא פולינום המינימום של T .

$$E = (e_1, e_2)$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A := [T]_E^E = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = \det(T - \lambda \text{id}) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-3) - 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

הערות: $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$

$$(\lambda+1)(\lambda-4) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$Tu = \lambda u \\ u \neq 0$$

$$A = (u_1, u_2) \text{ כאשר } [T]_A^A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{בגלל } u_1, u_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$$

(2) טענה נוספת:

$$\begin{aligned} T u_1 &= -u_1 \\ T u_2 &= 4 u_2 \end{aligned}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (A + I) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$: u_1 \quad \lambda_1 = -1$$

הזמנו למערכת של משוואות ליניאריות, המומזנוג, מתקבלים בעזרתן לא סביריטי. המערכת:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(A - 4I) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$: u_2 \quad \lambda_2 = 4$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M := (u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ג'ל:

$$M^{-1} A M = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^2 \ni v = 2u_1 + (-1)u_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} \quad : [v]_{\Lambda} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{we know } T(v) \text{ is } 13 \text{ NJ } (3)$$

$$Tv = T \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{proof}$$

$$T(p(x)) := (x-2) \cdot p'(x) + p(x) \quad T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x] \quad (2)$$

$$[T]_E^E = \begin{pmatrix} [T1]_E & [Tx]_E & [Tx^2]_E \end{pmatrix} \quad E = (1, x, x^2) \quad : \text{very } (1)$$

$$T1 = (x-2) \cdot 0 + 1 = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$Tx = (x-2) \cdot 1 + x = 2x - 2 = (-2) \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$Tx^2 = (x-2) \cdot 2x + x^2 = 3x^2 - 4x = 0 \cdot 1 + (-4) \cdot x + 3 \cdot x^2$$

$$A := [T]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= 3\end{aligned}$$

א"י 1
 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1 - e$ $\int \lambda$
 .א' ציען א"י 5

$$[T]_{\Lambda}^{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

: א"י א' ציען א"י 5 $\Leftarrow$ א"י א' ציען א"י 5

$\Leftarrow$ א"י א' ציען א"י 5 $\Lambda = (q_1, q_2, q_3)$ א"י

א"י א' ציען א"י 5

$$Tq_1 = q_1$$

: א"י א' ציען א"י 5 (2

$$Tq_2 = 2q_2$$

$$Tq_3 = 3q_3$$

$$[T]_E^E = A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - e \quad \text{א"י א' ציען א"י 5} \quad [q_1]_E = ?$$

: q_1 $\lambda_1 = 1$

$$(A - I) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = 0 = c \Rightarrow [q_1]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow q_1 = 1$$

$$(A - 2I)[q_2] = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+2b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

$$: q_2 \quad \lambda_2 = 2$$

$$[q_2]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow q_2 = 2 - x$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[q_3]_E = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow q_3 = (x-2)^2$$

$$: q_3 \quad \lambda_3 = 3$$

$$T_1 = (x-2) \cdot 0 + 1 = 1$$

$$T(2-x) = (x-2) \cdot (-1) + (2-x) = 2(2-x)$$

$$T((x-2)^2) = (x-2) \cdot 2(x-2) + (x-2)^2 = 3(x-2)^2$$

∴ 3 个

$$T^{-1}(p), T^2(p) \quad \text{1/2 1/3 N} \quad p(x) = 2x^2 - x - 2 \quad \text{1/2 1/3 (3)}$$

$$T(p) = (x-2)(4x-1) + 2x^2 - x - 2 = 4x^2 - 8x - x + 2 + 2x^2 - x - 2 = 6x^2 - 10x$$

$$T^2(p) = T(6x^2 - 10x) = (x-2)(12x-10) + 6x^2 - 10x = 12x^2 - 24x - 10x + 20 + 6x^2 - 10x = 18x^2 - 44x + 20$$

----- ??? !!! 

$$\Lambda = (1, 2-x, (2-x)^2)$$

$$[p(x)]_\Lambda = ?$$

צריך תכניתם: פשוטו בביטוי הצרתי:

$$M = \begin{pmatrix} [q_1]_E & [q_2]_E & [q_3]_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = EM$$

נצטרך את המטריצה הפורייה:

$$[p]_\Lambda = M^{-1}[p]_E \iff [p]_E = M[p]_\Lambda \quad \text{כאן}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{כאן} \quad M^{-1} \quad \text{כאן} \quad \text{כאן}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_1 - 4R_3 \rightarrow R_1$
 $R_2 + 4R_3 \rightarrow R_2$
 $R_1 + 2R_2 \rightarrow R_1$
 $-R_2 \rightarrow R_2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 11 \\ 5 & 11 & -13 \end{pmatrix} \quad A^T = A$$

Service client !

$\gamma_{\mu\nu} = A \cdot e^{-\lambda}$

הערה: $A \preceq A^T = A$ Coen

בענין נ"ת $\sqrt{n}$ צ"ל $A \in \text{Mat}_n$ ו' γ'' צ"ל $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\forall i \neq j$

1/5 A סכום נה.

דאס איז א פארשטאנדליכע זאך

(2) γ'' : γ''

$$[p]_{\Lambda} = M^{-1} [p]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$: [p]_{\Lambda} \text{ sk } \int \mu \delta \mu$$

$$(2x^2 - x - 2 = 4 - 7(2-x) + 2(2-x)^2, \int)$$

$$[T^7]_{\Lambda} = ([T]_{\Lambda})^7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} 1^7 & 0 & 0 \\ 0 & 2^7 & 0 \\ 0 & 0 & 3^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 128 & 0 \\ 0 & 0 & 2187 \end{pmatrix}$$

$$: [T^7]_{\Lambda} \text{ sk } \int \mu^7$$

$$[T^7 p]_{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 128 & 0 \\ 0 & 0 & 2187 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -896 \\ 4374 \end{pmatrix}$$

$$T^7 p = 4 - 896(2-x) + 4374(4-4x+x^2) = 15708 - 16600x + 4374x^2$$

$$[T^{-1}]_{\Lambda} \text{ sk } \int \mu$$

$$[T^{-1}]_{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$[T^{-1} p]_{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{7}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} p = 4 - \frac{7}{2}(2-x) + \frac{2}{3}(4-4x+x^2) =$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{5}{6}x + \frac{2}{3}x^2$$

מרחבים אוקלידיים

מכפלה פנימית

V מרחב וקטורי מעל R
 $n = \dim V$

לכל $u, v \in V$ נגזיר סקלר $\langle u, v \rangle$:

$$\begin{aligned}
 &\langle u, u \rangle \geq 0 \quad (1) \\
 &u = 0 \iff \langle u, u \rangle = 0
 \end{aligned}$$

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad (2)$$

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad (3)$$

$$\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle \quad (4)$$

$\langle u, v \rangle$
 (u, v)
 $u \cdot v$

$$\begin{aligned}
 \alpha(\beta + \gamma) &= \alpha\beta + \alpha\gamma \\
 (\alpha\beta)\gamma &= \alpha(\beta\gamma)
 \end{aligned}$$

אם V יש $\langle \cdot, \cdot \rangle$ אז לכל $v \in V$
 מוגדר "האורך" של v :

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

ואם ניתן לאמוד מתי $u \perp v$:

$$\langle u, v \rangle = 0 \iff$$

$$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) = \text{מרחב אוקלידי}$$

צד N

$$\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

1

$$\langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$$

2

$$\langle u, v+w \rangle = \langle v+w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle \quad \text{הוכחה}$$

2

2

2

1

u, v אורטוגונליים

$$\langle u, v \rangle = 0 \iff u \perp v$$

כבר

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\sqrt{\langle u, u \rangle \cdot \langle v, v \rangle}} : u, v \text{ ב' } \underline{\text{כוו'}}$$

הצורה הכללית

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

כאשר

$$\|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$$

כאשר

$$\|u - v\| : \underline{\text{מרחק}}$$

2

1) המרחב הסלנולי (הזניח) $V = \mathbb{R}^2$

$$\langle u, v \rangle := \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 \quad \text{כאשר } u = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

$$\langle u + v, w \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1) \gamma_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \gamma_2 = \underbrace{\alpha_1 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_1}_{\langle u, w \rangle} + \underbrace{\alpha_2 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_2}_{\langle v, w \rangle} =$$

$$= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

$$\langle \lambda u, v \rangle = \left\langle \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda \alpha_1 \\ \lambda \alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda \alpha_1 \beta_1 + \lambda \alpha_2 \beta_2 = \lambda (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) = \lambda \langle u, v \rangle$$

3

$$\langle u, u \rangle = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \geq 0 \quad \text{כאשר } u = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \iff \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0$$

$$\langle u, v \rangle = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = \beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 = \langle v, u \rangle$$

2

$$\langle u, v \rangle = \overset{1}{\alpha_1} \overset{1}{\beta_1} + \overset{1}{\alpha_1} \overset{2}{\beta_2} + \overset{1}{\alpha_2} \beta_1 + 2 \overset{2}{\alpha_2} \beta_2 \quad V = \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_1 = 1 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0 \end{array} \right\}$$

הצגה - (k)

$$\Rightarrow \langle u, u \rangle > 0$$

ברור ל- (3), (2), (1) מתקיימים.

$$\forall u \neq 0$$

מתקיים $\alpha_1 \beta_2$ כפני
עוד מתקיים
כפני $\alpha_2 \beta_1$

סך כל סקאלרים (k) מתקיימים.

$$u = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = u^T v$$

$$\langle u, v \rangle =$$

$$v = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

לכן נניח $\langle u, v \rangle = a_{11} \alpha_1 \beta_1 + a_{12} \alpha_1 \beta_2 + a_{21} \alpha_2 \beta_1 + a_{22} \alpha_2 \beta_2$

$$\begin{cases} A^T = A \\ \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

ש/ $\langle u, v \rangle$ מכסהה פנימי

$$A \text{ סימטרית} = A^T = A$$

$$\langle u, v \rangle = u^T v \quad \Leftrightarrow A = I_2$$

מכסהה $\subset \mathbb{R}^2$ וזוהי!
(הצגה)

מתקיים פנימי וזהו!!

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

נניח $\langle u, v \rangle = u^T A v$ כצורה

עליונה $\uparrow$ מתחילה
עליונה $\uparrow$ מתחילה

$\mathbb{R}^n$ -2 $\langle u, v \rangle = u^T A v$'s/k, $A \in \text{Mat}_n$ n'w Coen

n מ'נ'נ'ר'ס כ"ע"פ

$$A = \begin{pmatrix} \overbrace{a_{11}}^{\Delta_1} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \overbrace{a_{22}}^{\Delta_2} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \overbrace{a_{33}}^{\Delta_3} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_n = \det A$$

$$\begin{cases} A^T = A \\ \Delta_i > 0 \\ i = 1, \dots, n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Delta_1 = a_{11}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

הערקה של $\mathbb{C}^n$ ריבוי

ערקה
trace
spur

$$t_2(A) := \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}$$

$$A = (\alpha_{ij})_1^n \in \text{Mat}_n$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$t_2(B) = 3 + (-3) = 0$$

$$t_2(A) = 1 + (-3) = -2$$

$$t_2(A+B) = t_2(A) + t_2(B)$$

$$\Leftarrow A, B \in \text{Mat}_n \quad (1) \quad \underline{\underline{\mathbb{C}^n}}$$

$$t_2(BA) = t_2(AB)$$

$$\Leftarrow \begin{cases} A \in \text{Mat}_{m \times n} \\ B \in \text{Mat}_{n \times m} \end{cases} \quad (2)$$

$$t_2(A^T) = t_2(A)$$

$$\Leftarrow A \in \text{Mat}_n \quad (3)$$

$$t_2(\lambda A) = \lambda t_2(A) \quad \Leftarrow A \in \text{Mat}_n \quad (3)$$

$$B = (\beta_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$$

$$A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

2 : 78517

$$\text{tr}(AB) = \sum_{k=1}^m (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \beta_{ik}$$

$$(AB)_{pq} = \sum_{i=1}^n \alpha_{pi} \beta_{iq}$$

$$(AB)_{kk} = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \beta_{ik}$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^3 a_{ik} = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{21} + a_{22} + a_{23}$$

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^2 a_{ik} = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} + a_{31} + a_{32}$$

$$\text{tr}(BA) = \sum_{l=1}^n (BA)_{ll} = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{lj} \alpha_{jl} \underset{l \rightsquigarrow i}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij} \alpha_{ji} \underset{j \rightsquigarrow k}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \beta_{ik} \alpha_{ki} = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \beta_{ik}$$

с.е.н

ג.ע.נ

$$M \cdot (A M^{-1})$$

$$\text{tr}(M A M^{-1}) = \text{tr}((A M^{-1}) M) = \text{tr}(A M^{-1} M) = \text{tr}(A)$$

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(B) \iff A \sim B \quad \underline{\underline{\text{ג.ע.נ}}}$$

$$\iff B = M A M^{-1} \iff A \sim B \quad \underline{\underline{\text{הוכחה:}}}$$

$$A \text{ יש } n \text{ ערכים } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ ועוד } \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

נכון

ג.ע.נ

$$\text{tr}(A) = \text{tr} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \iff A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, C. \text{ Jordan } \underline{\underline{\text{הוכחה:}}}$$

$$\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^T B) \quad \text{כאשר} \quad A, B \in V = \text{Mat}_{n \times m} \quad (2)$$

הוכחה: הדרגות

האינטגרל הנמוסי

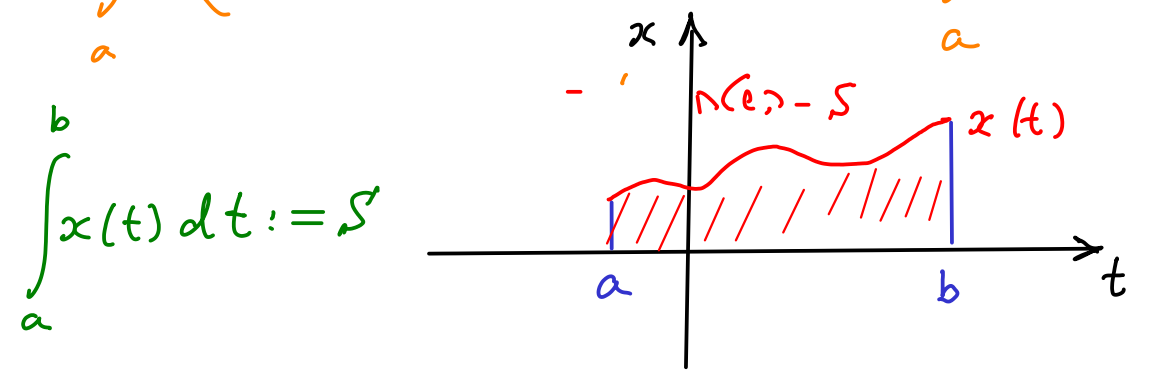
גורמים:

(1) פונקציה $x(t)$ של משתנה t

(2) $\mathcal{C}$ ו $[a, b]$ $a \leq t \leq b$ בתחום ההדדיות של x .

$$\int_a^b (\lambda x(t) + \mu y(t)) dt = \lambda \int_a^b x(t) dt + \mu \int_a^b y(t) dt$$

האינטגרל נוסח $\int_a^b x(t) dt$ קיים

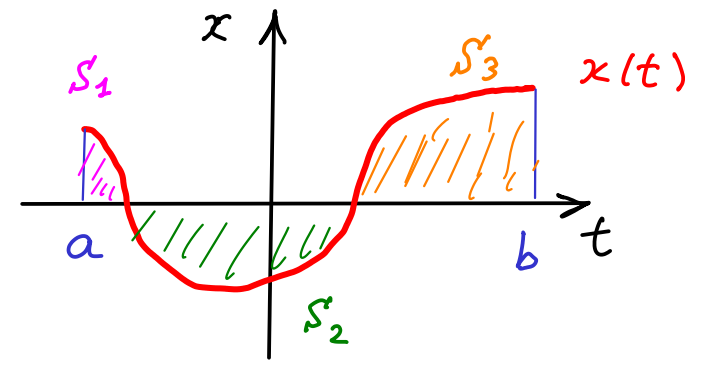


$$\int_a^b x(t) dt := S$$

פירוש "אינטגרל":

$f(t) \geq 0$ ו $a \leq t \leq b$

$$\int_a^b x(t) dt := S_1 - S_2 + S_3$$

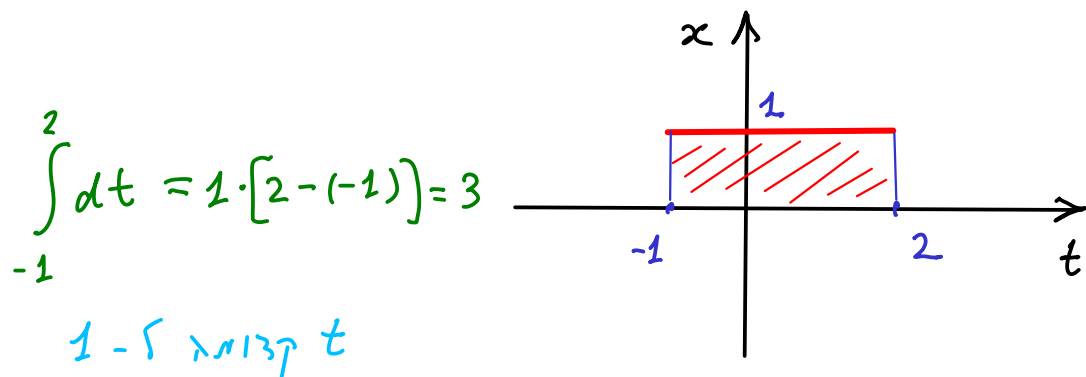


אינטגרל פולינום

$$\int_{-1}^2 (2t^3 - 8t + 1) dt = 2 \int_{-1}^2 t^3 dt - 8 \int_{-1}^2 t dt + \int_{-1}^2 dt$$

$$x(t) = 2t^3 - 8t + 1$$

$$[-1, 2]$$



$$\int_{-1}^2 dt = 1 \cdot [2 - (-1)] = 3$$

1-5 נמצא t

$$\int_{-1}^2 dt = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$$

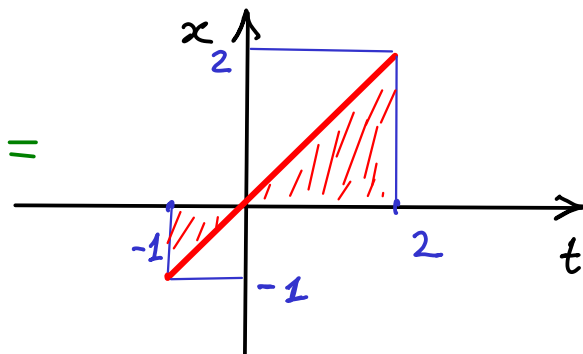
$$\int_{-1}^2 t^3 dt = ?$$

t^3 הפונקציה
ה'ע' הנמצא
 t^4 הפונקציה

$$\int_{-1}^2 t dt = -\left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$= -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

$$\int_{-1}^2 t dt = \frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \frac{3}{2}$$



t-5 נמצא $\frac{t^2}{2}$

$$\left(\frac{d}{dt} t^4\right) = 4t^3$$

$$t^3 = \left(\frac{t^4}{4}\right)$$

$$\frac{t^{n+1}}{n+1}$$

הפונקציה t^n ה'ע' הנמצא

$$\dot{F}(t) = f(t) : F(t) \text{ نىو } \text{C} \in \mathbb{N}$$

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \quad 's/k$$

$$\int_a^b t^n dt = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}, \text{ C.O.O}$$

$$\int_{-1}^2 t^3 dt = \frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{16-1}{4} = \frac{15}{4}$$

:10/12/13/15/17

$$\int_{-1}^2 (2t^3 - 8t + 1) dt = 2 \int_{-1}^2 t^3 dt - 8 \int_{-1}^2 t dt + \int_{-1}^2 1 dt = 2 \cdot \frac{15}{4} - 8 \cdot \frac{3}{2} + 3 = \frac{15}{2} - 12 + 3 = 7.5 - 9 = -\frac{3}{2}$$

10/12



מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}_n[t]$

תהי $C[a, b]$ ו- x, y פונקציות רציפות. מכפלה פנימית במרחב $\mathbb{R}_n[t]$ נגדפת:

$$\langle x, y \rangle := \int_a^b x(t) y(t) dt$$

נגדוף $V = \mathbb{R}_3[t]$ ו- $x(t) = t^3$, $y(t) = 2t + 1$. נחשב $\langle x, y \rangle := \int_0^1 x(t) y(t) dt$ (3)

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 t^3 (2t + 1) dt = \int_0^1 (2t^4 + t^3) dt = 2 \int_0^1 t^4 dt + \int_0^1 t^3 dt = \frac{2}{5} (1^5 - 0^5) + \frac{1}{4} (1^4 - 0^4) = \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{13}{20}$$

נחשב את $\|x\|^2$

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \int_0^1 t^3 \cdot t^3 dt = \int_0^1 t^6 dt = \frac{1}{7} (1^7 - 0^7) = \frac{1}{7} \Rightarrow \|x\| = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\|y\|^2 = \langle y, y \rangle = \int_0^1 (2t + 1)^2 dt = \int_0^1 (4t^2 + 4t + 1) dt = 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{4}{3} + 3 = \frac{13}{3} \Rightarrow \|y\| = \sqrt{\frac{13}{3}}$$

$$y(t)=2t+1, x(t)=t^3, \langle x, y \rangle := \int_{-1}^1 x(t)y(t) dt \quad \text{w.r.t.} \quad V = \mathbb{R}_3[t] \quad (4)$$

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^1 t^3(2t+1) dt = \int_{-1}^1 (2t^4 + t^3) dt = 2 \int_{-1}^1 t^4 dt + \int_{-1}^1 t^3 dt = 2 \left. \frac{t^5}{5} \right|_{-1}^1 + \left. \frac{t^4}{4} \right|_{-1}^1 = 2 \left(\frac{1^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} \right) + \left(\frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} \right) = 0$$

$$t^n \rightarrow \int \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\|x\| = \sqrt{\frac{2}{7}} \quad \text{w.r.t.} \quad \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \int_{-1}^1 t^6 dt = \left. \frac{t^7}{7} \right|_{-1}^1 = \frac{1^7}{7} - \frac{(-1)^7}{7} = \frac{2}{7}$$

$$\|y\|^2 = \langle y, y \rangle = \int_{-1}^1 (2t+1)^2 dt = \int_{-1}^1 (4t^2 + 4t + 1) dt = 4 \int_{-1}^1 t^2 dt + 4 \int_{-1}^1 t dt + \int_{-1}^1 1 dt = 4 \left. \frac{t^3}{3} \right|_{-1}^1 + 4 \left. \frac{t^2}{2} \right|_{-1}^1 + \left. t \right|_{-1}^1 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{7}{2} \cdot \frac{3}{14}} = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{4}{5 \cdot 2} \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

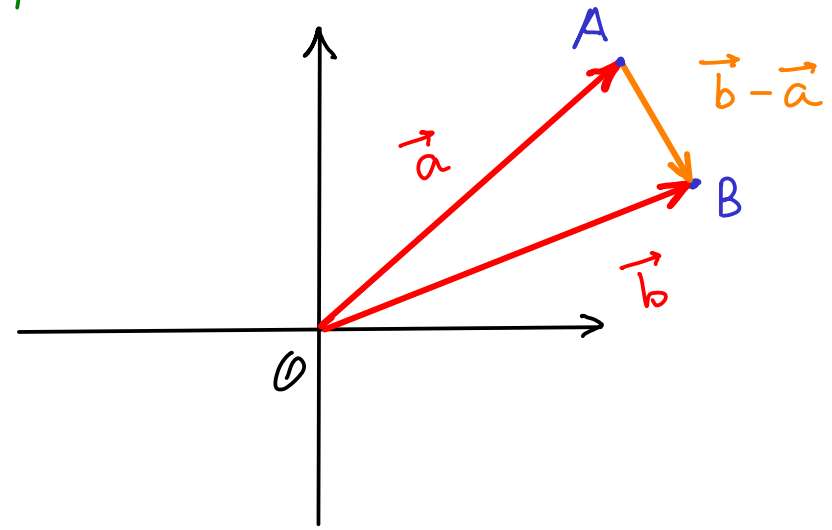
$$\|y\| = \sqrt{\frac{14}{3}} \quad \text{כ"ס}$$

ה"ס"ו"ל" כ"ס x ו- y :

הנורמה

כמה ומה ניקח לפרט באורך u ? $\|u\|^2 := \langle u, u \rangle$

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$
 $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$

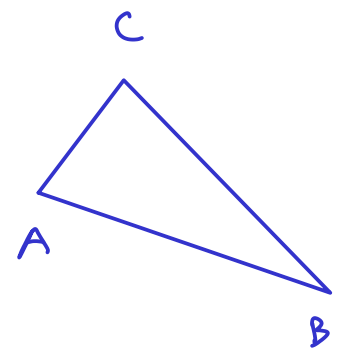


$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

נקח $\vec{b} - \vec{a}$

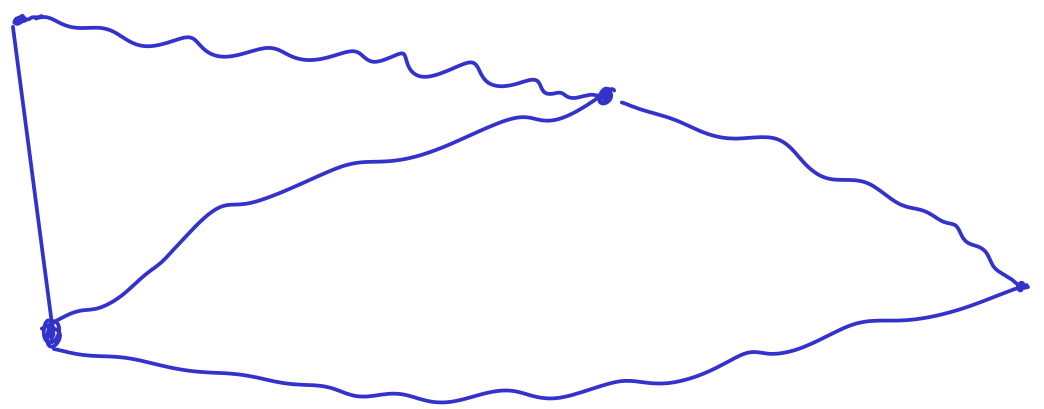
זהו האורך של הצלע AB $\|\vec{b} - \vec{a}\|$

לפי $\|\vec{b} - \vec{a}\|$ המרחק בין הנקודות A, B



$AB \leq AC + CB$
גודל נכון

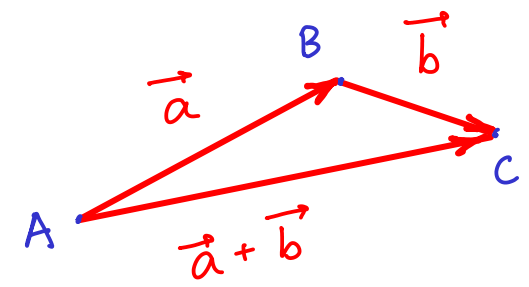
אי-שוויון המשולש



$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$

$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$! נכונה, u, v

מה צודק מהמרחק ?
!! אי-שוויון המשולש !!

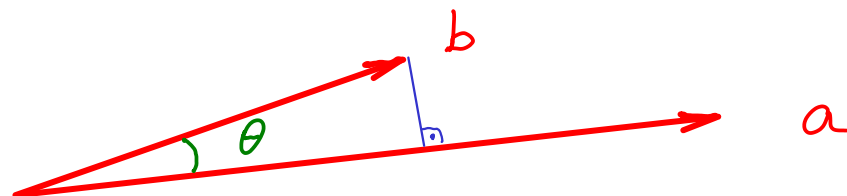


$AC \leq AB + BC$

$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

Cauchy - Schwartz $\frac{1}{\|x\| \|y\|}$

מכפלה פנימית - ערך 2 $\sqrt{\langle x, y \rangle}$



$$x=0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

$$\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\langle a, b \rangle = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos \theta$$

$$\langle a, a \rangle = \|a\|^2$$

$$\cos \theta = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$$

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

מסקנה:

היאם זה נכון לכל מכפלה פנימית?

$$\frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

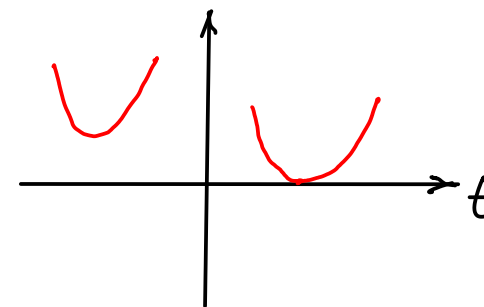
(A. Cauchy - J. Schwarz) Coen

$$0 \leq \|x + ty\|^2 = \langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + 2t\langle x, y \rangle + t^2\langle y, y \rangle =$$

דאס איז

$$= \|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2$$

$$t^2\|y\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + \|x\|^2 \geq 0$$



$$at^2 + bt + c \geq 0$$

ע"ע 1°

1 ע"ע 2°

$$at^2 + bt + c = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

אין דעם פאלע

$$\Leftrightarrow b^2 - 4ac \leq 0$$

המקרה שני:

$$a = \|y\|^2$$

$$b = 2 \langle x, y \rangle$$

$$c = \|x\|^2$$

$$(2 \langle x, y \rangle)^2 - 4 \|y\|^2 \cdot \|x\|^2 \leq 0$$

$$4 \langle x, y \rangle^2 \leq 4 \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

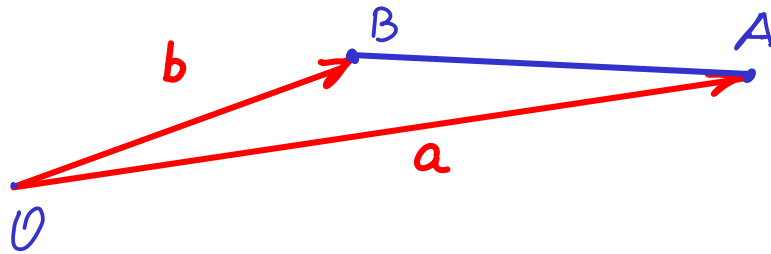
$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

.f.e.v

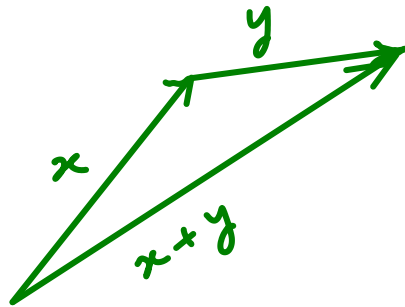
אי-שוויון המשולש

אנחנו מחזיקים את הנרמה $\|x\|$ כי $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$



המרחק בין A, B : $\|b-a\|$

האם ניתן לומר כי $\|x-y\|$ הוא המרחק בין x, y ?



$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

אי-שוויון המשולש:

Coen $\square$ עבור $x, y \in V$ נ"מ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ וע"כ $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$

ג'כ"ה:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

ג'כ"ה Coen-Schwarz $\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$

ג'כ"ה $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$

ג'כ"ה $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

ג'כ"ה: $\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$

ג'כ"ה: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ נ"מ, ד"ר

Coen

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

||
 וקטור x במרחב n -ממדי נקרא וקטור יחידה אם $\|x\|=1$

ניגן סנור כל $x \neq 0$: $\frac{1}{\|x\|} x$ וקטור יחידה

$$y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

$$\langle x, y \rangle = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3$$

$$\|x\|^2 = 1^2 + (-2)^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$

$$\|x\| = \sqrt{14}$$

$$\frac{1}{\sqrt{14}} x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad V = \mathbb{R}^3 \text{ מכסה פנימי רגיל,} \quad (1)$$

$$x(t) = 2t + 1, \quad \langle x, y \rangle = \int_{-1}^1 x(t)y(t)dt \quad \text{כסה } V = \mathbb{R}_2[t] \quad (2)$$

$$\|x\|^2 = \int_{-1}^1 (2t+1)^2 dt = \int_{-1}^1 (4t^2 + 4t + 1) dt = 4 \int_{-1}^1 t^2 dt + 4 \int_{-1}^1 t dt + \int_{-1}^1 1 dt = 4 \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 + 4 \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 + t \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$$

$$\|x\| = \sqrt{\frac{14}{3}}$$

$$\frac{1}{\|x\|} x = \sqrt{\frac{3}{14}} (2t + 1)$$

בסיסים אורתונורמליים

$$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \text{ מרחב אוקלידי}$$

$$n = \dim V$$

$$e_1, \dots, e_n \in V \text{ בסיס אורתונורמלי} \Leftrightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0 \text{ כאשר } i \neq j$$

זוג פאונדמנטלי

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$u_1, \dots, u_n \in V \text{ בסיס אורתונורמלי} \Leftrightarrow \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$$

מערכת וקטורים $x_1, x_2, \dots, x_k$ אורתונורמלית אם $x_i \neq 0$ וחסות $i \neq j$ מתקיים $\langle x_i, x_j \rangle = 0$.

לעם כי מערכת אורתונורמלית בג"ל.

$$\begin{aligned} \delta_{12} &= 0 & \delta_{22} &= 1 \\ \delta_{13,7} &= 0 & \delta_{23,23} &= 1 \end{aligned}$$

הוכחה: נניח $x_1, \dots, x_k \in V$ מערכת אורתונורמלית כי $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ לכל $i \neq j$.

נניח $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0$, אז $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

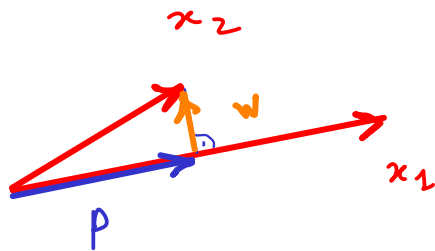
$$\left\langle \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle = \lambda_j \langle x_j, x_j \rangle = \lambda_j \|x_j\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0 \quad (j=1, \dots, k)$$

לע.נ

$x_j \neq 0$ כי $\|x_j\| \neq 0$

הצגה $e_1, \dots, e_n$ אורתונורמלית $\Leftrightarrow$ בסיס אורתונורמלי $\frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|}$

projection



$k=1, \dots, n$ וכל

$$\alpha_k = \langle x, u_k \rangle$$

$\Leftrightarrow$

משפט $\left\{ \begin{array}{l} \text{בסיס אורתונורמלי } u_1, \dots, u_n \in V \\ x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \in V \end{array} \right.$

$$p + w = x_2$$

$$w = x_2 - p$$

$$w \perp p$$

$$x_2 - p \perp p$$

כל בסיס אורתונורמלי

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i \quad | \text{ } \delta$$

אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n \in V$

$\Downarrow$

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i$$

$$p = \sum_{i=1}^k \frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i$$

$$(x-p) \perp p$$

3/6

$$k < n \quad \text{כל } p := \sum_{i=1}^k \langle x, u_i \rangle u_i \quad \text{no} \quad \underline{\underline{\text{צריך}}}$$

$$\langle x-p, p \rangle = 0 \quad \text{צ"ל}$$

הוכחה:

$$x-p = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i - \sum_{i=1}^k \langle x, u_i \rangle u_i = \sum_{i=k+1}^n \langle x, u_i \rangle u_i$$

$$\langle x-p, p \rangle = \left\langle \sum_{i=k+1}^n \langle x, u_i \rangle u_i, \sum_{j=1}^k \langle x, u_j \rangle u_j \right\rangle = \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=1}^k \langle \langle x, u_i \rangle u_i, \langle x, u_j \rangle u_j \rangle =$$

$\sum_{i,j} \langle x, u_i \rangle \langle x, u_j \rangle \langle u_i, u_j \rangle$
 צריך להוכיח
 $\langle u_i, u_j \rangle = 0$

$$= \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=1}^k \langle x, u_i \rangle \langle x, u_j \rangle \langle u_i, u_j \rangle = 0$$

$$\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

$$\langle u, v+w \rangle = \langle v+w, u \rangle =$$

$$= \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$$\langle u, \mu v \rangle = \langle \mu v, u \rangle = \mu \langle v, u \rangle = \mu \langle u, v \rangle$$

$$i, j \quad \text{כל } i \neq j \quad \langle u_i, u_j \rangle = 0$$

$$i = k+1, \dots, n$$

$$j = 1, \dots, k$$

$$i \neq j \quad \text{כל}$$

צ"ל

תוצאה $\sum_{i=1}^k \langle x, u_i \rangle u_i$ הוא הפרויקציה של x על הוקטור L כגון $L = \text{Span}(u_1, \dots, u_k) \subset V$

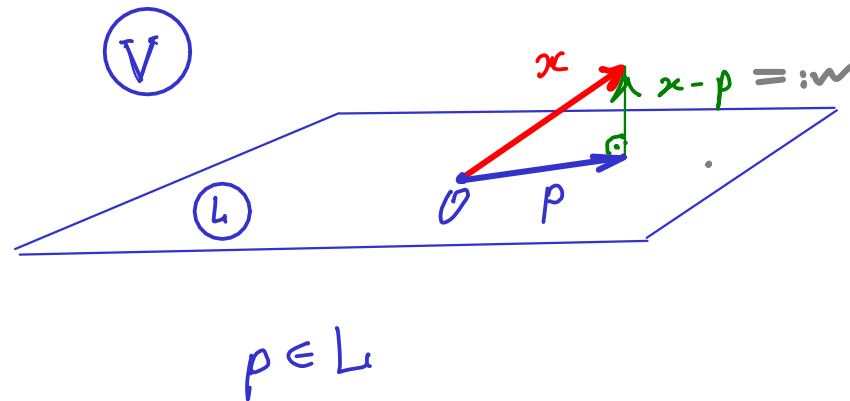
נניח שגורם L יש בסיס אורתונורמלי

$x \in V$ $e_1, \dots, e_k \in L$

$p = \sum_{i=1}^k \frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i \in L$ $x \in V$ כל x יכול להיות

$w := x - p$ הנשאר

$w \perp p$ כל



$x - p \perp p$

$x - p = x - \sum_{i=1}^k \frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i$

Gram-Schmidt רשימה

$$p = \sum_{i=1}^k \frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i$$

$$e_1 := b_1$$

$$e_{k+1} := b_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle b_{k+1}, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i$$

$$b_1, \dots, b_n \in V \quad \text{בסיס}$$

$$e_1, \dots, e_n \text{ - בסיס אורתוגונלי}$$

$$e_1 := b_1$$

$$e_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1$$

$$e_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 - \frac{\langle b_3, e_2 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} e_2$$

.....

$$e_k := b_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle b_k, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i$$

$$\begin{cases} \text{ist } b_1, b_2, b_3 \\ \text{v.d.} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ist } \exists \text{ eine Basis von } V = \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

$$e_1 := b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$e_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{11}{14} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{11}{14} \\ 3 - \frac{11}{7} \\ 1 - \frac{33}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{14} \\ \frac{10}{7} \\ -\frac{19}{14} \end{pmatrix}$$

$$e_3 = b_3 - \frac{\langle b_3, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 - \frac{\langle b_3, e_2 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} e_2 =$$

2

האם V היא תת-חלל? $V := \text{span}(1, \sin(2x), \cos(2x))$:/ $\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$

$$1 \leq \dim V \leq 3$$

$$\langle 1, \sin(2x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) dx = 0 \Rightarrow 1 \perp \sin(2x)$$

$$\langle 1, \cos(2x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x) dx = 0 \Rightarrow 1 \perp \cos(2x)$$

$$\langle \sin(2x), \cos(2x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) \cdot \cos(2x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(4x) dx = 0 \Rightarrow \sin(2x) \perp \cos(2x)$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$$

נסקרה: $1, \sin(2x), \cos(2x)$ הם בסיס

$(\dim V = 3 \text{ בסך הכל})$

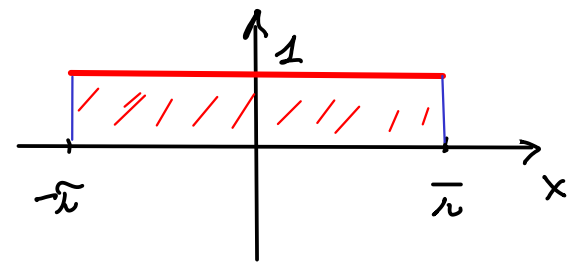
$$S = 2\pi$$

האם היא אורתונורמלית?

$$\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 2$$

$$\|1\| = \sqrt{2}$$

$$u_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\| \sin(2x) \|^2 = \langle \sin(2x), \sin(2x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(2x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1 \quad \Rightarrow \quad \| \sin(2x) \| = 1 \quad \Rightarrow \quad u_2 = \sin(2x)$$

$$\| \cos(2x) \|^2 = \langle \cos(2x), \cos(2x) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1 \quad \Rightarrow \quad \| \cos(2x) \| = 1 \quad \Rightarrow \quad u_3 = \cos(2x)$$

$\forall \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2x), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2x) : \text{orthonormal basis}$

הצגת וקטור במרחב

$$e_1, \dots, e_n \in V$$

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i$$

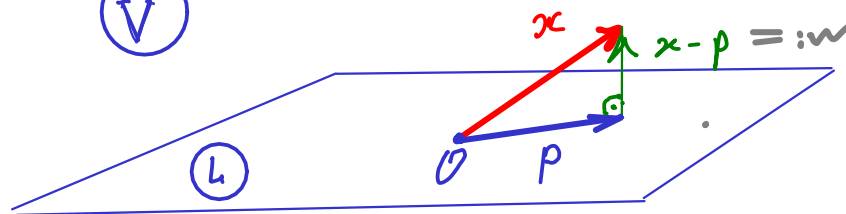
$$[x] = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

$$\xi_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle}$$

$$k < n \quad p = \sum_{i=1}^k \frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i \in \text{span}(e_1, \dots, e_k) =: L$$

נניח שדגם מרחב L ו' ג'ס' אורגזון.

(V)



$x \in V$

$e_1, \dots, e_k \in L$

$$p = \sum_{i=1}^k \frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i \in L \quad x \in V \text{ ש' } p \in L$$

$p \in L$

$$w := x - p \quad \text{נכנס}$$

$$w \perp p \quad \text{ש' } w$$

$$p := \sum_{i=1}^k \frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i \quad \text{ש' } p$$

$$w := x - p$$

$$x = p + w$$

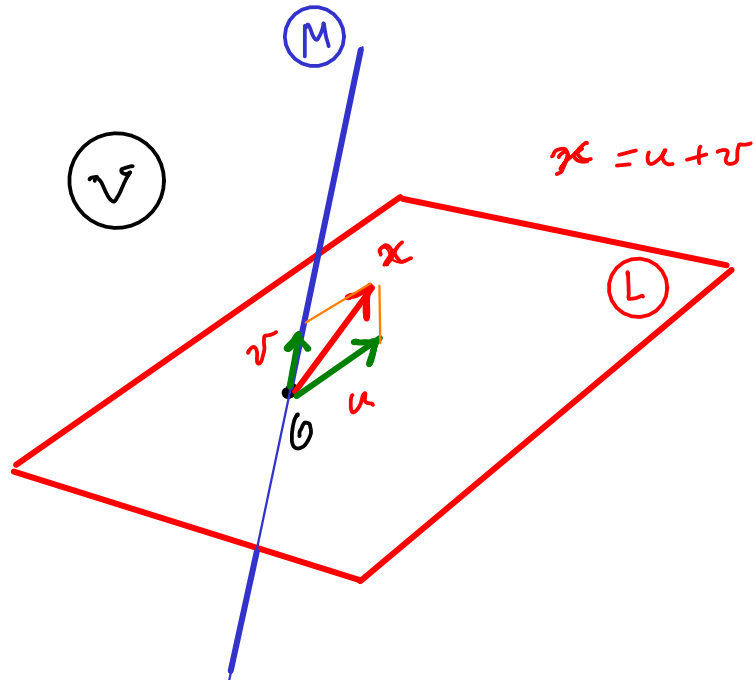
$$w \perp p$$

סכום של ג-מרחב

נאמר שמרחב V סכום ישיר של ג-מרחב'ם $L, M \subset V$ אם

כל $x \in V$ ניתן לרשום כי $x = u + v$ כאשר $u \in L$ $v \in M$

$L \cap M = 0$



$u \in L$
 $v \in M$

$x = u + v$

1) המרחב $0 + 0 \leftarrow$ מרחב וקטורי

$V = L + M$ $L \cap M = 0$

לכן $L + M$ סכום ישיר:

$V = L \oplus M$

צטנ נניח $V = L \oplus M$. נניח $u + v = u_1 + v_1$ כאשר $u, u_1 \in L, v, v_1 \in M$.

אז $u_1 = u, v_1 = v$

הוכחה: $u + v = u_1 + v_1 \Leftrightarrow u - u_1 = v_1 - v$

כך | $x = u + v$ הצגה יחידה.

$$u = u_1 \iff u - u_1 = 0 \iff u - u_1 \in L \cap M \quad \begin{cases} u - u_1 \in L \\ v_1 - v \in M \end{cases}$$

באילו אופן, $v = v_1$

פ.ע.נ

נחזור למרחב V אלק"ז"ם:

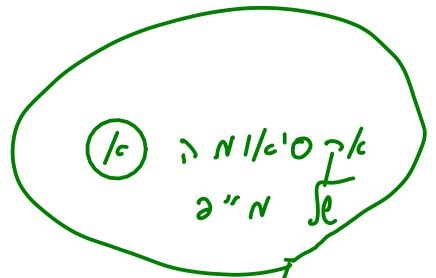
עבור $L \subset V$ תת מרחב, נגדיר

$$L^\perp := \{x \in V : x \perp L\}$$

המרחב האורתוגונלי של L בקו V

$$x \in L^\perp \iff \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in L$$

$$x = p + w \quad \begin{matrix} p \in L \\ w \in L^\perp \end{matrix}$$



$y \in L \quad y \in L^\perp$

$$y = 0 \iff \langle y, y \rangle = 0 \iff y \in L \cap L^\perp \quad \text{נ"ח} \quad L \cap L^\perp = \{0\} \quad \text{פ"צ}$$

$$V = L \oplus L^\perp \quad \text{פ.ע.נ}$$

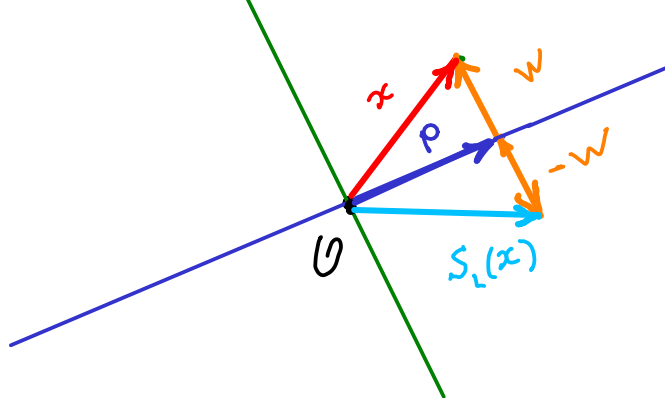
הוכחה: $x = p + w \in L + L^\perp$

פ.ע.נ

(V)

(L[⊥])

(L)



V בסיס b_1, b_2 ו- b_1, b_2 א.ו.ב.

L בסיס b_1

L[⊥] בסיס b_2

$$B := (b_1, b_2)$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle b_1, b_2 \rangle = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 0$$

$$w \in L^\perp, p \in L$$

$$, x = p + w \quad \text{אם } x \in V \quad \text{אז } p \in L, w \in L^\perp$$

$$: V \rightarrow V \quad \text{אם } p \in L, w \in L^\perp$$

$$L \text{ א.ו.ב. } p \in L \quad P_L(p+w) = p$$

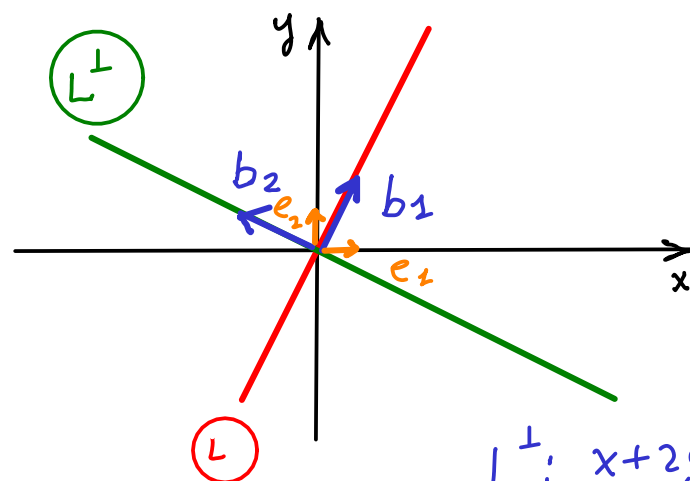
$$L \text{ א.ו.ב. } p \in L \quad S_L(p+w) = p - w$$

$$[S_L]_E^E, [P_L]_E^E = ? \quad L = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 2x - y = 0 \}, V = \mathbb{R}^2$$

$$: L^\perp \text{ א.ו.ב. } b_1, b_2$$

$$\dim L^\perp = \dim V - \dim L = 2 - 1 = 1$$

$$\text{אם } b_1 \in L, b_2 \in L^\perp \quad b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : L^\perp \text{ בסיס}$$



$$L^\perp: x - 2y = 0$$

(1)

$$[S_L]_B^B, [P_L]_B^B \rightarrow \text{בסיס כללית}$$

$$P_L(b_1) = b_1$$

$$P_L(b_2) = 0$$

$$[P_L]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$$

$$E = (e_1, e_2) \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_L(b_1) = b_1$$

$$S_L(b_2) = -b_2$$

$$[S_L]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

$$B = E M_E^B$$

$$: M_E^B \text{ מרחיבה את הבסיס } e_1, e_2 \text{ ל-} [P_L]_E^E \text{ בסיס כללית}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$M_E^B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (M_E^B)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[P_L]_E^E = M_E^B [P_L]_B^B (M_E^B)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$[S_L]_E^E = M_E^B [S_L]_B^B (M_E^B)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$p+0 \in L$$

$$0+w \in L^\perp$$

$$P_L(p+0) = p \quad P_L(p) = p \Rightarrow P_L(x) = x \quad \forall x \in L$$

$$\lambda = 1 \quad \text{für } x \in L \text{, weil } x \in L \text{, } x \in L \text{, } x \in L$$

$$P_L(0+w) = 0 \Rightarrow P_L(w) = 0$$

$$\lambda = 0 \quad \text{für } x \in L^\perp \text{, weil } x \in L^\perp \text{, } x \in L^\perp \text{, } x \in L^\perp$$

$$S_L(p+0) = p-0 = p \Rightarrow S_L(x) = x \quad \forall x \in L \Rightarrow \lambda = 1 \quad \text{für } x \in L$$

$$S_L(0+w) = 0-w = -w \Rightarrow S_L(x) = -x \quad \forall x \in L^\perp \Rightarrow \lambda = -1 \quad \text{für } x \in L^\perp$$

$$x \in L \quad \forall x$$

$$Tx = \lambda x$$

$$P_L(p+w) = p$$

$$S_L(p+w) = p-w$$

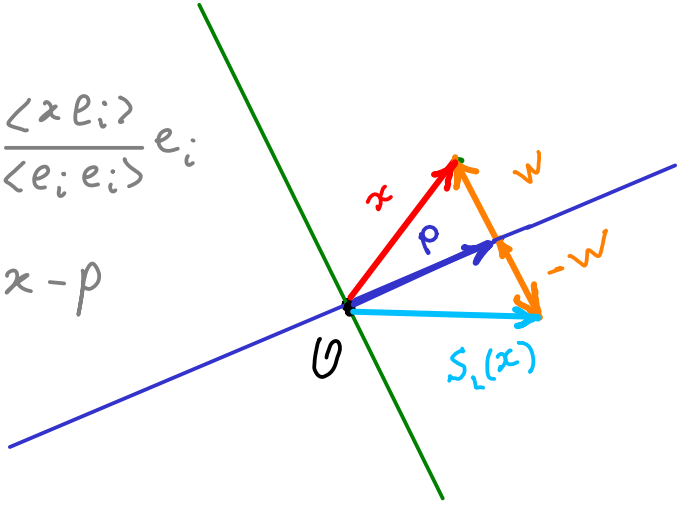
V

$L^\perp$

L

$$p := \sum_{i=1}^k \frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i$$

$$w := x - p$$



מטריצה זוגית

$$A \sim B$$

$$\hat{=}$$

$$B = P A P^{-1}$$

1 Coen ערכים עצמיים של האופרטור P_L הם $\lambda = 0, 1$

2 ערכים עצמיים של האופרטור S_L הם $\lambda = 1, -1$

יותר מצי"ק: L מרחב עצמי שייך ל"ע" $\lambda = 1$

$L^\perp$ מרחב עצמי שייך ל"ע" $\lambda = 0$

$L^\perp$ מרחב עצמי שייך ל"ע" $\lambda = -1$

בפרט, S_L הפ'ק, P_L אינו הפ'ק.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

1 Coen מטריצה יבול של P_L זומה למטריצה אלוסונית

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

2 מטריצה יבול של S_L זומה למטריצה אלוסונית

נניח A היא מטריצה ירידה על $\mathbb{R}^3$ $T: V \rightarrow V$ כך ש B .

שאלה 1: האם T היא מטריצה אורתוגונלית?

שאלה 2: מהו גודל L ?

(1) $\lambda = 0, 1$ $\Rightarrow$ יכול להיות T היא מטריצה אורתוגונלית.

$\lambda = 1, -1$ $\Rightarrow$ יכול להיות T היא מטריצה אורתוגונלית.

T היא מטריצה אורתוגונלית $\left\{ \begin{array}{l} \lambda \neq 0, 1, -1 \\ \lambda = 0, 1, -1 \end{array} \right.$

היא מטריצה אורתוגונלית.

היא מטריצה אורתוגונלית $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

היא מטריצה אורתוגונלית:

V

$L^\perp$

L

$$P_L^2 = P_L$$

$$P_L^2(x) = P_L(P_L(x)) = P_L(p) = p$$

$A \in Mat_n$ ו' Idempotent

$0, 1$ הם A רק λ $\textcircled{k}$

$$A^2 = A \quad \textcircled{a}$$

$[P_L]_B^B = A$: B בסיס $\textcircled{k}$ $\lambda = 1$ $\textcircled{1}$ $\lambda = 0$

$\lambda = 1$ $\textcircled{k}$ $L = \{x \in V : Ax = x\}$ $\textcircled{2}$

נניח $A \in \text{Mat}_n$ ונניח לענ

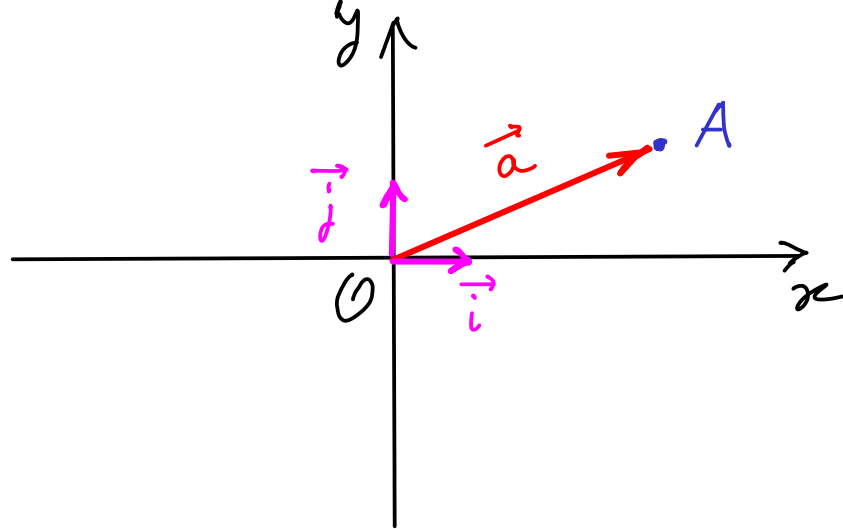
$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{מטריצה} \\ \text{הזהבית} \end{array}$$

$$A \text{ בעל ערכים } 1, -1 \quad (1)$$

$$A^2 = I_n \quad (2)$$

$$[S_L]_B^B = A : B \text{ בסיס מסגרת } \text{לענ} \quad (1) \quad \text{ש/כ}$$

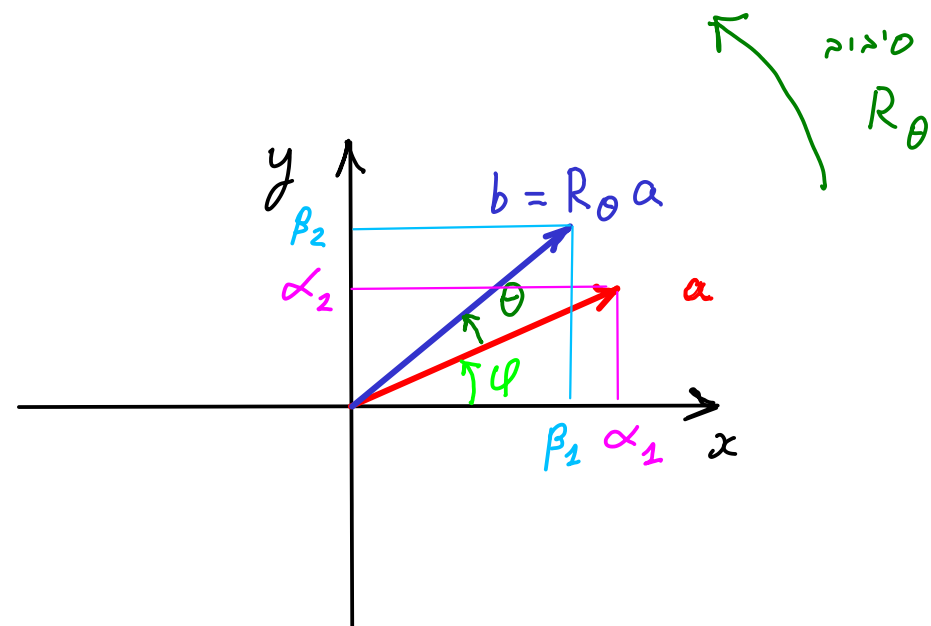
$$\lambda = 1 \quad \text{ערכי העigenvalue מסגרת } L = \{x \in V : Ax = x\} \quad (2)$$



סיבובים במישור

$\mathbb{R}^2 \leftrightarrow$ וקטורים $\leftrightarrow$ נקודות במישור
מחירים
צירים

$$x = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$



ברור ש- R_θ אופרטור ליניארי.

לכן יש לנו מטריצה צירים 2, ש' $\vec{i}, \vec{j}$ הם הבסיס

$$[R_\theta] = ?$$

נרשם את α_1, α_2 בקואורדינטות קוטביות (r, φ) :

$$\alpha_1 = r \cos \varphi, \quad r = \|a\|$$

$$\alpha_2 = r \sin \varphi$$

נרשם בקואורדינטות קוטביות גם β_1, β_2 :

$$\beta_1 = \|b\| \cos(\theta + \varphi) = \|a\| \cos(\theta + \varphi)$$

$$\beta_2 = \|b\| \sin(\theta + \varphi) = \|a\| \sin(\theta + \varphi)$$

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cdot \cos \varphi + \cos \theta \cdot \sin \varphi$$

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cdot \cos \varphi - \sin \theta \cdot \sin \varphi$$

$$\beta_1 = \|a\| (\cos \theta \cdot \cos \varphi - \sin \theta \cdot \sin \varphi) = \overbrace{\|a\| \cdot \cos \varphi}^{\alpha_1} \cdot \cos \theta - \overbrace{\|a\| \cdot \sin \varphi}^{\alpha_2} \cdot \sin \theta = \alpha_1 \cos \theta - \alpha_2 \sin \theta$$

$$\beta_2 = \|a\| (\sin \theta \cdot \cos \varphi + \cos \theta \cdot \sin \varphi) = \alpha_1 \sin \theta + \alpha_2 \cdot \cos \theta$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

∴ 13' 72

$$\therefore \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ is } \vec{i}, \vec{j} \text{ or } \vec{e}_1, \vec{e}_2 \text{ and } R_\theta \text{ is } \text{rotation matrix}$$

$$[R_\theta] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$A := [R_\theta]^{pos}$$

אם θ זה $\frac{\pi}{3}$ נ

$e^{\pm i\theta}$ הם R_θ וצריך להראות כן

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos \theta - \lambda)^2 + \sin^2 \theta = \cos^2 \theta - 2\lambda \cos \theta + \lambda^2 + \sin^2 \theta = \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1$$

$$\lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1 = 0$$

נשתמש בנוסחה לריבוע

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \cos \theta \pm \sqrt{4 \cos^2 \theta - 4}}{2} = \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1} = \cos \theta \pm \sqrt{-(1 - \cos^2 \theta)} = \cos \theta \pm \sqrt{-\sin^2 \theta} =$$

$$= \cos \theta \pm \sqrt{-1} \sin \theta = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i\theta}$$

$$\lambda_1 = e^{i\theta}$$

$$\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$

לכן