

עבודת בית א'

1. תשתמשי בפולנום Taylor $P_3(x)$ כדי למצוא קירוב לערך $f(x_1)$ של הפונקציה $f(x)$ בסביבה של הנקודה x_0 :

$$(א) \quad x_1 = 0.5, x_0 = 0, f(x) = e^x$$

$$(ב) \quad x_1 = 1.2, x_0 = 0, f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$(ג) \quad x_1 = 1.4, x_0 = 0, f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$(ד) \quad x_1 = 37^\circ, x_0 = \frac{\pi}{6}, f(x) = \sin x$$

$$(ה) \quad x_1 = 10^\circ, x_0 = 0, f(x) = \cos x$$

$$(ו) \quad x_1 = 1.5, x_0 = 0, f(x) = \ln(1+x)$$

2. מצאי את טור Taylor של הפונקציה $f(x)$. ניתן להשתמש במשפט הבא: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ עבור $-1 < x < 1$. מצאי גם את תחומי ההתכנסות.

$$(א) \quad a = 0, f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(ב) \quad a = -3, f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$(ג) \quad a = 0, f(x) = \frac{1}{1+2x}$$

$$(ד) \quad a = 2, f(x) = \frac{1}{x}$$

3. מצאי את טור Maclaurin של הפונקציה $f(x)$. ניתן להשתמש במשפט הבא: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ עבור כל x .

$$(א) \quad f(x) = e^{2x}$$

$$(ב) \quad f(x) = e^{-x}$$

$$(ג) \quad f(x) = e^{x^2}$$

4. מצאי טור Taylor עבור $f'(x)$ ו- $\int_0^x f(x) dx$ כאשר $f(x) = e^{-x^2}$.

עבודת בית ב'

1. נתונים 3 נקודות על המישור: $(x_0, y_0) = (2, 1)$, $(x_1, y_1) = (4, 2)$, $(x_2, y_2) = (5, 4)$.

(א) מצאי את פולינום Lagrange $P_2(x)$ עבור הנתונים הנ"ל. שרטטי את הגרף של $P_2(x)$.

(ב) חשבי את המספרים $P_2(0)$, $P_2(3)$, $P_2(6)$.

(ג) מצאי את פולינום הריבועי ישיר, ללא שימוש בנוסחת אינרפולצית Lagrange.

2. נתונות 2 נקודות, (x_0, y_0) ו- (x_1, y_1) . מצאי את פולינום Lagrange $P_1(x)$ עבור הנקודות האלו. מה השיפוע של הגרף של $P_1(x)$?

3. עבור הפונקציה $f(x) := 2^x$

(א) חשבי את המספרים $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$.

(ב) תשתמשי את החישוב הנ"ל כדי למצוא פולינום Lagrange $P_2(x)$ עבור $f(x)$.

(ג) מהי הערכה ל- $|R_2(x)|$ עבור $x = 0.5$, $x = 2.0$, $x = 4.0$?

(ד) מהי הערכה ל- $|R_2(x)|$ עבור $0 \leq x \leq 3$?

עבודת בית ג'

לכל האינטגרל הנתון

(א) שרטטי את גרף הפונקציה מעל קטע האינטגרציה

(ב) תחלקי את קטע האינטגרציה ב- n חלקים שווים ותחבר טבלה

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

כאשר

$$y_i = f(x_i)$$

(ג) חשבי את האינטגרל לפי שיטת הטרפז.

(ד) חשבי את האינטגרל לפי שיטת Simpson.

(ה) חשבי את האינטגרל בשימוש נוסחת Newton—Leibniz.

(ו) חשבי את שגיאה Δ_1 שקיבלתי כדי שימוש בשיטת הטרפז, את שגיאה Δ_2 שקיבלתי בשימוש שיטת Simpson.

(ז) מצאי איזה n צריך לקחת כדי להגיע לרמת הדיוק $d = 0.001$ לפי שתי השיטות הנומריות.

$$1. \quad n = 4, \int_{0.5}^{2.5} \frac{dx}{x}$$

$$2. \quad n = 6, \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

לכל האינטגרל הנתון

(א) שרטטי את גרף הפונקציה מעל קטע האינטגרציה

(ב) תחלקי את קטע האינטגרציה ב- n חלקים שווים ותחבר טבלה

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

כאשר

$$y_i = f(x_i)$$

(ג) חשבי את האינטגרל לפי שיטת הטרפז.

(ד) חשבי את האינטגרל לפי שיטת Simpson.

(ה) מצאי איזה n צריך לקחת כדי להגיע לרמת הדיוק $d = 0.001$ לפי שתי השיטות הנומריות.

$$3. \quad n = 2, \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

$$4. \quad n = 4, \int_0^1 e^{-x^2} \, dx$$

עבודת בית ד'

1. מצאי את הקירוב ל- $\sqrt[3]{5}$ עם רמת הדיוק $d = 0.1$ בעזרת שיטת החציה.

2. מצאי את הקירוב לשורש של המשוואה $x - 2 \sin x = 0$ בעזרת שיטת סקנט. תקחי $x_0 = \pi$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $n = 4$.

3. מצאי את הקירוב ל- $\sqrt{3}$ ע"י שיטת Newton—Raphson. תקחי $x_0 = 3$, $n = 3$.

עבודת בית ה'

$$1. \text{ כתובי את המערכת } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \text{ בצורה } Ax = b. \text{ מצאי את פתרון המערכת}$$

(א) בעזרת שיטת Gauss

(ב) בעזרת שיטת Cramer

(ג) בעזרת המטריצה ההופכית A^{-1}

$$2. \text{ (א) עבור אלו ערכים של הפרמטר } k \text{ למערכת } \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2kx_3 = 2 \end{cases} \text{ יש פתרון יחיד? מצאי את}$$

הפתרון בעזרת שיטת Cramer

(ב) עבור אלו ערכים של הפרמטר k למערכת יש אינסוף פתרונות? מצאי את הפתרון בעזרת שיטת Gauss.3. מצאי את הפירוק LU עבור מטריצה A ומצאי את הפתרון למשוואה לינארית $Ax = b$ בעזרת הפירוק כאשר

$$(א) \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(ב) \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

עבודת בית ו'

$$1. \text{ מצאי את } \|x\|_\infty, \|x\|_2, \|x\|_1 \text{ עבור } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$2. \text{ הוכחי כי } \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \text{ עבור כל } x \in \mathbb{R}^n$$

$$3. \text{ הוכחי כי } \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \text{ עבור כל } x \in \mathbb{R}^n$$

$$4. \text{ הוכחי כי } \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \text{ עבור כל } x \in \mathbb{R}^n$$

$$5. \text{ מצאי את } \|A\|_\infty, \|A\|_2, \|A\|_1 \text{ כאשר}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{א})$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (\text{ב})$$

עבודת בית ז'

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
1	2	3	4	5
2	1	3	2	4
y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

1. נתונות נקודות

(א) מצאי את פולינום הרגרסיה (לפי שיטת ריבועים פחותים) הליניארי $P_1(x)$.(ב) מצאי את פולינום הרגרסיה (לפי שיטת ריבועים פחותים) הריבועי $P_2(x)$.(ג) שרטטי סקיצה של הגרפים של $P_1(x)$ ו- $P_2(x)$ יחד עם הנקודות $(x_0, y_0), \dots, (x_4, y_4)$.(ד) מצאי את פונקציית הרגרסיה $g_1(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x)$ הקרובה ביותר (לפי שיטת ריבועים פחותים) לנקודות $(x_0, y_0), \dots, (x_4, y_4)$. כאשר $f_0(x) \equiv 1$ (פונקציה קבועה) ו- $f_1(x) = \sqrt{x}$.2. מצאי את פולינומים הרגרסיה (לפי שיטת ריבועים פחותים) $P_1(x)$ ו- $P_2(x)$ עבור הפונקציה $f(x) = |x|$ בקטע $[-1, 1]$.3. הפולינומים $f_0(x) \equiv 1, f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ הם פונקציות אורתוגונליות בקטע $[-1, 1]$. מצאי את הפונקציה $g_2(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$ הקרובה ביותר לפי שיטת ריבועים פחותים לפונקציה $f(x) = |x|$ בקטע $[-1, 1]$.4. הפולינומים $f_0(x) \equiv 1, f_1(x) = \cos x, f_2(x) = \cos(2x)$ הם פונקציות אורתוגונליות בקטע $[-1, 1]$. מצאי את הפונקציה $g_2(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$ הקרובה ביותר לפי שיטת ריבועים פחותים לפונקציה $f(x) = |x|$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

עבודת בית ח'

x_0	x_1	x_2	x_3
1	2	4	6
2	4	3	5
y_0	y_1	y_2	y_3

נתונות נקודות

- מצאי את הספליין $S(x)$ מסדר ראשון. שרטטי את הגרף של $S(x)$.
- מצאי את הספליין $S(x)$ מסדר שני. תשתמשי בתנאי $S'(1) = 0$. שרטטי את הגרף של $S(x)$.
- מצאי את הספליין $S(x)$ מסדר שני. תשתמשי בתנאי $S''(1) = S''(6) = 0$. שרטטי את הגרף של $S(x)$.