

נושא/ ע': מדרכו מ"ר - 1 - 108
פגיון למערכת לא היומניג - 119

נושא/ ע': ע יציבות א פטרון אדניג ידעמא - 127

$\boxed{k}$ keV

1-3" N
~~~~~  
~~~~~

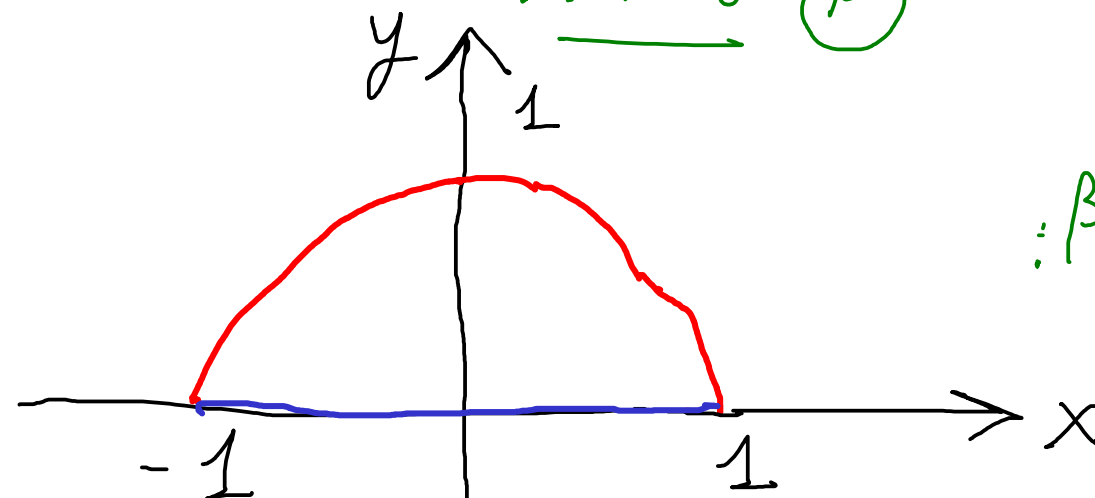
x	$y(x)$
-1.0	0.00
-0.5	0.87
0.0	1.00
0.5	0.87
1.0	0.00

x מרחב (ערך)
 $x \in \mathbb{R}$ $y(x)$

$y(x)$ פונקציה $\in [1]$

$\beta \in \mathbb{R}$

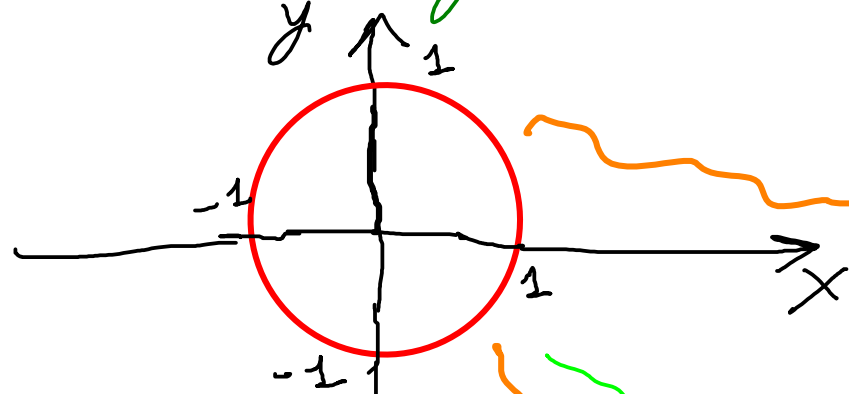
$\beta \in \mathbb{R}$



$y(x) \in \mathbb{R}$ $\in [-1, 1]$

פונקציה סגורה

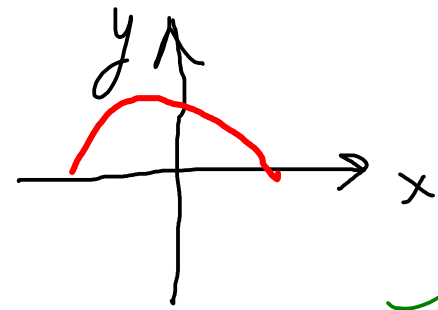
$$x^2 + y^2 = 1$$



③

יציאת נקודה (אנטיגרד) $y(x) = \sqrt{1-x^2}$

②

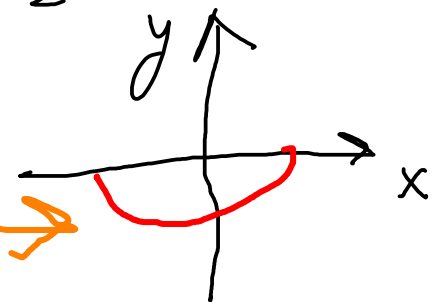


$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

אנטיגרד

אנטיגרד (אנטיגרד)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$



$$y_1(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$y_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

$\Phi(x, y) = x^2 + y^2$
פונקציה סגורה
 $\Phi(x, y) = 1$

ע"כ משווה צ'ברצ'יט'א

$$\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(7)

משוואות דברצ'יט'א וז'אנ' מסדר 1.

1-צ"ר

כאשר $f(x, y)$ פונקציה יחידה בר 2 משתנים
משנה מובט'

$y(x)$ פונקציה משנה $y' = \frac{dy}{dx}$

$$y' = f(x, y)$$

}}

$$1 = \text{סדר} \iff (y', y'', \dots)$$

הצבה: y, y'

2. "רזילינ" $y(x)$ פונקציה של משתנה אחד.
 3. שם ימין חזיק: חז"ר - 1 בצורה מילית.

צד שמאל צד ימין: $yy' + x = 0$

צדק מילית:

$$y' = -\frac{x}{y}$$

$y(x)$ פונקציה אחת - 1
 $y' = f(x, y)$ בק"ר (α, β) אם

$\alpha < x < \beta$ עבור $y'(x) = f(x, y(x))$

פונקציה של x בלבד.

הערה: למעשה $y(x)$ פונקציה
 סתומה.

$$\therefore y' = -\frac{x}{y} \quad 1 - \text{using implicit differentiation} \quad y(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \boxed{1}$$

$$y'(x) = \left((1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} (1-x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (-2x) =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$-1 < x < 1$$

$$-\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(-1, 1) \text{ only}$$

$$y' = -\frac{x}{y} \quad \text{המשפט} \quad x^2 + y^2 = 1 \quad -1 \leq x \leq 1$$

2. נבדוק שהפונקציה הסמוכה

$$y = y(x)$$

$$x^2 + y^2 = 1$$



$$x^2 \leq 1$$



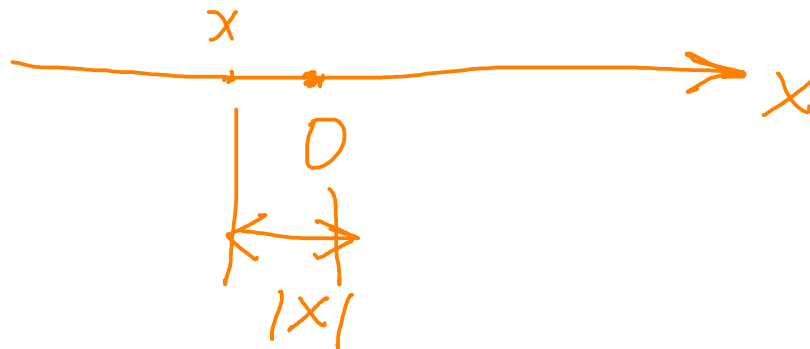
$$|x| \leq 1$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$(x^2 + y^2)' = 0$$

$$(x^2)' + (y^2)' = 0$$

$$2x + 2y y' = 0$$



$$x + y y' = 0$$



$$y' = -\frac{x}{y}$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

$$1 - \sqrt{1-x^2} \quad x^2 + y^2 = 4$$

3] ריבוע e וצורה

$$(-2 \leq x \leq 2 \quad \text{רוחב})$$

$$2x + 2yy' = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)' = 0$$

$$y'(x)$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

$\Leftrightarrow$

$$1 - \sqrt{1-x^2} \quad \text{עגולה סגורה} \quad (c > 0)$$

$$c > 0 \quad \text{רוחב}$$

$$x^2 + y^2 = c \quad \text{כחול}$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

עוצר צור/ט/ט' למצ"ר - 1:

$$y'(x) = x \quad (f(x, y) = x) \quad \text{בבדיקת:} \quad y(x) = \int x dx \quad [1]$$

נסתקנה: $\int x dx$ זה האוסף של עבודות למצ"ר - 1, $y' = x$

בבדיקת עבודה: $y(x) = \frac{x^2}{2} + C$

הערת רון הכולל למצ"ר - 1 $y' = x$
אכן, הערת רון הכולל' זה שמסמך (איוסופית) א פתירות למשאלה.

$$y' = g(x) \quad (f(x, y) = g(x) \text{ גבוהה, ז'טן}) \quad [2]$$

הפגיון הכול' $\int g(x) dx$ נקרא ה'נשאל' ה'נשאל' $g(x)$

3
 הסוק ב"ה $x^2 + y^2 = 1$ סתיון סה"י
 אקדוס
 והיגבלה

$$\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

"תנ"י הגמלה" $y(0) = 1$

כע"ת הגמלה = נז"ר + גנ"ל הגמלה

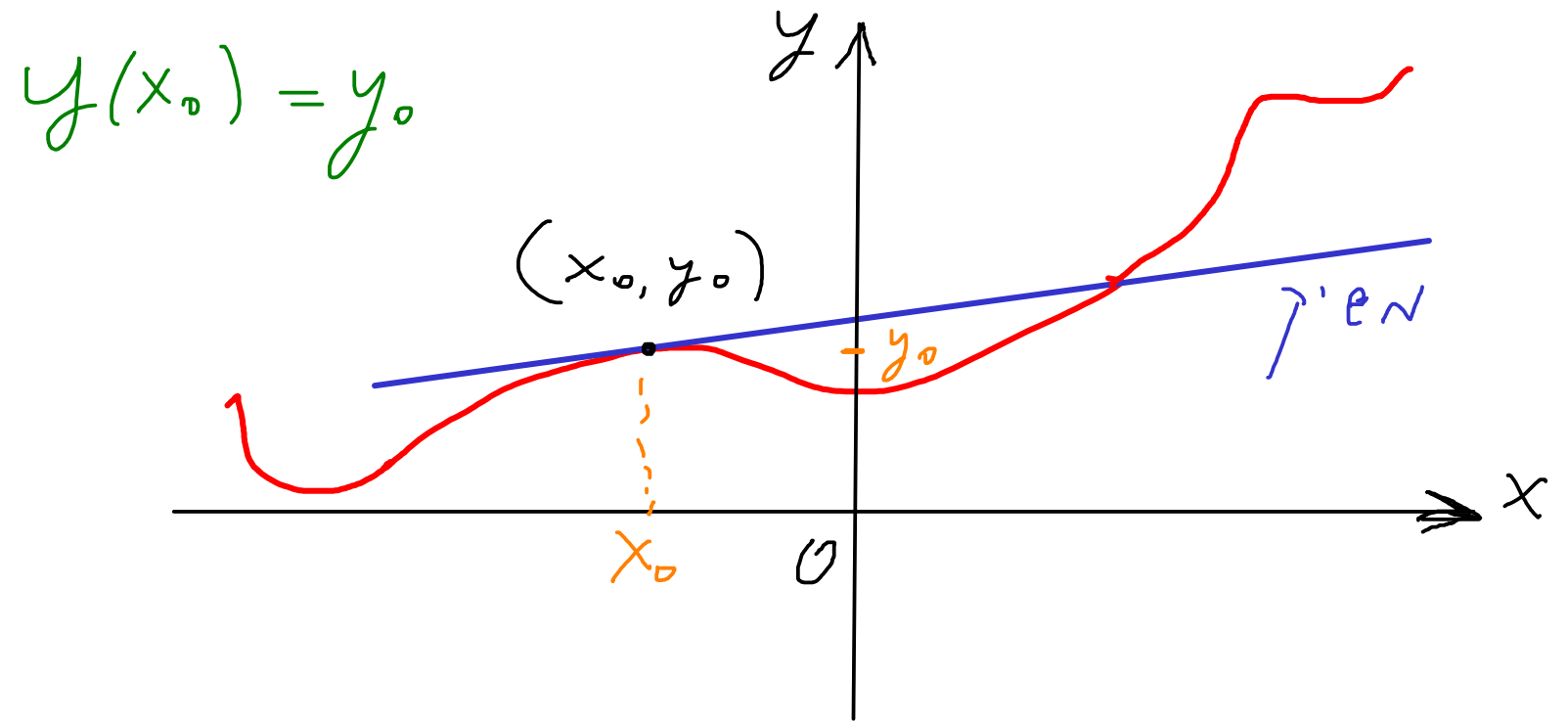
4
 הסוק ב"ה $x^2 + y^2 = 4$ סתיון סה"י הגמלה

$$\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

י"א בחשוון ה'תש"א

ד'ס

פירוש במונחים של נגזרת



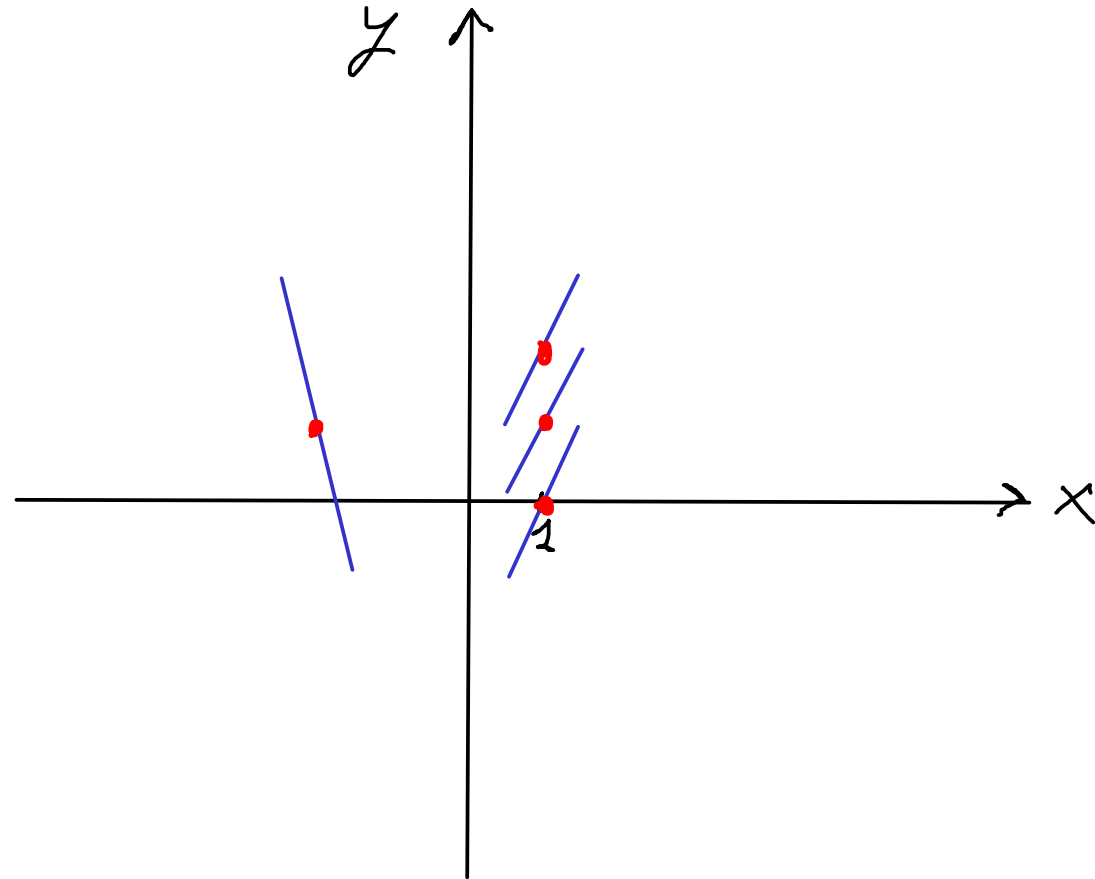
$$y' = f(x, y)$$

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

$(x_0, y_0) \leftarrow$ כיוון של הנגזרת

נגזרת-1 קבוצת של כיוונים במישור (x, y)

עדי כיוונים



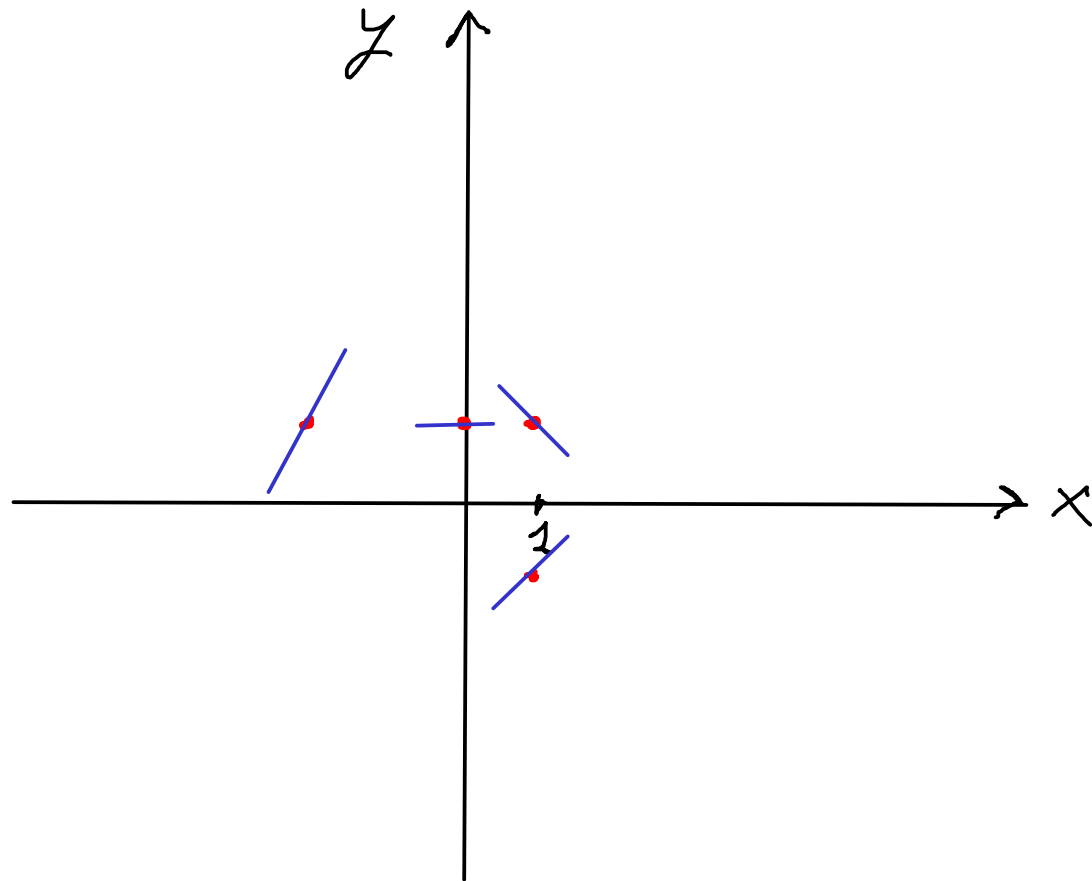
$$y' = 2x \quad \boxed{1}$$

$$f(x, y) = 2x$$

$$f(1, 0) = 2 \quad 2 = \text{value}$$

$$f(1, 1) = 2$$

$$f(-2, 1) = -4$$



$$yy' + x = 0 \quad \boxed{2}$$

המשוואה היא $yy' + x = 0$ והיא מתפרקת ל- $y' = -\frac{x}{y}$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

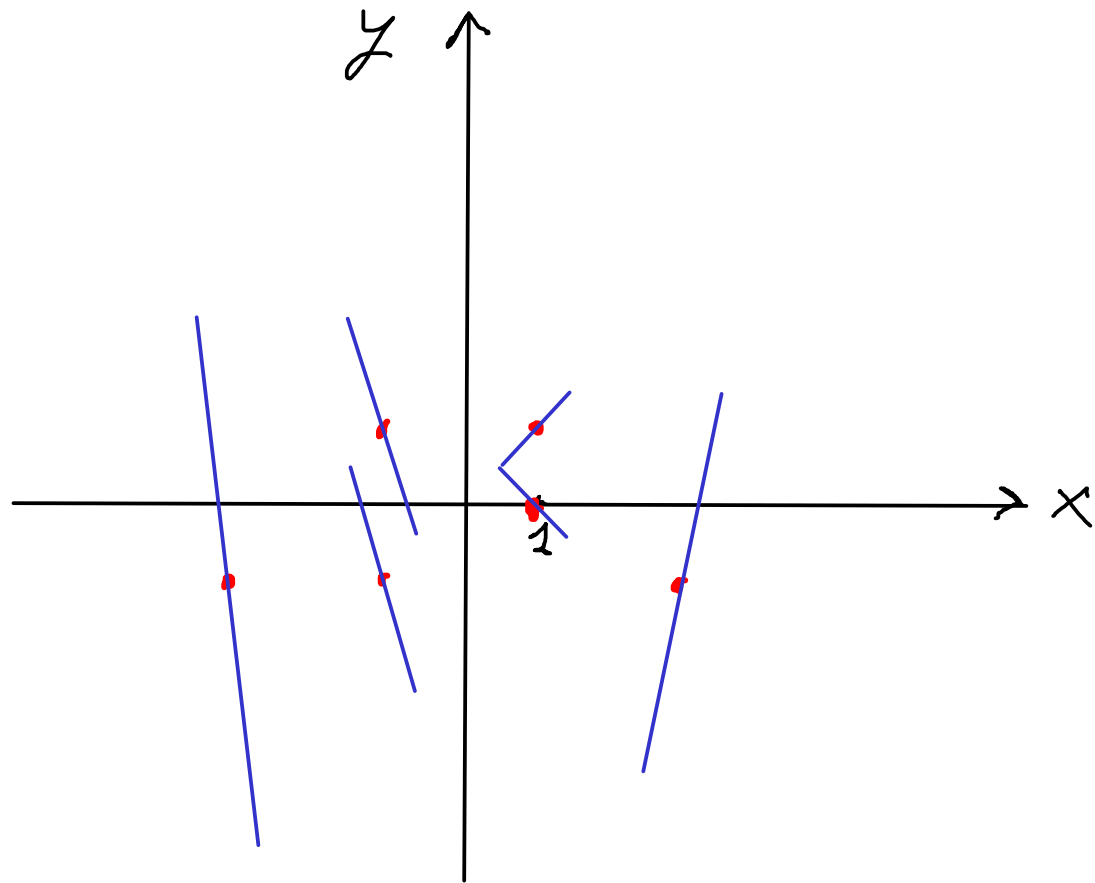
$$f(x, y) = -\frac{x}{y}$$

$$f(1, 1) = -1$$

$$f(0, 1) = 0$$

$$f(-2, 1) = 2$$

$$f(1, -1) = 1$$



$$y' - 2xy^2 + 1 = 0$$

3

$$\therefore \sim \sqrt{xy^2 + 1}$$

$$y' = 2xy^2 - 1$$

$$f(x, y) = 2xy^2 - 1$$

$$f(1, 0) = -1$$

$$f(1, 1) = 1$$

$$f(-1, 1) = -3$$

$$f(-1, -1) = -3$$

$$f(-3, -1) = -7$$

$$f(3, -1) = 5$$

$$y(-3) = -1$$

מילון בן אדם - מחשב

מחשב	בן אדם
מצי"ר-1	ערה כיוונים
פתרון למצי"ר-1	קו מילימטרי
תנאי הגמלה	נקודה על הישר (x,y)

קו מילימטרי $\Leftrightarrow$ שרץ הפתרון

תנאי הגמלה $\Leftrightarrow y(x_0) = y_0$

בעיה הגמלה = מצי"ר-1 + תנאי הגמלה $\Rightarrow$

כמה שאלות אנטריות לאינזרציה

"אינזרציה" = מצית פתרון למצ"ר

$$f(x, y) = g(x)$$

$$y' = g(x) \quad \text{אם } y \in N.1$$

הפתרון הכללי $y' = g(x)$ נקרא גלילינג $y(x) \in \int g(x) dx$ ||

$$g(x) = 2x + 1$$

$$y' = 2x + 1$$

1

$$y(x)'' = \int (2x + 1) dx = x^2 + x + C$$

"גורם" - C

$$y' = 2x + 1 \quad \cdot \int \quad \int \quad x^2 + x + C$$

$$y' = g(x) h(y)$$

2. מקרה שבו הפרדה בין x ל y

$$f(x, y) = g(x) h(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = g(x) h(y)$$

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx$$

$$f(x, y) = g(x) h(y)$$

$$y' = g(x) h(y)$$

בעיה (I. Barrow) הפתרון הכללי של משוואה 1-1
נכון עד היום

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

∴ x, y ∈ ℝ, y ≠ 0

$$yy' + x = 0 \quad \boxed{1}$$

$$f(x, y) = -\frac{x}{y} = \underbrace{(-x)}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{y}}_{h(y)}$$

$$g(x) = -x$$

$$h(y) = \frac{1}{y}$$

∫

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int y \, dy = \frac{y^2}{2} + C_1$$

$$\int g(x) \, dx = -\int x \, dx = -\frac{x^2}{2} + C_2$$

$$\frac{y^2}{2} + C_1 = -\frac{x^2}{2} + C_2$$

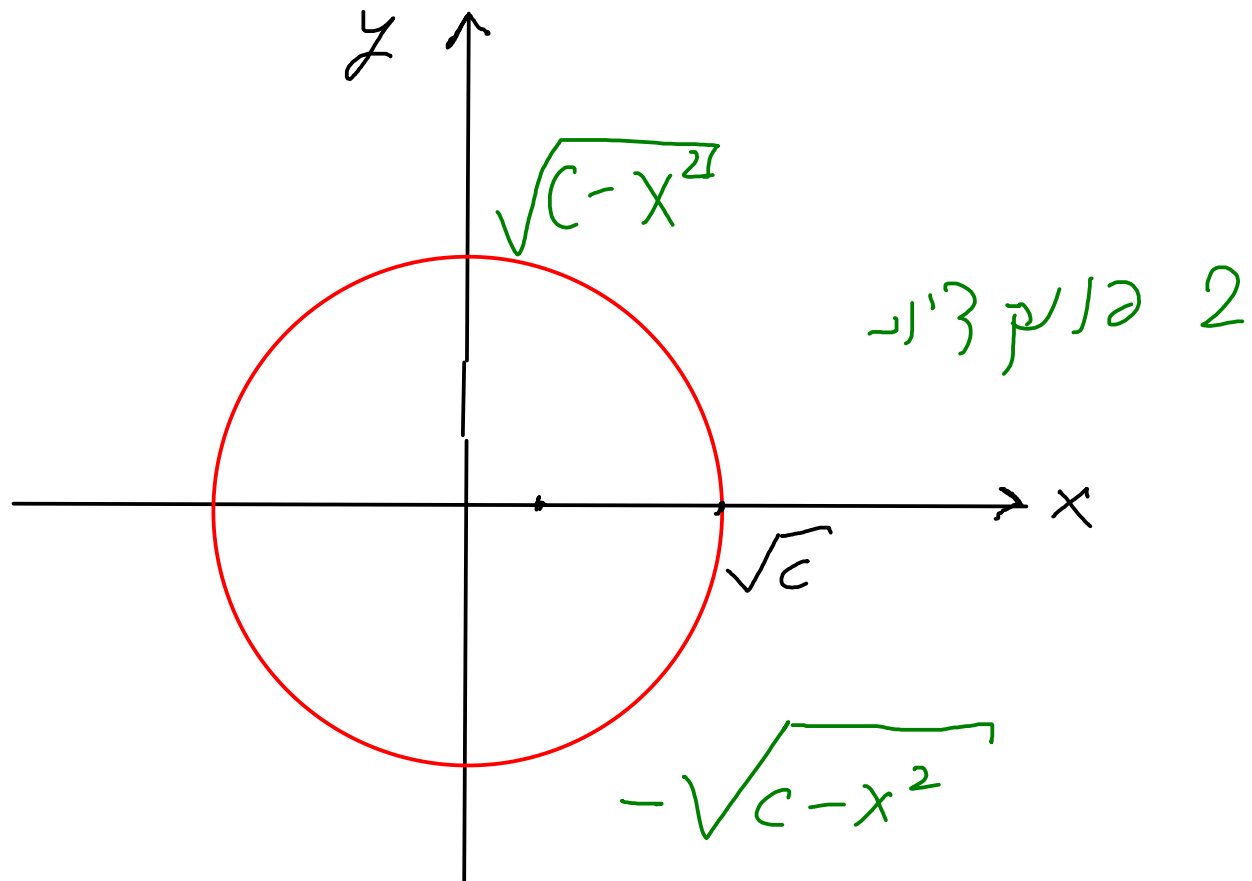
$$x^2 + y^2 = 2(c_2 - c_1)$$

$$2(c_1 - c_2) =: C$$

$$(C > 0)$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_2 - c_1$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = C} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$



בנקודה סגורה

לבדוק את הסתכלות:

$$(x^2 + y^2)' = 0$$

$$2x + 2yy' = 0$$

לכן

$$yy' + x = 0$$

$$f(x,y) = y^2 - 4y + 3$$

$$h(y) = y^2 - 4y + 3$$

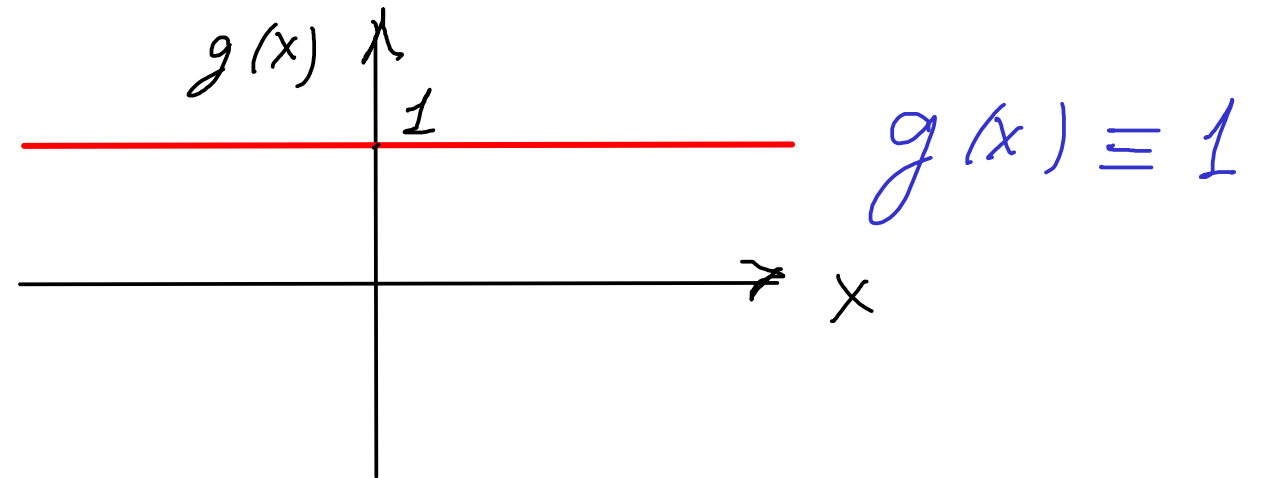
$$g(x) \equiv 1 \quad (\text{constant})$$

$$\int \frac{dy}{y^2 - 4y + 3} = \int dx$$

$$y^2 - 4y + 3 = (y - 1)(y - 3)$$

$$y' = y^2 - 4y + 3$$

2



$$\frac{1}{y^2 - 4y + 3} = \frac{1}{(y-1)(y-3)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y-3} =$$

$$= \frac{A(y-3) + B(y-1)}{(y-1)(y-3)}$$

$$A(y-3) + B(y-1) = 1$$

$$-2A = 1$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

$$B = -A = \frac{1}{2}$$

$$y$$

$$1$$

$$A + B = 0$$

$$-3A - B = 1$$

$$\frac{1}{y^2 - 4y + 3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y-1} \right)$$

$$\int \frac{dy}{y^2 - 4y + 3} = \frac{1}{2} \left[\int \frac{dy}{y-3} - \int \frac{dy}{y-1} \right] = \frac{1}{2} \left(\ln |y-3| - \ln |y-1| \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-3}{y-1} \right| + C$$

הערות: יש סננה לאבד בהיטות
הערות:
 $y(x) \equiv 3$, $y(x) \equiv 1$
 לא ניתן עבור אלו לא שכיחות ב-3.
 לפי, Barrow וסוף

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-3}{y-1} \right| = \int dx = x + C_1$$

$$\ln \left| \frac{y-3}{y-1} \right| = 2x + C_2$$

$$C_2 := 2C_1$$

$$\left| \frac{y-3}{y-1} \right| = e^{2x+c_2} = C e^{2x}$$

$$C = e^{c_2} \geq 0$$

$$\begin{aligned} y(x) &\equiv 1 \\ y(x) &\equiv 3 \end{aligned}$$

$$\because \sqrt{\cdot} \text{ is not invertible } \sqrt{\cdot} \text{ is not invertible } C=0 \text{ is not invertible } \sqrt{\cdot} \text{ is not invertible}$$

$$(C \neq 0) \quad \frac{y-3}{y-1} = C e^{2x}$$

$$\begin{cases} \frac{y-3}{y-1} = C e^{2x} \\ y(x) \equiv 1 \end{cases} \quad (\forall C) \quad \text{if } C=0 \text{ then } y(x) \equiv 3$$

ק'בלנו את הפתרון הכללי בצורה א פונקציה סתומה.

במקרה שבו אפשר להמשיך ולקבל פונקציה מפורשת:

$$y-3 = ce^{2x}y - ce^{2x}$$

$$ce^{2x}-3 = ce^{2x}y - y$$

$$y(ce^{2x}-1) = ce^{2x}-3$$

$$\begin{cases} y(x) = \frac{ce^{2x}-3}{ce^{2x}-1} \\ y(x) \equiv 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3 = (y-1)ce^{2x} \\ y(x) \equiv 1 \end{cases}$$

לכן הגזירה הסופית היא

$$g(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$y' = x^2 - 4x + 3$$

3

$$y(x) = \int (x^2 - 4x + 3) dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + C$$

$$y(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + C$$

∴ ∇ ∇ ∇ ∇

תורת פתרונות של מערכות דיפרנציאליות

$y' = f(x, y)$ כחג המולד אל מערכות דיפרנציאליות $y(x)$.

המשפט של פיקרד-ליאו

של (G. Peano, 1890)

ע"י שגור $f(x, y)$ בנקודה (x, y) במישור (x, y) .
ע"י $(x_0, y_0) \in D$.

המשפט של פיקרד-ליאו

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

המשפט של פיקרד-ליאו

(משפט פיקרד-ליאו)

$$y_1(x) := (x-1)^3$$

$$y_2(x) \equiv 0$$

$$y_3(x) = \begin{cases} (x-1)^3 \\ 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

כאן נחזיר!
 [1] שני 2 פונקציות:

$$x \geq 1$$

$$x < 1$$

בגד'ם ההתחלה
 y_1, y_2, y_3 פונקציות

$$f(x, y) = y^{2/3}$$

הצורה בהחוס $x > 0$
 והנקודה $(1, 0)$ ע"כ
 להחוס

(Ch. è Picard) Caen

2. במסגרת $f'_y(x, y)$, $f(x, y)$ נ'נ

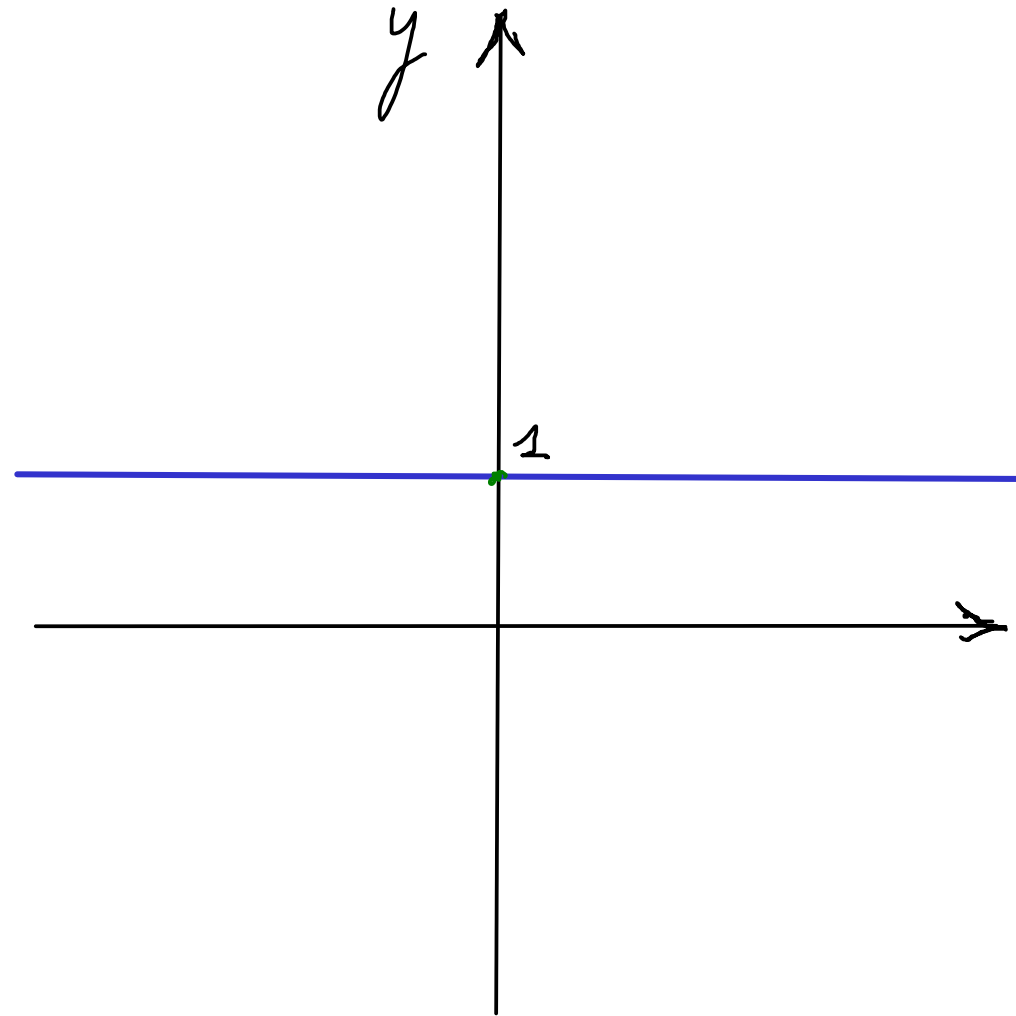
$$(x_0, y_0) \in D \quad \text{N'')}$$

כ' צ' סכ"ח ג' ג' ח' ג'

ע"כ נאמר כי

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

במרחב $\mathbb{R}^n$ נקודת (x_0, y_0) נקראת נקודה פנימית אם קיים $\delta > 0$ כך שכל נקודה (x, y) המקיימת $\|x - x_0\| < \delta$ היא נקודה פנימית.



$$y' = y^2 - 4y + 3$$

1

$$f(x, y) = y^2 - 4y + 3 = (y-1)(y-3)$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2} =$$

$$= 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm 1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f(x, y) = y^2 - 4y + 3 \quad y(0) = 1$$

$$f(0, 1) = 0$$

$$\Rightarrow y'(0) = 0$$

$$y(x) \equiv 1$$

$$y' = y^2 - 4y + 3$$

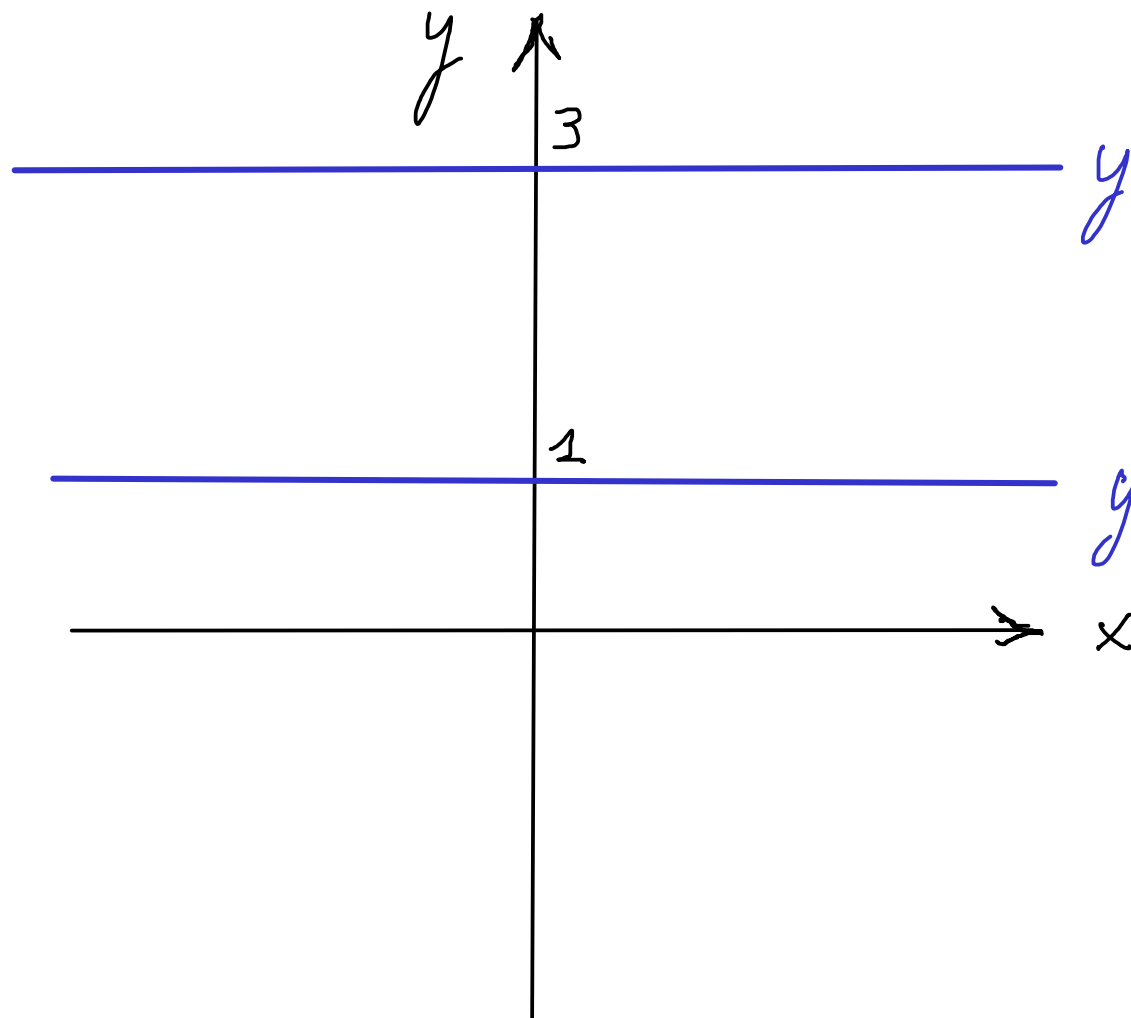
נסקו: הפונקציה הקבועה
ג'ע - עתיון למעלה

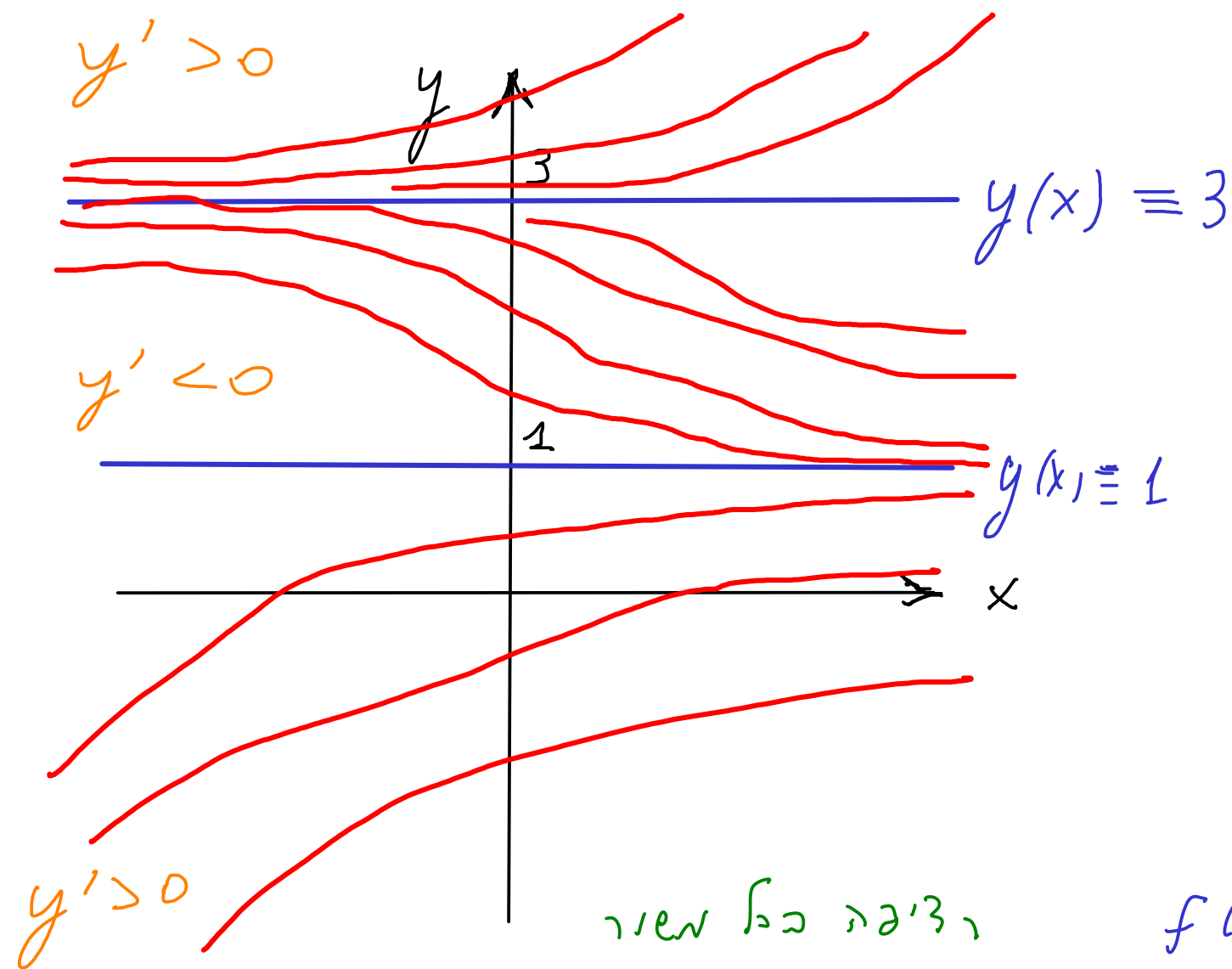
הפונקציה $y(x) \equiv 3$ גם עתיון:

$$y(x) \equiv 3$$

$$y(x) \equiv 1$$

e' > 2 "עבור ענין"





הצבה בכל משווא

הצבה בכל משווא

הצבה בכל משווא

$$f(x, y) = y^2 - 4y + 3$$

$$f'_y(x, y) = 2y - 4$$

הצבה בכל משווא

$$y' = (y-1)(y-3)$$

כל y , $y \neq 1, 3$ נקבל

$$y'(x) > 0 \Leftrightarrow y > 3$$

כל $y(x)$

$$y'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < y < 3$$

כל $y(x)$

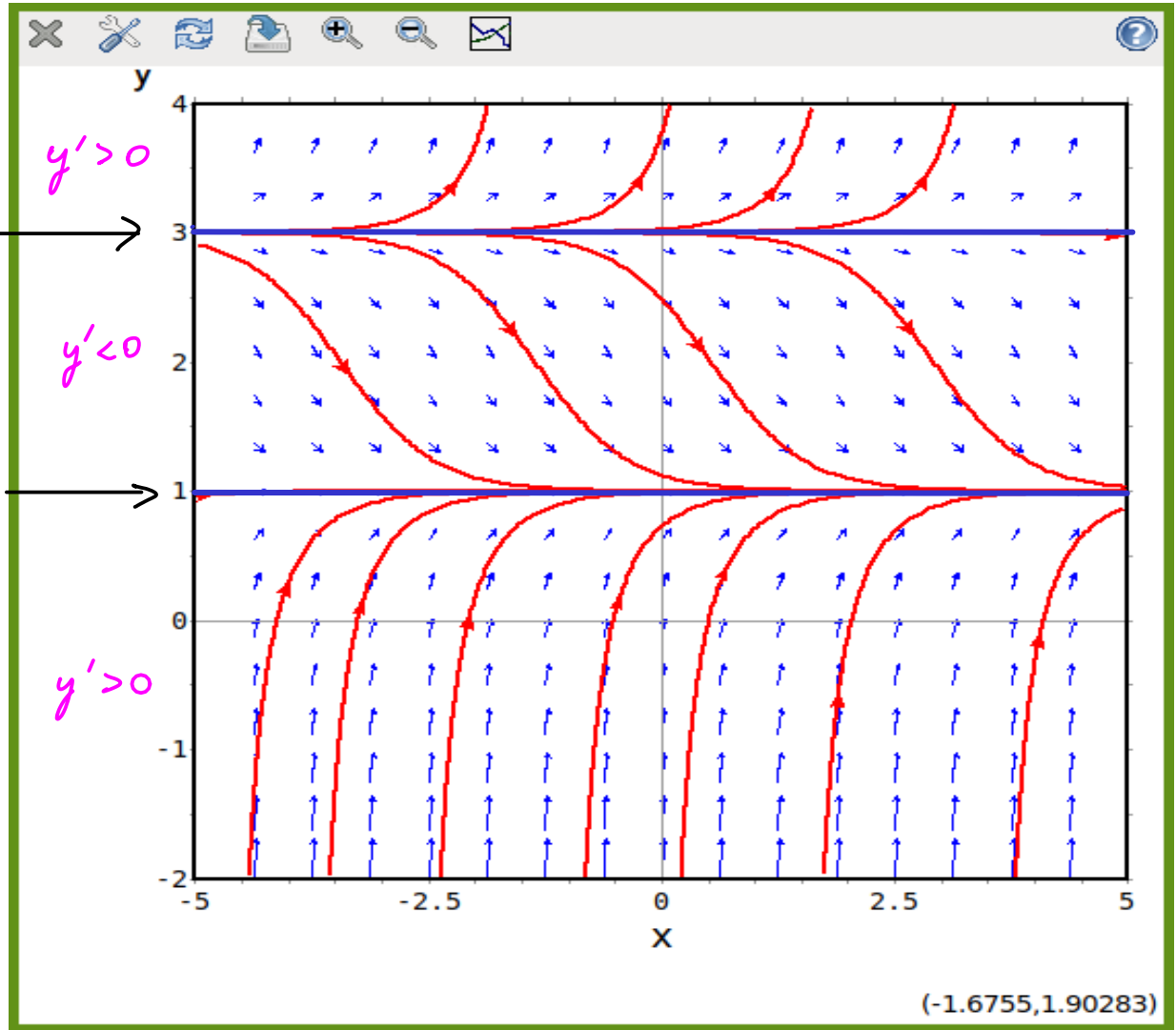
$$y'(x) > 0 \Leftrightarrow y < 1$$

כל $y(x)$

```
File Edit View Search Terminal Help
ostap@ostap-desktop:~$ maxima

Maxima 5.43.2 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.12
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) plotdf( y^2-4*y+3, [x,-2,2], [y,-2,2]);
(%o1) /tmp/maxout10822.xmaxima
(%i2) plotdf( y^2-4*y+3, [x,-2,2], [y,-1,4]);
(%o2) /tmp/maxout10822.xmaxima
(%i3) plotdf( y^2-4*y+3, [x,-2,2], [y,-1,4]);
(%o3) /tmp/maxout10822.xmaxima
(%i4) plotdf( y^2-4*y+3, [x,-5,5], [y,-2,4]);
(%o4) /tmp/maxout10822.xmaxima
(%i5) █
```

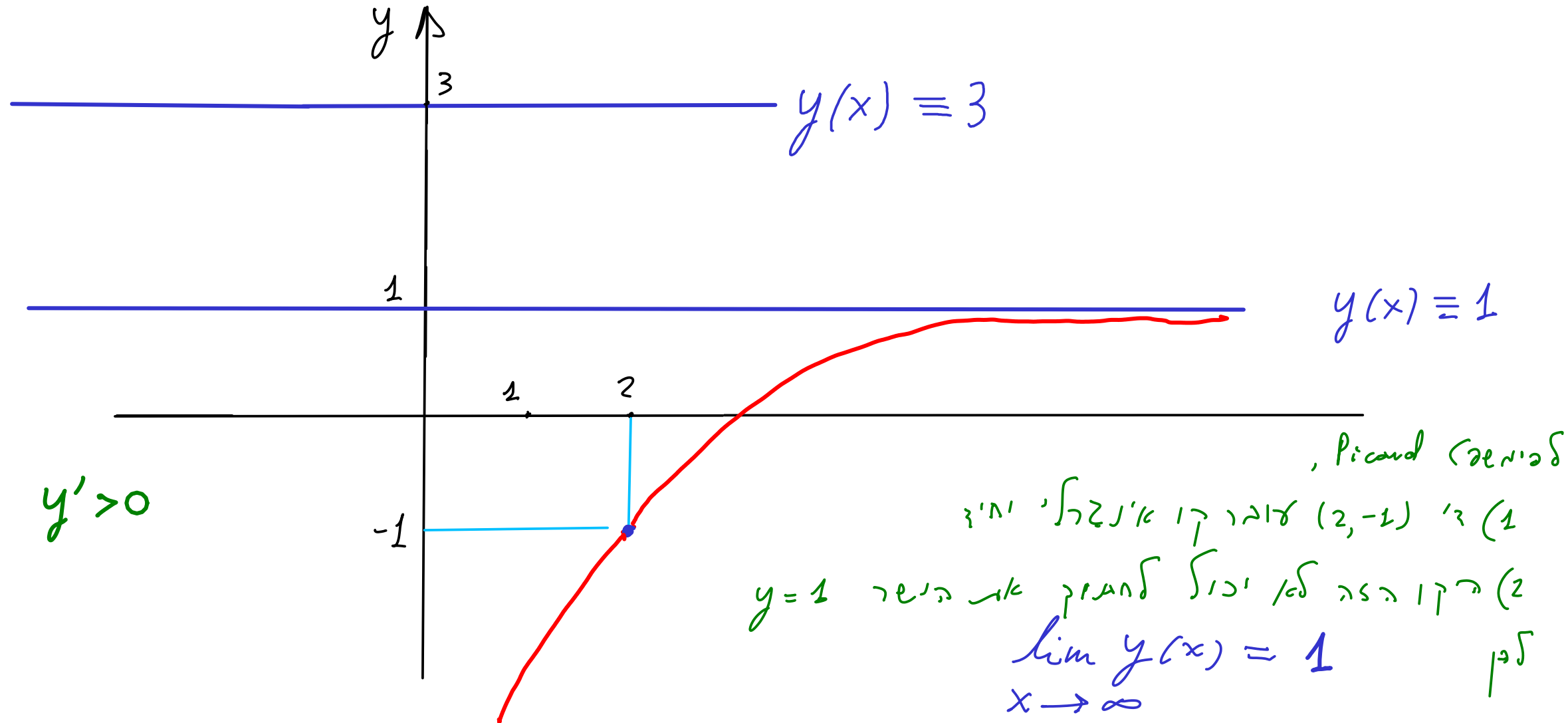
Handwritten notes:
 $y(x) \equiv 3$ (with a vertical line through the 3)
 $y(x) \equiv 1$ (with a vertical line through the 1)

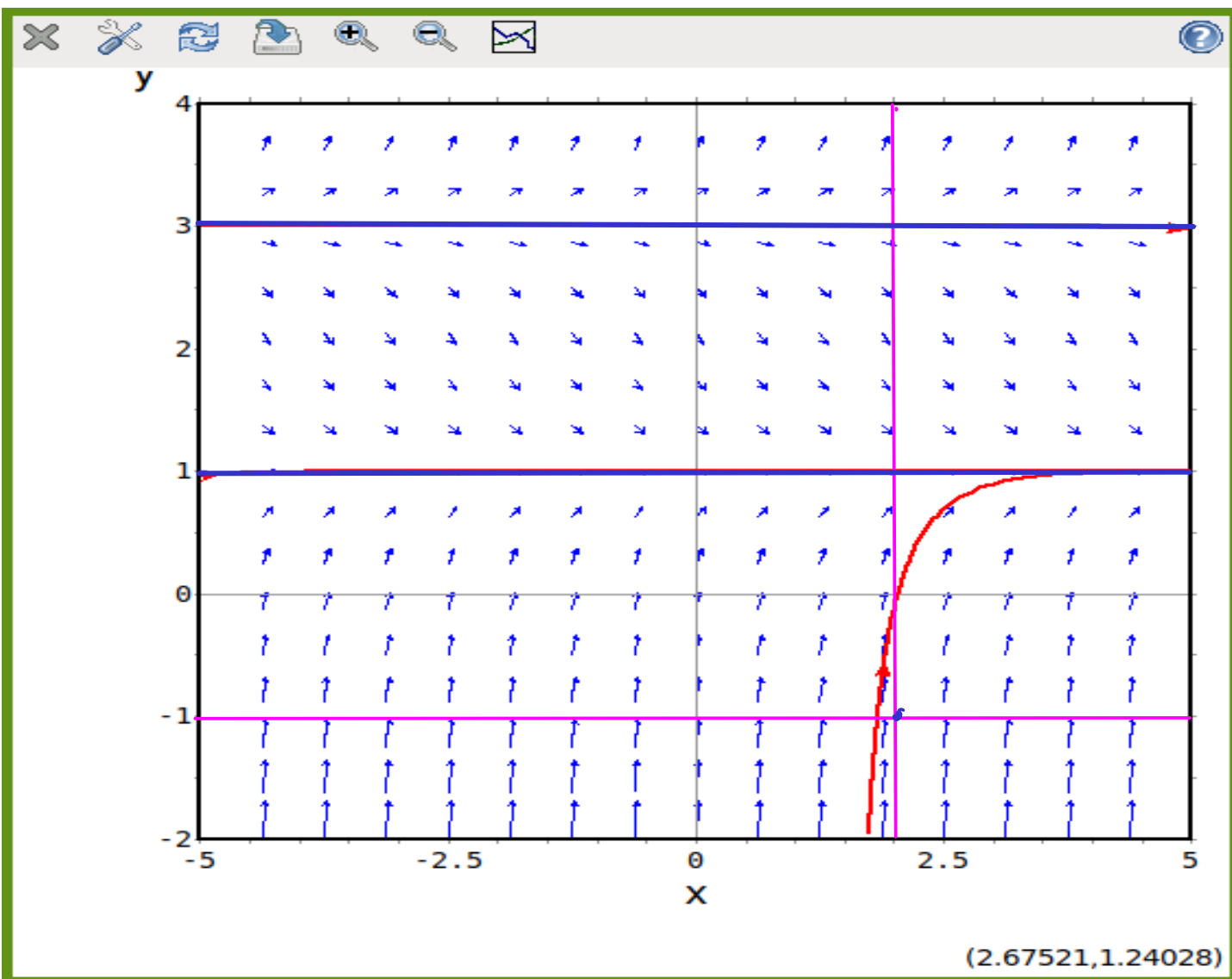


$$\begin{cases} y' = y^2 - 4y + 3 \\ y(2) = -1 \end{cases} \quad \text{בפס, נניח} \quad y(x) \quad \text{לפי}$$

$$x_0 = 2$$

$$y_0 = -1$$





$$\begin{cases} y' = y^2 - 4y + 3 \\ y(2) = -1 \end{cases}$$

— $y(x)$ מונטון

$x \rightarrow \infty$ $y(x)$ $\rightarrow$ $y = 1$ כיוון

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1 \quad \text{כיוון}$$

3. $y' = f(x, y)$ כל $f(x, y)$ פונקציה הומוגנית

$f(x, y)$ הומוגנית מסדר n $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ עבור $\lambda > 0$

הומוגנית מסדר 1 $f(x, y) = \frac{x+2y}{3x-5y}$

1

$\lambda > 0$ $f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x + 2\lambda y}{3\lambda x - 5\lambda y} = \frac{\cancel{\lambda}(x+2y)}{\cancel{\lambda}(3x-5y)} = \frac{x+2y}{3x-5y} = f(x, y)$

כל $f(x, y)$ הומוגנית מסדר 0 $f(x, y) = \frac{x+2}{3x-5y}$

2

הוכחה:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

3

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{2(\lambda x) \cdot (\lambda y)} = \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}{2\lambda x \lambda y} = \frac{\cancel{\lambda^2} x^2 - \cancel{\lambda^2} y^2}{2\cancel{\lambda^2} xy} = \\ &= \frac{x^2 - y^2}{2xy} = f(x, y) \end{aligned}$$

הוכחה:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x^3 + 5y^3}}{x - 2y}$$

4

$$\begin{aligned}
 f(\lambda x, \lambda y) &= \frac{\sqrt[3]{(\lambda x)^3 + 5(\lambda y)^3}}{(\lambda x) - 2(\lambda y)} = \frac{\sqrt[3]{\lambda^3 x^3 + 5\lambda^3 y^3}}{\lambda(x - 2y)} = \\
 &= \frac{\sqrt[3]{\lambda^3 (x^3 + 5y^3)}}{\lambda(x - 2y)} = \frac{\cancel{\lambda} \sqrt[3]{x^3 + 5y^3}}{\cancel{\lambda}(x - 2y)} = \frac{\sqrt[3]{x^3 + 5y^3}}{x - 2y} = f(x, y)
 \end{aligned}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) \neq f(x, y) \Leftarrow \lambda \neq 1$$

დავუშვათ, რომ $f(x, y) = x^2 + y^2$

5

דאמאז'א

$$y' = f(x, y)$$

$$y = xu$$

כז' רבנו עמרם, דער זון פון רבינו

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{y}{x} - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y f \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y f(x, y)$$

$$u(x) := \frac{y(x)}{x}$$

$$x^2 y' = y^2 + 2xy$$

6

$$y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$$

צורה נורמלית:

$$f(x, y) = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$$

הוא מ'ג'.

$$y = xu$$

הצב

[illegible]

$$y' = (xu)' = (x)' \cdot u + x \cdot u' = u + xu'$$

$$u + xu' = \frac{(xu)^2 + 2x(xu)}{x^2} = \frac{x^2 u^2 + 2x^2 u}{x^2} =$$

$$= u^2 + 2u$$

~~$$u + xu' = u^2 + 2u$$~~

$$xu' = u^2 + u$$

$$u' = \frac{u^2 + u}{x}$$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

:Barrow

! קיבלנו פונקציה חדשה

$$h(u) = u^2 + u$$

סדר נכון להכנסות

$$\int \frac{du}{u^2+u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{u(u+1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$$

$$\int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u+1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| - \ln|u+1| = \ln|x| + C_1$$

$$\ln\left|\frac{u}{u+1}\right| = \ln|e^{C_1} x|$$

חייב ש'כאן
 $u(x) \equiv 0$

$$u(x) \equiv -1$$

אם β גדול
 נ' u גדול
 נ' u גדול

נ' u גדול
 $u(x) \equiv 0$
 $u(x) \equiv -1$

$$\ln A - \ln B = \ln \frac{A}{B}$$

המשפט הראשון

$$\ln t_1 > \ln t_2 \iff t_1 > t_2 \quad \text{וכן } (\Rightarrow \text{וכן}) \text{ וכן } \ln t$$

$$t_1 = t_2 \iff \ln t_1 = \ln t_2 \quad \text{וכן}$$

$$C_2 := e^{C_1}$$

$$\left| \frac{u}{u+1} \right| = |C_2 x|$$

$$C_2 > 0$$

$$\frac{u}{u+1} = \pm C_2 x$$

$$: | \cdot | \text{ וכן "כך"} \quad \text{וכן}$$

$$C := \pm C_2 = \pm e^{C_1}$$

וכן $e^a = 0 : a$

$$(C \neq 0)$$

$$\frac{u}{u+1} = Cx$$

$$u = u Cx + Cx$$

$$u = (u+1) Cx$$

$$u(1 - Cx) = Cx$$

$$u - u \cdot Cx = Cx$$

לכל $C \neq 0$ $u(x)$ פתרון של
 משוואה דיפרנציאלית

$$(C \neq 0)$$

$$u(x) = \frac{Cx}{1-Cx}$$

✓

$$u = \frac{y}{x}$$

$$y(x) = x u(x)$$

נחשב את y ונציב

$$\frac{y(x)}{x} = \frac{Cx}{1-Cx} \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{Cx^2}{1-Cx} \quad (C \neq 0)$$

$$y(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \frac{y(x)}{x} \equiv 0$$

$$y(x) = -x \Leftrightarrow \frac{y(x)}{x} \equiv -1$$

$$u(x) \equiv 0 \quad \text{זוהי פתרון של}$$

$$u(x) \equiv -1$$

$$x^2 y' = y^2 + 2xy$$

$$y'(x) \equiv 0$$

$$x^2 \cdot 0 = 0^2 + 2x \cdot 0$$

$$0 = 0$$

$y(x) \equiv 0$ $\Leftrightarrow$ נגזרת אפס בכל x
 כל x $C=0$

$$y'(x) \equiv -1$$

$$x^2 \cdot (-1) = (-x)^2 + 2x \cdot (-x)$$

$$-x^2 = x^2 - 2x^2$$

$$0 = 2x^2 - 2x^2$$

$y(x) = -x$ $\Leftrightarrow$ $0 = 0$

$y(x) \equiv 0$ נכונה

$y(x) = -x$ נכונה

תוצאה: C חופשי

$$y(x) = \frac{Cx^2}{1 - Cx}$$

$$y(x) = -x$$

משוואה דיפרנציאלית

y-פונקציה $f(x, y)$ דיפרנציאלית

$$y' = f(x, y)$$

$$f(x, y) = a(x)y + b(x)$$

$$y' = a(x)y + b(x)$$

$$\varphi(y) = ay + b$$

$a, b \in \mathbb{R}$

בשדה $P(x), Q(x)$ גורמים

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

① משוואה דיפרנציאלית:

בשדה $P(x), Q(x)$ גורמים

$$y' + P(x)y = 0$$

② משוואה דיפרנציאלית הומוגנית
המשוואה

ע"ג כ"ו / ש"ס

$$\int \frac{dy}{y} = - \int P(x) dx$$

$$y_h = e^{-\int P(x) dx} = C e^{-\Phi(x)}$$

$$\varphi(x) := e^{-\varphi(x)}$$

$$y_h(x) = C \varphi(x)$$

1. $y' + p(x)y = 0$ (1) משווא דיפרנציאל מסוג זה
 פתרון: $y_h(x) = C \varphi(x)$, $\int dx$, $\int \frac{1}{\varphi(x)} dx$

$$\mathcal{P}(x) \in \int \mathcal{P}(x) dx$$

$$\mathcal{P}(x) = \int \lambda \mathcal{P}(x) dx$$

$$\mathcal{P}'(x) = \mathcal{P}(x)$$

(2) הפתרון הכללי של משוואה ליניארית: $y' + p(x)y = Q(x)$ ניתן לרשום בצורה

כללי $y_p(x)$ - פרטי

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

כאן $y_h(x)$ הוא פתרון ה-homogeneous

כדי למצוא $y_p(x)$, נניח $y_p(x) = c(x) \varphi(x)$: $\varphi(x)$ - פונקציה ידועה

נניח $c(x)$ פונקציה נעלמת

$$y_p(x) = c(x) \varphi(x)$$

נניח $y_p(x)$ נעלמת

נניח $c(x)$: הנבחרת : $y_p(x)$ נעלמת

$$y_p' = (c\varphi)' = c'\varphi + c\varphi'$$

$$c'\varphi + \cancel{c\varphi'} + p(x)c\varphi = Q(x)$$

$$c'\varphi = Q(x)$$

הנניח $c(x)$ נעלמת !

$$y_p(x) = c(x) \varphi(x)$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad (3)$$

$$y' + p(x)y = Q(x)$$

$$p(x) \equiv 1$$

$$y' + y = 2x$$

$$Q(x) = 2x$$

$$y' + y = 0$$

$$y' = -y$$

נציב

$$|y| = e^{-x+c_1} = e^{c_1} e^{-x}$$

$$\ln|y| = -x + c_1$$

$$y = \pm c_2 e^{-x} (c_2 > 0)$$

$$|y| = c_2 e^{-x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int dx$$

$$(c_2 > 0) \quad c_2 := e^{c_1}$$

לפיכך
 $y(x) \equiv 0$

$$(c \neq 0)$$

$$y(x) = c e^{-x}$$

$$0 + 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow y' \equiv 0$$

$$y(x) \equiv 0$$

$$c = 0$$

$$y' = 2x - y$$

1

המשוואה היא ליניארית, ולכן נניח פתרון בצורה:

הומוג'ני: $y_h(x) = ce^{-x}$. $y' + y = 0$. $\int$ בסיס גללים

($y' + y = 2x$) נחפש פתרון פרטי $y_p(x)$ בעזרת שיטת הפרשנות!

נניח $y_p(x) = c(x)e^{-x}$ $\varphi(x) = e^{-x}$

הפרשנות $c(x)$:

$$(y_p(x))' + y_p(x) = 2x$$

$$(ce^{-x})' + ce^{-x} = 2x$$

$$c'e^{-x} + c \cdot (-e^{-x}) + ce^{-x} = 2x$$

$$c'e^{-x} - \cancel{ce^{-x}} + \cancel{ce^{-x}} = 2x \Rightarrow$$

$$c'e^{-x} = 2x$$

נחלק ב e^{-x}

צרכים פתרון פה
כל מה

$$c(x) \in 2 \int x e^x dx$$

$$\Leftarrow c' = 2x e^x$$

אילו צרכים בהתק'ם:

$$\int \underbrace{x}_u \underbrace{e^x}_{v'} dx = uv - \int u'v dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + \cancel{C}$$

$$c(x) = 2(x-1)e^x$$

$\Leftarrow \cancel{C} = 0$
כל ערך של נותן
השווה (נכונה)

u	x	e^x	v
u'	1	e^x	v'

$$\therefore y' + y = 2x \quad \text{פתרון פה, למשל}$$

$$y_p(x) = 2(x-1)e^x \cdot e^{-x} = 2(x-1)$$

$$e^x \cdot e^{-x} = 1$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C e^{-x} + 2(x-1)$$

$$\therefore y' + y = 2x \quad \rightarrow \int \text{הכל} \quad (2) \quad \text{הפתרון הכללי}$$

$$y(x) = C e^{-x} + 2(x-1)$$

$$y' + y = 2x$$

$$\begin{aligned} [ce^{-x} + 2(x-1)]' + ce^{-x} + 2(x-1) &= \\ = (ce^{-x})' + 2(x-1)' + ce^{-x} + 2(x-1) &= \\ = c(-e^{-x}) + 2 + ce^{-x} + 2x - 2 &= 2x \end{aligned}$$

$$2x = 2x$$

הפרש בין שני האיברים
במצב זה!

בענין $y_1(x)$, $y_2(x)$ פתיון ל $y' + P(x)y = Q(x)$

ע'ס $y_h(x) := y_1(x) - y_2(x)$ פתיון ל $y' + P(x)y = 0$ ה'ה'ו'ח'ז'ו'י' ה'ה'ג'ו'י'ח'ו'י' $y_h(x)$

$$y_1' + P(x)y_1 = Q(x)$$

ל'כ'ל

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{ל'כ'ל פתיון } y_1$$

הוכחה:

$$y_2' + P(x)y_2 = Q(x)$$

ל'כ'ל

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{ל'כ'ל פתיון } y_2$$

$$y_1' - y_2' + P(x)y_1 - P(x)y_2 = 0$$

$$(y_1 - y_2)' + P(x) \cdot (y_1 - y_2) = 0$$

$$y_h' + P(x)y_h = 0$$

ל'כ'ל

משפט אברהם ברון הנל, למשוואה $y' + P(x)y = Q(x)$ ניתן אינסוף פתרונות $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

כאשר $y_h(x)$ הפתרון הכולל למשוואה $y' + P(x)y = 0$

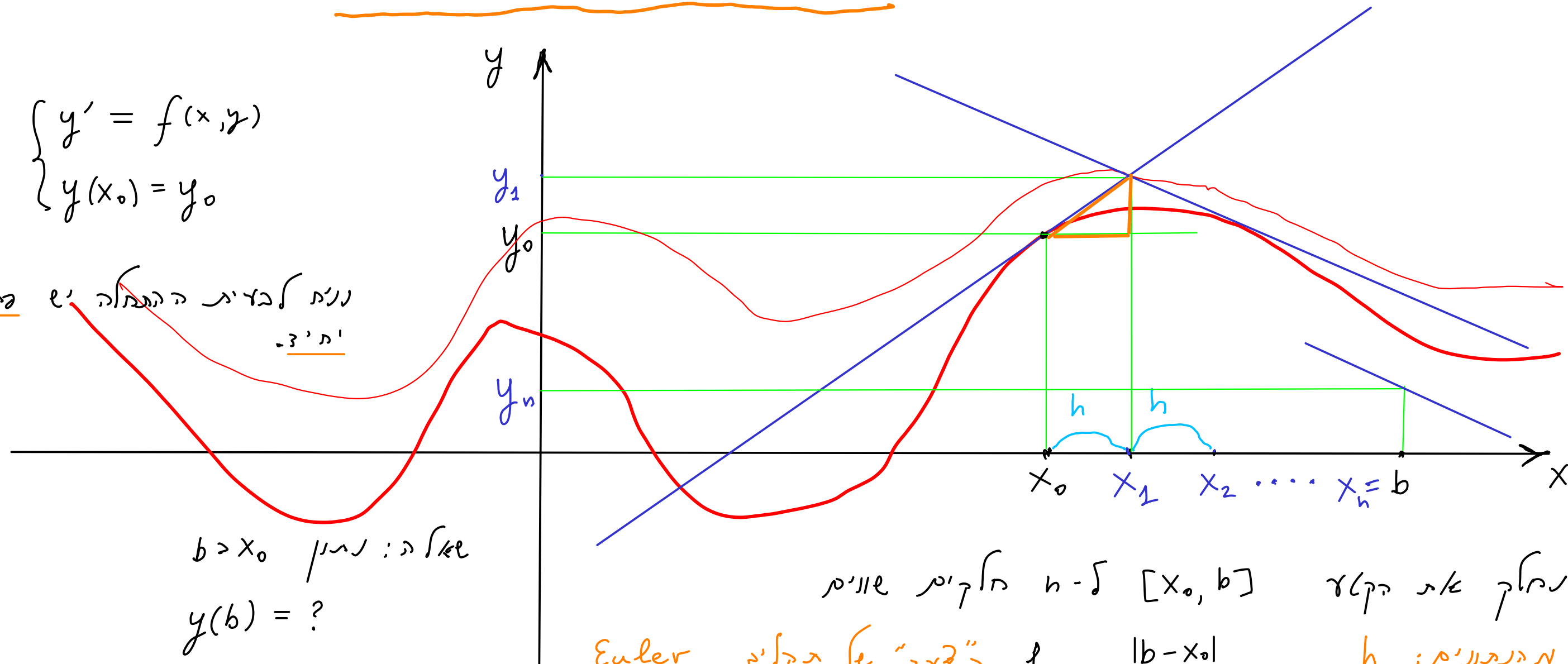
$y_p(x)$ אחת מהפתרונות למשוואה $y' + P(x)y = Q(x)$

הוכחה: אם המשוואה הדיפרנציאלית היא $y' + P(x)y = Q(x)$ פתרון y , y_p פתרון $y' + P(x)y = 0$ אז $y_h = y - y_p$ פתרון $y' + P(x)y = Q(x) - 0 = Q(x)$ לפיכך $y = y_h + y_p$

ע"ה נומרית של Euler

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

מטרה נגיד לבדוק היעילות של
י"ת' 3



אם $b > x_0$: מהו
 $y(b) = ?$

מהלך של הקלח $[x_0, b]$ n - מספר חלקים שווים

Euler "רצף" של חלקים $h := \frac{|b - x_0|}{n}$

אורך מהחלקים: h
(n ilc)

הערכה של y בנקודה x_1

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f(x_0, y_0)$$

הערכה

y_1 נמצא

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0)$$

$$y_1 - y_0 = h \cdot f(x_0, y_0)$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) \quad | \text{כ}$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) =$$

הערכה נמצא

$$= y_1 + h \cdot f(x_0 + h, y_1)$$

$$\begin{cases} y_{m+1} = y_m + h \cdot f(x_0 + mh, y_m) \\ y_0 \end{cases} \quad | \text{כ}$$

הערכה נמצא

$$f(x, y) = 2x - y$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = -1$$

$$\begin{cases} y' + y = 2x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

1

$$h = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$n : \text{step}$$

$$? \quad y(1) : \underline{\sqrt{3}}$$

$$f(x_0 + mh, y_m) = f(0 + mh, y_m) =$$

$$= f(mh, y_m) = f\left(\frac{m}{n}, y_m\right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{m}{n} - y_m$$

$$f(x, y) = 2x - y$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{n} \cdot \left(2 \cdot \underbrace{\left(0 + \frac{m}{n}\right)}_{x_m} - y_m \right) = y_m + \frac{1}{n} \left(\frac{2m}{n} - y_m \right) =$$

$$= y_m + \frac{2m}{n^2} - \frac{1}{n} y_m = \left(1 - \frac{1}{n} \right) y_m + \frac{2m}{n^2} = \frac{n-1}{n} y_m + \frac{2m}{n^2}$$

$$y_0 = -1$$

$$y_{m+1} = \frac{n-1}{n} y_m + \frac{2m}{n^2}$$

:" n' f f 20 " 2 2 1 e n

$$h = 0.500$$

$$n=2 \quad \text{step} \quad \sqrt{e} n \sqrt{}$$

$$m=0$$

$$y_0 = -1$$

$$y_1 = \frac{1}{2} y_0 + \frac{2 \cdot 0}{2^2} = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -0.500$$

$$m=1$$

$$y_2 = \frac{1}{2} y_1 + \frac{2 \cdot 1}{2^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$m = 0, 1, \dots, 9$$

$$y_0 = -1$$

$$: n=10 \quad \text{> 128}$$

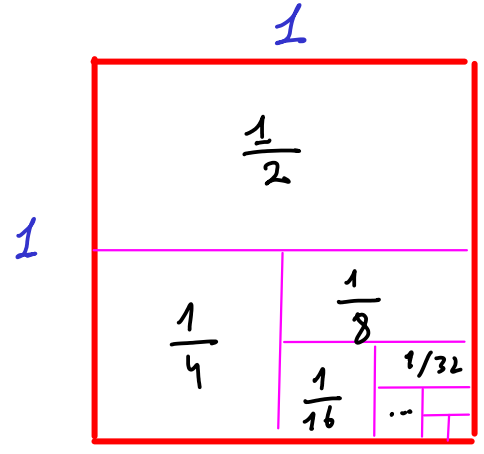
$$y_{m+1} = 0.9 \cdot y_m + \frac{m}{50}$$

(21757 1160 1172) I. Newton 1e 11e = 11757 1172 1172

ה' בכסלו תשפ"ו

ג. לורי חלקי

1 = הכל



סכום אינסופי של חלקי אחד (במקרה זה, אחד) = 1

סכום אינסופי של חלקי אחד = 1

1

סכום אינסופי = 1

סכום אינסופי = 1

1 + 1 + 1 + 1 + ... = ?

2

$y(x)$ הפתרון של "קוטר" 3 $y' = y$
 $y(0) = 1$

$$y(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$$

C_0, C_1, C_2, C_3 : 3 דגרי חופשי

$$y'(x) = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2$$

$$\underline{C_1} + \underline{2C_2 x} + \underline{3C_3 x^2} = \underline{C_0} + \underline{C_1 x} + \underline{C_2 x^2} + \cancel{C_3 x^3}$$

הצבה:

השוואת מקדמים: $\Leftrightarrow$ (כיוון של) $\Rightarrow$ $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_k x^k$

כל x

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_k x^k$$

$$\begin{aligned}
 a_0 &= b_0 \\
 a_1 &= b_1 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

$$a_k = b_k$$

$$C_1 = C_0$$

$$2C_2 = C_1 = C_0 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2} C_0$$

$$3C_3 = C_2 = \frac{1}{2} C_0 \Rightarrow C_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} C_0$$

C_0 נסמן

הערות נוספות:

$$y(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$$

$$y(0) = 1$$

הערות נוספות:

$$y(0) = C_0 \Rightarrow C_0 = y(0) = 1 \Rightarrow C_0 = 1$$

נניח ש-

$$\begin{cases} y' = y + \sin(x) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

?

? $\sin(x)$ נראה שיש לו פתרון

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = \frac{1}{2}$$

$$C_3 = \frac{1}{6}$$

תוצאה:

$$y(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

הערות נוספות:

סך הכל

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = \sum_{n=2}^7 a_n$$

$$n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

$$n = 2, \dots, 7$$

$\sum$
 $\int$ $\swarrow$ $\searrow$ SV MMA

$$= \sum_{k=2}^7 a_k$$

$$= \sum_{\odot=2}^7 a_{\odot}$$

$$= \sum_{\ominus=2}^7 a_{\ominus}$$

$$\neq \sum_{k=2}^7 a_n$$

קדור ארבעה

$$\sum_{k=2}^7 a_n = a_n + a_n + a_n + a_n + a_n + a_n = 6a_n$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$C_0 = C_1 = C_2 = \dots = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = "$$

$$? \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{נורמל} \quad \text{נורמל}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

$$: \text{נורמל} \quad \text{נורמל} \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{נורמל}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = ?$$

$$(1-x)(1+x+x^2) = 1 - \cancel{x} + \cancel{x} - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} - x^3$$

$$(1-x)(1+x) = 1 - x^2$$

$$(1-x)(1+x+x^2) = 1 - x^3$$

.....

$$(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^k) = 1 - x^{k+1}$$

$$\sum_{n=0}^k x^n = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$$

$\Leftrightarrow$

$$(1-x) \sum_{n=0}^k x^n = 1 - x^{k+1}$$

:נורמל

סדר ג' על פניו נראה:

$$\begin{aligned} s_0(x) &= 1 \\ s_1(x) &= 1+x \\ s_2(x) &= 1+x+x^2 \\ s_3(x) &= 1+x+x^2+x^3 \end{aligned}$$

$$s_k(x) = 1+x+x^2+\dots+X^k = \frac{1-X^{k+1}}{1-X}$$

ק"ק $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x)$: x קטן מספיק

ק"ק $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x)$: x קטן מספיק

נראה $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ וזה $\leq$ קטן מספיק

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1-x^{k+1}}{1-x} = \frac{1 - \lim_{k \rightarrow \infty} x^{k+1}}{1-x}$$

$$\begin{aligned} x^k: & 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad \dots \\ x^{k+1}: & x \quad x^2 \quad x^3 \quad \dots \end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k$$

$$x \neq 1$$

$$x = -1$$

$$x^k: 1 -1 1 -1 1 -1 \dots$$

$$x = -2$$

$$x^k: 1 -2 4 -8 16 -32$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \begin{cases} 0 & -1 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ \infty & x > 1 \\ \text{no limit} & x \leq -1 \end{cases}$$

con

$$x \in (-1, 1)$$

$$|x| < 1$$

$$\Leftrightarrow \text{or } \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

and (1) con

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 1 \quad (2)$$

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$\text{and } \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{and}$$

סיכום

הלור

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

"צ"א" אר פונקציה

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

כל

הן בקל $(-1, 1)$ אחרות שבפונקציה $y(x)$ מוגדרת ב $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
ז"א אכל כל x
פסל $x=1$

גפול'נו מ'מ

$$1$$

$$1+x$$

$$1+x+x^2$$

$$1+x+x^2+x^3$$

...

ק'רוב'מ

$$\frac{1}{1-x} \text{ (פול'נו מ'מ)}$$

$$\underline{y(x) = e^x \text{ בלור } e}$$

$$e^x = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k$$

הזכירה
בלור e^x

ניתן להזכיר את e^x עם מציג 1- , כגביון לכדי גבול:

$$(e^x)' = e^x$$

$$(-3e^x)' = -3e^x$$

$$e^0 = 1$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n$$

נניח:

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$$

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

הזכירה
אלוהים:

נחפש את גביון כזו:

$$C_0, C_1, C_2, \dots, C_n = ?$$

$$y'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n X^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n n X^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n n X^{n-1} =$$

שהלא סביר!

$$= \left\{ \left\{ \begin{array}{l} p := n-1 \\ n = p+1 \\ p = 0, 1, \dots \end{array} \right\} \right\} = \sum_{p=0}^{\infty} C_{p+1} (p+1) X^p = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} (n+1) X^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} (n+1) X^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n \quad \underline{\quad : n \geq 3 \quad}$$

$$n=0, 1, \dots \quad \text{by } n \geq 3$$

$$C_{n+1} \cdot (n+1) = C_n \quad \Rightarrow \quad C_{n+1} = \frac{C_n}{n+1}$$

$$C_1 = \frac{C_0}{1} = C_0$$

$$C_2 = \frac{C_1}{1+1} = \frac{C_1}{2} = \frac{C_0}{2}$$

$$C_3 = \frac{C_2}{2+1} = \frac{C_2}{3} = \frac{C_0}{2 \cdot 3} = \frac{C_0}{3!}$$

$$C_4 = \frac{C_3}{4} = \frac{C_0}{4 \cdot 3!} = \frac{C_0}{4!}$$

$$C_{n+1} = \frac{C_0}{(n+1)!}$$

$C_0 = 1$: $C_0 = 1$ אז $y(0) = 1$ תנאי ההתחלה

$$C_n = \frac{1}{n!}$$

לכן $C_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$ $n \in \mathbb{N}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

לפי נוסחה זו
נכון לכל x

$$(f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_{1000000})' = f_1' + f_2' + \dots + f_{1000000}'$$

במה העניין?

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$a_0 = b_0$$

$$a_1 = b_1$$

$$a_n = b_n$$

②

$$n \in \mathbb{N} \rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n x^n)' \quad \textcircled{1}$$

אולי ננסה

ע'אן און פונקטן פאר $y(x) = \cos(x)$

$$y'' + y = 0$$

תנאי גבול - ?

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

$$y'' = -y$$

$$y(x) = \cos x$$

$$y'(x) = -\sin x$$

$$y''(x) = -\cos x$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

אין פונקטן
די גבול:

$$y'(x) = c_1 + 2c_2 x + \dots$$

$$y'(0) = c_1$$

$$c_0 = 1$$

$$\Leftarrow y(0) = 1$$

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

$$c_1 = 0$$

$$\Leftarrow y'(0) = 0$$

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$y''(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right)'' = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n x^n)'' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} C_n n(n-1) x^{n-2} =$$

Coeff
 נניח ש
 נניח ש-נניח ש

$$= \left\{ \begin{array}{l} p := n-2 \\ n = p+2 \\ p = 0, 1, \dots \end{array} \right\} = \sum_{p=0}^{\infty} C_{p+2} (p+2)(p+1) x^p =$$

$$C_0 = 1 \quad C_1 = 0$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2} (n+2)(n+1) x^n$$

$$y'' = -y$$

$$y'' + y = 0$$

נניח ש-נניח ש

$$(n+1)(n+2) C_{n+2} = -C_n$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2} (n+1)(n+2) x^n = - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$C_{n+2} = - \frac{C_n}{(n+1)(n+2)}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\cos x &\approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} + \dots = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \frac{x^{10}}{2628800} + \frac{x^{12}}{479001600} + \dots\end{aligned}$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$$

x 6 2128

Taylor כל

(1) כל חסוקה ל' $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$: $x=a$ - החזק של הפונקציה

Taylor פולינום

(2) $\sum_{n=0}^k c_n (x-a)^n$ הסכום התלוי ה- k של הכל

(3) הכל מחזק עבור x , כל הסדר ה- $\sum_{n=0}^k c_n (x-a)^n$ $T_k(x) :=$ מחזק.

(3) הקבוצה של x : הכל מחזק = המחזק של הכל.

1 1 נמצא פונקציה $y(x) = \frac{1}{1-x}$ ל' $x=2$

נראה בנוסחה

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \quad |u| < 1$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-2)^n$$

$\text{פרק } x = t + 2 \text{ 's/k}$
 $t := x - 2$
 פרק , s/k

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-(t+2)} = \frac{1}{-1-t} = -\frac{1}{1+t} =$$

$$(t=0 : \text{סדרה}) \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$$

$$= -\frac{1}{1-(-t)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (x-2)^n$$

$$u = -t$$

$$-(-1)^n = (-1) \cdot (-1)^n = (-1)^{n+1}$$

$$|u| = |-t| = |t| = |x-2| < 1$$

$$x \in (1, 3)$$

$$1 < x < 3 \quad \text{, s/k}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (x-2)^n \quad \underline{\text{: , s/k}}$$

כ"ס 3 > 150 א"כ

c_0
 c_1
 c_2
 c_3

3

3 130 38

$$P_3(x) \approx y(x)$$

$$\begin{cases} y' = y + \frac{1}{1-x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

VIII

כ"ס 1

$$y(x) \approx c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ כ"ס 3 ו"כ 130 א"כ 3

ה"כ 3 ו"כ 130 א"כ 3
כ"ס 3 ו"כ 130 א"כ 3
(a=0)

כ"ס 3 ו"כ 130 א"כ 3

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + 1 + x + x^2$$

x^3 כ"ס 3 ו"כ 130 א"כ 3

① $c_1 = 2$

⊗ $2c_2 = c_1 + 1 = 3 \Rightarrow c_2 = \frac{3}{2}$

⊗ $3c_3 = c_2 + 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow c_3 = \frac{5}{6}$

$$y'' = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_0 = 1$$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$y(x) \approx 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \dots$$

c_0
 c_1
 c_2
 c_3
 c_4

3

4 30 38

$$\begin{cases} y'' = 2xy' + 4y \\ y(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0 \\ y'(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

$$y'(x) = c_1 + 2c_2x + \dots \Rightarrow y'(0) = c_1$$

$$y(x) = x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \dots$$

$$y'(x) = 1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots$$

$$y''(x) = 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + \dots \Rightarrow$$

נמצא את הפתרון (קידום -) בצורה:

3 חזקות של x ו-2

הצבה:

$$2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 = 2x(1 + 2c_2x) + 4(x + c_2x^2)$$

- 1
- x
- x²

$$2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$6c_3 = 2 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3}$$

$$12c_4 = 4c_2 + 4c_2 = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

$$y(x) \approx x + \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

הפתרון:

c_0
 c_1
 c_2
 c_3
 c_4

3

4 30 38

$$\begin{cases} y'' + y e^x = 0 \\ y(0) = 2 \Rightarrow c_0 = 2 \\ y'(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \end{cases}$$

$$y(x) \approx 2 + x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 +$$

$$y''(x) = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + (2 + x + c_2 x^2) \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$$

$$\underline{2c_2} + \underline{6c_3 x} + \underline{12c_4 x^2} + \underline{2(1+x+\frac{x^2}{2})} + \underline{x(1+x+\frac{x^2}{2})} + c_2 x^2 \left(\underline{1+x+\frac{x^2}{2}}\right)$$

$$y(x) \approx 2 + x - x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{12}$$

3 2 1 0 38

$$c_2 = -1 \Leftrightarrow 2c_2 + 2 = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$c_3 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 6c_3 + 3 = 0 \quad \textcircled{x}$$

$$c_4 = -\frac{1}{12} \Leftrightarrow \begin{matrix} 12c_4 + 2 + c_2 = 0 \\ 12c_4 + 1 = 0 \end{matrix} \quad \textcircled{x^2}$$

c_0
 c_1
 c_2
 c_3

3

3 130 38

$$\begin{cases} y' = y + xe^y \\ y(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0 \end{cases}$$

4

$$y(x) \approx c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 = x(c_1 + c_2 x + c_3 x^2)$$

$$y'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots$$

x^n for $n \geq 2$ we have $y' \geq 3$
 and $n=2, 3, \dots$

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{6} y^3 + \dots = 1 + x(c_1 + c_2 x) + \frac{1}{2} x^2 (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)^2 + \frac{1}{6} x^3 (c_1 + \dots)^3$$

$$= 1 + x(c_1 + c_2 x) + \frac{1}{2} x^2 c_1^2$$

$$xe^y = x + x^2(c_1 + c_2 x) + \frac{1}{2} x^3 c_1^2 = x + c_1 x^2$$

הצגה:

$$C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 = C_1x + C_2x^2 + x + C_1x^2$$

① $C_1 = 0$

② $2C_2 = C_1 + 1 = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}$

③ $3C_3 = C_2 + C_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow C_3 = \frac{1}{6}$

התוצאה:

התוצאה: , 3 מספרים
 $y(x) \approx \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

2. Newton's Binomial Theorem

Newton's Binomial Theorem

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

.....

$$(A+B)^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} A^{k-n} B^n$$

valid for $k+1$

$$(A+B)(A+B)(A+B) = 1 \cdot A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$\frac{3!}{3!0!} = 1$ $\binom{3}{3}$ $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{0}$

k terms n terms $\rightarrow$ $\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}$

$$0! = 1$$

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$$

$$\begin{aligned} (A+B)(A+B)(A+B) &= (A+B)(A^2 + AB + BA + B^2) = \\ &= A^3 + \underline{A^2B} + \underline{ABA} + \underline{ABB} + \underline{BA^2} + \underline{BAB} + \underline{BBA} + B^3 \\ &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \end{aligned}$$

$$(A+B)^k = \left[A \left(1 + \frac{B}{A} \right) \right]^k = A^k \left(1 + \frac{B}{A} \right)^k$$

$$A=1, B=x \quad \text{נצי, ונעבר ל} x \text{ ו} \sqrt{\quad}$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} x^n = \sum_{n=0}^k \frac{k(k-1)(k-2)\dots 2 \cdot 1}{n!(k-n)!} x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^k \frac{k(k-1)\dots(k-n+1) \overbrace{(k-n)!}^{(k-n)!}}{n! \underbrace{(k-n)!}_{\cdot}} x^n = \sum_{n=0}^k \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} x^n$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^k \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} x^n \quad \text{!סכום}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\int$ נציג :סכום k $\int$ נציג $n \geq 0$:סכום I. Newton

$$(1+x)^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)}{n!} x^n$$

$|x| < 1$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)}{n!} x^n$$

$\subset \mathbb{R} \cup \mathbb{N}$

$$(1+x)y'(x) = \lambda(1+x)^{\lambda-1} = \lambda y(x)$$

let $y'(x) = \lambda(1+x)^{\lambda-1}$, $y(x) := (1+x)^\lambda$

proof (1: induction)

$$(1+x)y' = \lambda y$$

check $y(x)$ is a solution

$$y(0) = 1$$

initial condition

hence $y(x) = (1+x)^\lambda$ is the solution

$$\begin{cases} (1+x)y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

(2) let $y(x)$ be a solution

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$

$$xy' = x \sum_{n=0}^{\infty} C_n n X^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n n X^n$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n n X^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n X^{n-1} = \left\| \begin{array}{l} p := n-1 \\ n = p+1 \\ p = 0, 1, \dots \end{array} \right\| = \sum_{p=0}^{\infty} (p+1) C_{p+1} X^p = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_{n+1} X^n$$

הצבה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_{n+1} X^n + \sum_{n=0}^{\infty} n C_n X^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) C_{n+1} + n C_n] X^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda C_n X^n$$

$$(n+1) C_{n+1} + n C_n = \lambda C_n$$

$$(n+1) C_{n+1} = (\lambda - n) C_n \Rightarrow$$

קיבלנו נוסחה לסדרה C_n :

$$C_{n+1} = \frac{\lambda - n}{n+1} C_n \quad n = 0, 1, \dots$$

$$C_0 = 1$$

(3) נוכח כי $c_n = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)}{n!}$ עבור כל $n \geq 0$

נבדוק $c_1 = \frac{\lambda}{1!} = \lambda$

(a) בסיס האינדוקציה:

(b) נניח כי $c_n = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)}{n!}$ נכון, נוכיח כי $c_{n+1} = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)(\lambda-n)}{(n+1)!}$

$$c_{n+1} = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)(\lambda-n)}{(n+1)!}$$

נראה כי:

$$c_{n+1} = \frac{\lambda-n}{n+1} c_n = \frac{\lambda-n}{n+1} \cdot \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)}{n!} = \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)(\lambda-n)}{(n+1)!}$$

$$(n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

(4) תחום ההכנסות: Abel טנזנט per : תחום ההכנסות של האר $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ הוא קצו
 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ כול $(-R, R)$

כיהמס הסה :

כין האר טנז מכס $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda - n}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\lambda}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n}} \right| = 1$

כין $|x| < 1$.

ט.ע.נ

כ' בלגו גלגל

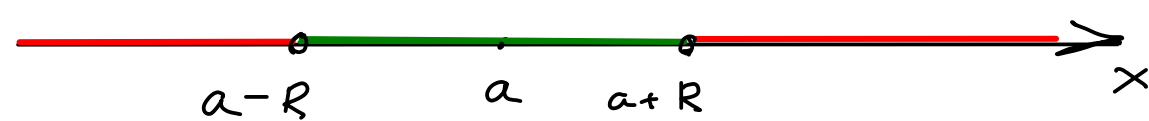
מעט (N.H. Abel)

סדר אור חזק $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ יש 3 אפשרויות:

- א) $x=0$ בלבד $R=0$ נגזר
- ב) קיים מספר $R>0$ כך שהאור מתכנס עבור $|x|<R$ ונגזר עבור $|x|>R$ $0<R<\infty$
- ג) האור מתכנס עבור כל x $R=\infty$



נגזר (red) מתכנס (green) נגזר (red)



|| R - "רדיוס התכנסות"

בצורה כללית: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$

$|x-a|<R$

תחום התכנסות:
 $\mathcal{D} = (a-R, a+R)$

? R $\rightarrow$ 10 1315 7'10

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \underline{\underline{CoeN}}$$

$$D = (-1, 1)$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = 1$$

$$c_n = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

1

$$D = (2-1, 2+1) = (1, 3)$$

$$a = 2 \quad R = 1$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = 1$$

$$c_n = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n$$

2

$$0 < x < 3 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n \Leftrightarrow 1 < x < 3$$

$$x > 3 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n \Leftrightarrow x > 3$$

$$x < 1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n \Leftrightarrow x < 1$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

$$\frac{C_n}{C_{n+1}} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

$$C_n = \frac{1}{n!}$$

$$a=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

3

no need to integrate x

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n} (2x-8)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n} [2(x-4)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot 2^n (x-4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n} (x-4)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n} (2x-8)^n$$

4

$$C_n = \frac{4^n}{n}$$

$$a=4$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4^n}{n} \cdot \frac{n+1}{4^{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{4^{n+1}} = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\mathcal{D} = \left(4 - \frac{1}{4}, 4 + \frac{1}{4} \right) = (3.75, 4.25)$$

$$D = (-1, 1)$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$C_n = n \quad a = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n X^n \quad \boxed{5}$$

$$\text{ratio test} \Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$C_n = n! \quad a = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! X^n \quad \boxed{6}$$

$$C_0 = 1 \quad C_1 = 0 \quad C_2 = -\frac{1}{2} \quad C_3 = 0 \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{X^{2n}}{(2n)!} \quad \boxed{7}$$

$$1 - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{24} - \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \cdot \frac{C_{n+1}}{C_{n+2}} \right| = R \cdot R = R^2$$

(ratio test)

$$R^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+2)(2n+1) = \infty$$

x ratio test

זכרון ואלקטרון ג'ורג' - ג'ורג' - ג'ורג'

לענ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$



$$a_0 = b_0$$

$$a_1 = b_1$$

...

$$a_n = b_n \quad \forall n$$

$(-R, R)$ ג'ורג' ג'ורג'

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$(-R, R)$ ג'ורג' ג'ורג'

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n x^n)' \quad \Leftarrow$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n x^n)'$$

$$x=0 \quad \int \quad f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \left((1-x)^{-1} \right)' = (-1) \cdot (1-x)^{-2} \cdot (1-x)' = (-1) \cdot (1-x)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{1-x}$$

הפונקציה

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

הפונקציה, כלומר $|x| < 1$, כלומר $(-1, 1)$.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

$$c_n = n+1$$

$$|x| < 1$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$R =$$

הערה 1.3:

$\int f(x) dx =$ גובה, $\int$ הוא סימן האינטגרל, $f(x)$ - פונקציה

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F(x) \in \int f(x) dx$$

(פונקציה x) $\int_a^x f(t) dt$

אם הפונקציה קצומה:

ערה 1.3 נניח $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ מתכנס ב- $(-R, R)$.

יש $\int_a^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^x c_n t^n dt \right)$ וניתן להבטיח שהאינטגרל הזה שווה $(-R, R)$.

$$\int \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x| + C$$

$$a=0 \quad \frac{1}{1+x} \quad \boxed{9}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$C_n = (-1)^n \quad |x| < 1$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad : \text{ } \lambda \text{ } \mu \text{ } \nu \text{ } \rho \text{ } \sigma \text{ } \tau \text{ } \theta$$

$$|x| < 1 \quad \gamma \text{ } \delta$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln|1+x|$$

$$: \text{ } \zeta \text{ } \eta \text{ } \theta$$

$$\ln|1+x| = \ln(1+x) \quad \Leftarrow |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$: \text{ } \lambda \text{ } \mu \text{ } \nu$$

ל' > 1 - ג' < 1/2

203

תרגילים שנים לביתא פוקציות לאורי חקנו

$$a=0$$

$$y(x) = \operatorname{arctg} x$$

1

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

$$C_n = (-1)^n$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \dots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

$$C_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}, & n=2m \\ 0, & n=2m+1 \end{cases}$$

'215
'215-1/2

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$|x| < 1$$

$$\operatorname{arctg} x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$a=0$$

$$y(x) = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$$

2

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$\ln \left(\frac{A}{B} \right) = \ln A - \ln B \quad A, B > 0$$

$$\ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$$

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) &= \ln(1-x) - \ln(1+x) = \ln(1+(-x)) - \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \frac{(-x)^n}{n} - (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

$$(-1)^n - 1 = \begin{cases} 0, & n=2m \\ -2, & n=2m+1 \end{cases}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n} x^n$$

$$C_n = (-1)^{n+1} \frac{(-1)^n - 1}{n} = \begin{cases} 0, & n=2m \\ (-1)^{n+1} \frac{-2}{n} = -\frac{2}{2m+1}, & n=2m+1 \end{cases}$$

$$C_{2m+1} = -\frac{2}{2m+1}$$

$$C_{2m} = 0$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{2n+1} x^{2n+1}$$

1.5

$$C_0 = C_2 = C_4 = C_6 = \dots = 0$$

$$C_1 = -2$$

$$C_3 = -\frac{2}{3}$$

$$C_5 = -\frac{2}{5}$$

$$y(x) \approx -2x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 - \dots$$

$$a = -1$$

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

3

$$t := x - a = x + 1$$

$$x = t - 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-(t-1)} = \frac{1}{2-t} = \frac{1}{2(1-\frac{t}{2})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (x+1)^n$$

$$|x+1| < 1$$

$$-1 < x+1 < 1$$

$$-2 < x < 0$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (x+1)^n \quad \text{induz}$$

$$-2 < x < 0 \quad , \text{induz} \quad C_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$a = 2$$

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$t := x - 2$$

$$x = t + 2$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-(t+2)} = \frac{1}{1-t-2} = \frac{1}{-1-t} = -\frac{1}{1+t} = -\frac{1}{1-(-t)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (x-2)^n$$

$$|x-2| < 1$$

תחום הה収כ 1/0.2:

$$1 < x < 3$$

$$\Leftrightarrow -1 < x-2 < 1$$

$$a=0$$

$$y(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

5

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad R = \infty$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! \cdot 2^{2n+1}} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2(2n+1)! 4^n} x^{2n+1}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$C_n = \begin{cases} 0, & n=2m \\ \frac{(-1)^m}{2(2m+1)! 4^m}, & n=2m+1 \end{cases}$$

$$a = 0$$

$$y(x) = x \sin x$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$x \cdot \sin x = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2(n+1)}}{(2n+1)!} = \left\{ \begin{array}{l} p := n+1 \\ n = p-1 \\ p = 1, \dots \end{array} \right\} = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \frac{x^{2p}}{(2p-1)!} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!}$$

$$(-1)^{p-1} = (-1)^{p+1}$$

Taylor expansion around $x=a$

$$y(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \dots$$

$$y(a) = c_0$$

$$y'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots$$

$$y'(a) = c_1$$

$$y''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3(x-a) + 4 \cdot 3 \cdot c_4(x-a)^2 + \dots$$

$$y''(a) = 2c_2$$

$$y'''(x) = 3!c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot c_4(x-a) + \dots$$

$$y'''(a) = 3!c_3$$

$$c_n = \frac{y^{(n)}(a)}{n!}$$

$$y^{(n)}(a) = n! c_n \quad ; \text{ for } n \geq 1$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Taylor expansion

Euler נוסחה

$$a=0$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$R=\infty$$

הכל מוגדר

ניתן להציב במקום x כל דבר שיש לו 3 ערכים: כפול, חיבור, חיסור

1) מספרים ממשיים

2) מספרים מרוכבים

3) מטריצות בודיות $k \times k$

$$x = i\varphi$$

$$\varphi \in \mathbb{R}$$

$$i^2 = -1$$

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \varphi^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m} \varphi^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m+1} \varphi^{2m+1}}{(2m+1)!} =$$

$$i^n = \begin{cases} i^{2m} = (i^2)^m = (-1)^m, & n = 2m \\ i^{2m+1} = i^{2m} \cdot i = (-1)^m \cdot i & n = 2m+1 \end{cases}$$

$$= \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \varphi^{2m}}{(2m)!}}_{\cos \varphi} + i \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \varphi^{2m+1}}{(2m+1)!}}_{\sin \varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$e^{i\varphi} = \overset{n=0}{1} + \overset{n=1}{i\varphi} + \overset{n=2}{\frac{(i\varphi)^2}{2}} + \overset{n=3}{\frac{(i\varphi)^3}{3!}} + \overset{n=4}{\frac{(i\varphi)^4}{4!}} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{(i\varphi)^2}{2} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \dots + i\varphi + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \dots$$

e^{Ax} "הפונקציה"

$$e^{Ax} := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} A^m$$

$$e^{Ax} = I + xA + \frac{x^2}{2}A^2 + \dots$$

$$e^{A+B} = e^A e^B \iff AB = BA \quad \underline{\underline{\subset \mathfrak{so}(n)}}$$

$$A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מלך' צו
ג'ת' צו

$$A = D + N$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$: N^m, D^m \text{ sein } \int \int \rho \quad (1)$$

$$D^2 = DD = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$D^m = \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^m \end{pmatrix}$$

$$e^{(D+N)x} = e^{Dx} e^{Nx} \quad \Leftrightarrow \quad DN = ND \quad (2)$$

$$N^2 = NN = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{"نصف صفری"}$$

$$e^{A_x} = e^{D_x} e^{N_x}$$

$$e^{D_x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} D^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^m \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{x^m 2^m}{m!} & 0 \\ 0 & \frac{x^m 2^m}{m!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m 2^m}{m!} & 0 \\ 0 & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m 2^m}{m!} \end{pmatrix} =$$

↑
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000

$$= \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$e^{D_x} = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & 0 \\ 0 & e^{\mu x} \end{pmatrix} \quad \Leftarrow \quad D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{הערך} \quad \underline{\text{הערך}}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad N^m = 0 \quad (m \geq 2)$$

$$e^{Nx} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} N^m = I + xN + \frac{x^2}{2} \overset{=0}{N^2} + \frac{x^3}{6} \overset{=0}{N^3} + \dots = I + xN = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

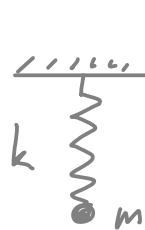
$$e^{Ax} = e^{Dx} e^{Nx} = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & x e^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$$

מערכות קואורדינטות

$$\begin{cases} v_1' = \frac{q}{m} (E_1 + v_2 B_3 - v_3 B_2) \\ v_2' = \frac{q}{m} (E_2 + v_3 B_1 - v_1 B_3) \\ v_3' = \frac{q}{m} (E_3 + v_1 B_2 - v_2 B_1) \end{cases}$$

(1) מערכות קואורדינטות קלאסיות:
 v_1, v_2, v_3

$$my'' = -ky$$



$$my'' = mg - ky - \mu y'$$

(2)

2 - 1"3N

$$y'' = (y')' = y_2'$$

$$y_2 = y'$$

$$y_1 = y \quad \text{no}$$

$$y_2' = g - \frac{k}{m}y_1 - \frac{\mu}{m}y_2$$

$$\Leftrightarrow my_2' = mg - ky_1 - \mu y_2$$

המרחב:

מרחב המרחב המרחב מרחב

$$\begin{cases} y_1' = 0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 \\ y_2' = -\frac{k}{m} \cdot y_1 - \frac{\mu}{m} \cdot y_2 + g \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

המרחב המרחב:

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} \Leftrightarrow y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{r}{m} \end{pmatrix} \quad / \text{ מס }$$

$$\boxed{y' = Ay + b}$$

$$b := \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

$$y' = f(x, y)$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

הערות צורה נורמלית כוללת למערכת n משוואות דיפרנציאליות:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

משוואות דיפרנציאליות עם מקדמים קבועים

(*) משוואה ליניארית $y' = Ay + b(x)$

(**) משוואה הומוגנית $y' = Ay$

"משוואה" = מדרגה 1
עם n פונקציות וגזרים

משפט הפרקיות הכללי: (*) $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

כאשר $y_h(x)$ הפרקיות הכללי: (**)

$y_p(x)$ פרקיות פרטית: (*)

מקרה n

$$y' = Ay$$

$$y(x) = e^{Ax} C$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

n=1

$$y' = ay$$

$$y(x) = ce^{ax}$$

a קבוע

לפט $y' = Ay$ נניח $u(x), v(x)$ פתרונות

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $c_1 u(x) + c_2 v(x)$ גם פתרון

$$(c_1 u + c_2 v)' = A(c_1 u + c_2 v) \quad \text{פירוק: 3}$$

$$(c_1 u + c_2 v)' = (c_1 u)' + (c_2 v)' = c_1 u' + c_2 v' =$$

$$= c_1 A u + c_2 A v = A c_1 u + A c_2 v = A(c_1 u + c_2 v)$$

$$(c_1 u + c_2 v)' = A(c_1 u + c_2 v) \quad \text{מסקנה:}$$

לפט

בן פתרונות $y' = Ay$ נבנויים

נכתוב וקטור S .

לפט $\dim S = n$ S - S יש בסיס בן n וקטורים

$$u' = Au \quad \Leftarrow \text{פתרון } u$$

$$v' = Av \quad \Leftarrow \text{פתרון } v$$

$$A(B+C) = AB + AC \Leftarrow \text{לפי } A, B, C$$

$\lambda_k(x)$ פונקציה

בסיס $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$

$\lambda_k(x)$ פונקציה עבור $1 \leq k \leq n$

כל פונקציה $f(x)$ יכולה להיכתב כ-

כמקורם עמודים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ נותן להם מערכת $n \times n$ פונקציות:

מערכת פונקציות $n \times n$

$$\Psi(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x))$$

המערכת ה'סל' $y' = Ay + b(x)$

(1) כל פונקציה $\lambda(x)$ צריכה להיכתב כסכום פונקציות בעלות הערכים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ במערכת A

ואם הפונקציות נבחרו נכון

$u_1, \dots, u_n$

$$A u_1 = \lambda_1 u_1$$

$$A u_2 = \lambda_2 u_2$$

$$\psi(x) = (e^{\lambda_1 x} u_1, e^{\lambda_2 x} u_2, \dots, e^{\lambda_n x} u_n) \quad -5/0$$

$$y(x) = c_1 \lambda_1(x) + c_2 \lambda_2(x) + \dots + c_n \lambda_n(x)$$

$$= \sum_{k=1}^n c_k \lambda_k(x)$$

$$: y' = A y \quad \text{הערות} \quad \int \int \int \quad (2)$$

כך נקרא $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$y(x) = \psi(x) C$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\psi(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x))$$

ע"י המטריצה $\psi(x)$, ניתן לרשום את הפתרון הכללי של המשוואה $y' = A y$
(= הפתרון הכללי)

כ"ס ז"ל ו"ל

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

המטרה היא למצוא:

$$\det A = 12 \quad \text{tr}(A) = 7 \Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4$$

ר"ר 1 ו 2

כ"ס $n=2$ ו"ל ו"ל

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

(1) ו"ל

ר"ר λ

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

(2) ו"ל

$$Au = \lambda u$$

ו"ל u

$$(5-\lambda)(2-\lambda) - 1 \cdot (-2) = \lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

$$\lambda_1 = 3$$

$$u_1 = ?$$

$$Au_1 = 3u_1$$

$$(A - 3I)u_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 5-3 & 1 \\ -2 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2\alpha + \beta = 0$$

ו"ל ו"ל 2 ו 3

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \cdot \text{כל } \alpha, \beta \text{ שונים, כל } \alpha, \beta \text{ שונים}$$

ו"ל

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = -2, \quad \alpha = 1, \quad \text{3'22}$$

$$\underline{\lambda_2 = 4 \quad u_2 = ?}$$

$$(A - 4I) u_2 = 0$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 5-4 & 1 \\ -2 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha + \beta = 0$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$s_1(x) = e^{\lambda_1 x} u_1 = e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ -2e^{3x} \end{pmatrix}$$

$$s_2(x) = e^{\lambda_2 x} u_2 = e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4x} \\ -e^{4x} \end{pmatrix}$$

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} & e^{4x} \\ -2e^{3x} & -e^{4x} \end{pmatrix}$$

105

$$\psi(x) \quad \underline{3 \text{ a } 5e}$$

$$\psi(x) = (s_1(x), s_2(x))$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = 3 \pm 2i$$

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2 \\ y_2' = 5y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 3 + 2i$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 3 - 2i$$

$$u_2 = \overline{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$$

$u = u_1$, $\lambda = \lambda_1$ - נבחר פתרון בפורמט

$$y_1(x), y_2(x) = ?$$

$$e^{\lambda x} u = e^{(3+2i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$$

תכלול
המשקל

$$= e^{3x} e^{2ix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$$

Euler's formula

$$= e^{3x} (\cos(2x) + i \sin(2x))$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} =$$

$$\lambda = 3 + 2i$$

נבחר פתרון

כל אחד מהגורמים במונח $e^{\lambda x} u$ הוא פתרון של המערכת
לכן ניקח את החלק הריאלי והחלק הוירטואלי

$$y_1(x) = \operatorname{Re}(e^{\lambda x} u), \quad y_2(x) = \operatorname{Im}(e^{\lambda x} u)$$

$$= e^{3x} \begin{pmatrix} \cos(2x) + i \sin(2x) \\ (\cos(2x) + i \sin(2x))(2-i) \end{pmatrix} = e^{3x} \begin{pmatrix} \underline{\cos(2x)} + i \underline{\sin(2x)} \\ \underline{(2\cos(2x) + \sin(2x))} + i \underline{(-\cos(2x) + 2\sin(2x))} \end{pmatrix}$$

$$s_1(x) = \operatorname{Re}(e^{1x} u) = \begin{pmatrix} e^{3x} \cos(2x) \\ e^{3x} [2\cos(2x) + \sin(2x)] \end{pmatrix} / \circledast$$

$$s_2(x) = \operatorname{Im}(e^{1x} u) = \begin{pmatrix} e^{3x} \sin(2x) \\ e^{3x} [2\sin(2x) - \cos(2x)] \end{pmatrix}$$

החלק הממשי —
החלק המדומה —

$$\psi(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x))$$

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} \cos(2x) & e^{3x} \sin(2x) \\ e^{3x} [2 \cos(2x) + \sin(2x)] & e^{3x} [2 \sin(2x) - \cos(2x)] \end{pmatrix}$$

כ"ל / גדל ממש!

משוואה דיפרנציאלית

$$y' = Ay + b(x)$$

$b(x)$ פונקציה של x

מה קורה במקרה של A גיוגר?

43 גילוי $n=1 \Rightarrow y = y_h + y_p$

$$y_h = ce^{ax}$$

$$y_p = c(x)e^{ax}$$

(מספר קבוע) $p(x) = -a$
 $q(x) = b(x)$

$$y' = ay + b(x)$$

$$c'e^{ax} + cae^{ax} = ace^{ax} + b(x)$$

$$c' = e^{-ax} b(x) \quad c(x) = \int e^{-ax} b(x) dx \Rightarrow y_p(x) = e^{ax} \int e^{-ax} b(x) dx$$

$$y = y_h + y_p = ce^{ax} + e^{ax} \int e^{-ax} b(x) dx$$
$$y(x) = e^{ax} \left(\underbrace{\int e^{-ax} b(x) dx}_{y_h} + \underbrace{c}_{y_p} \right)$$

וזהו

סוף

$$y(x) = e^{ax} \int e^{-ax} b(x) dx$$

ל"ס

$$\psi(x) \leftarrow e^{ax} \quad \text{; כל } n \text{ , } n \geq 1$$

$$y' = Ay + b(x)$$

בעזרת הפתרון הכללי של המשוואה

$$y(x) = \psi(x) \int \psi^{-1}(x) b(x) dx$$

מל"ס : נוסחה

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y' = Ay + b(x)$$

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 + y_2 + e^x \\ y_2' = -2y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

מטרה 2x2
מטרה 2x2

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} & e^{4x} \\ -2e^{3x} & -e^{4x} \end{pmatrix}$$

(112 'nr) 217 1/63 N

$$\Psi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \Psi^{-1} = \frac{1}{\det \Psi} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$Y Y^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \psi(x) = e^{3x}(-e^{4x}) - e^{4x}(-2e^{3x}) = -e^{7x} + 2e^{7x} = e^{7x}$$

$$Y^{-1} = \frac{1}{e^{7x}} \begin{pmatrix} -e^{4x} & -e^{4x} \\ 2e^{3x} & e^{3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-3x} & -e^{-3x} \\ 2e^{-4x} & e^{-4x} \end{pmatrix}$$

∴ ∫ dx / x² = -1/x

$$y(x) = \Psi(x) \int \Psi^{-1}(x) b(x) dx = \begin{pmatrix} e^{3x} & e^{4x} \\ -2e^{3x} & -e^{4x} \end{pmatrix} \int \underbrace{\begin{pmatrix} -e^{-3x} & -e^{-3x} \\ 2e^{-4x} & e^{-4x} \end{pmatrix}}_{2 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}}_{2 \times 1} dx =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{3x} & e^{4x} \\ -2e^{3x} & -e^{4x} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} -e^{-3x} e^x \\ 2e^{-4x} e^x \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} e^{3x} & e^{4x} \\ -2e^{3x} & -e^{4x} \end{pmatrix} \int \underbrace{\begin{pmatrix} -e^{-2x} \\ 2e^{-3x} \end{pmatrix}}_{2 \times 1} dx =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{3x} & e^{4x} \\ -2e^{3x} & -e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int (-e^{-2x}) dx \\ \int 2e^{-3x} dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3x} & e^{4x} \\ -2e^{3x} & -e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-2x} + C_1 \\ -\frac{2}{3} e^{-3x} + C_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{5x} + c_1e^{3x} - \frac{2}{3}e^x + c_2e^{4x} \\ -e^{5x} - 2c_1e^{3x} + \frac{2}{3}e^x - c_2e^{4x} \end{pmatrix}$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

תשובה:

$$\begin{cases} y_1(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{4x} + \frac{1}{2}e^{5x} - \frac{2}{3}e^x \\ y_2(x) = -2c_1e^{3x} - c_2e^{4x} + \frac{2}{3}e^x - e^{5x} \end{cases}$$

תשובה:

מכאן a

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \frac{a^0}{0!} + \frac{a^1}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots = \frac{1}{1} + a + \frac{a^2}{2} + \dots$$

לכן A

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = \frac{1}{0!} A^0 + \frac{1}{1!} A^1 + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots = I + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{6} A^3 + \dots$$

$$0! = 1$$

$$A^0 = ?$$

$$A^0 A^k = A^{0+k} = A^k \quad ; \text{אם } k \geq 0 \text{ אז } A^0 \text{ חייב להיות } I$$

$$(A^0 A^k = A^k) \Rightarrow$$

$$לכן $A^0$$$

$$A^0 A^k = A^k$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$לכן $A^0 = I$$$

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad e^{\mathcal{D}x} = \begin{pmatrix} e^{0x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{0x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6} + \dots$$

$$e^0 = 1 + 0 + \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{6} + \dots = 1$$

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$$

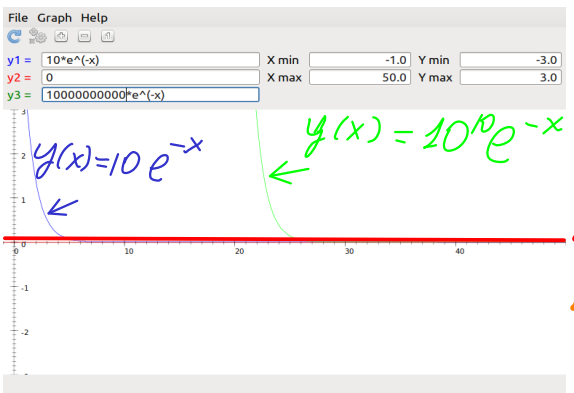
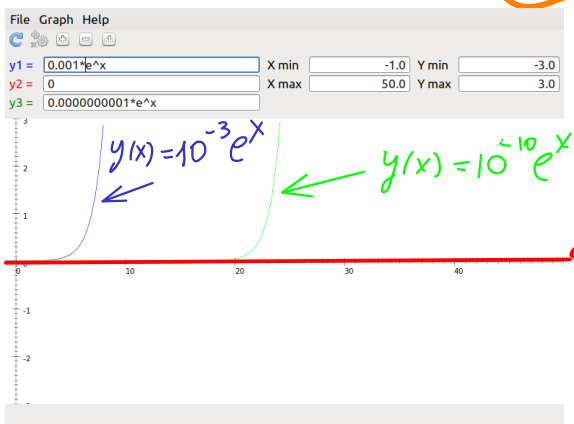
for $n \geq 1$

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}$$

ד.

על יציבות של פתרון אבדי הייתה

א' כעכז תשפ"א



הפרייה הפכא: $y(x) = y_0 e^x$

הפרייה הפכא: $y(x) = y_0 e^{-x}$

מה הוא של הפרייה הפכא? בגא' היוגא? $y(0) = y_0$?

1
$$\begin{cases} y' - y = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

למה זה תשובה ?

סיבה 1 "בח"ם" של y_0 מקב עם כווצא של נסויים, ונ' שטאל. א' אכש ל דעם של y_0 מצינ.

סיבה 2 כשמשנים בשיא נורמיו כמו שיא Euler, באב נסכ מ מוגמם של היוצאא על אב $m-1$, זנגוצאא אינן מציא"קונ

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$a > 0$

הפגיון הפסל: $y(x) = y_0 e^{ax}$

הפגיון הטריוטל $y(x) \equiv 0$ "לול" יכל
עגור כל y_0

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y_0 e^{ax}) \neq 0$$

" $y(x) \equiv 0$ לא חקכר ל

$n = 1$
הפ. הטריוטל הול פגיון לבד
ההמלכ
 $\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = 0 \end{cases}$

לול $y(x)$ שול פגיון הטריוטל
 $\lim_{x \rightarrow \infty} y_0 e^{ax} = 0$ $\Leftarrow$ עגור כל y_0 : $a < 0$


```
File Edit View Search Terminal Help
>stap@stap-desktop:~$ maxima

maxima 5.43.2 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.12
distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) plotdf(-y,[x,-.1,10],[y,-10,10]);
(%o1) /tmp/maxout5905.xmaxima
(%i2) █
```

$$y' = -y$$

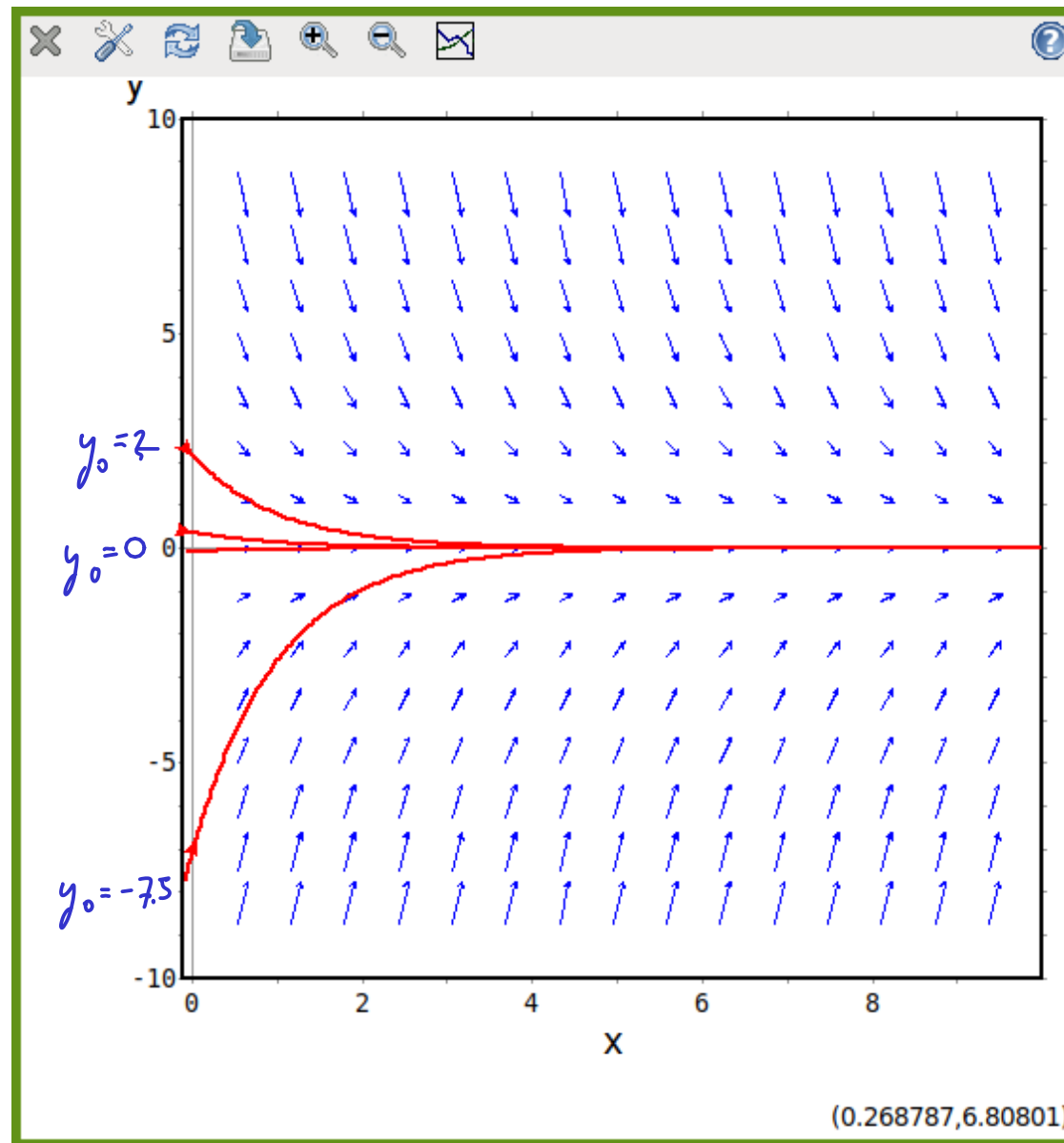
יציב הפתרון יורד מהעקף

$$a = -1 < 0$$

$$\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$



```
File Edit View Search Terminal Help
ostap@ostap-desktop:~$ maxima

Maxima 5.43.2 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.12
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) plotdf(-y,[x,-.1,10],[y,-10,10]);
(%o1) /tmp/maxout5905.xmaxima
(%i2) plotdf(y,[x,-.1,10],[y,-10,10]);
(%o2) /tmp/maxout5905.xmaxima
(%i3)
```

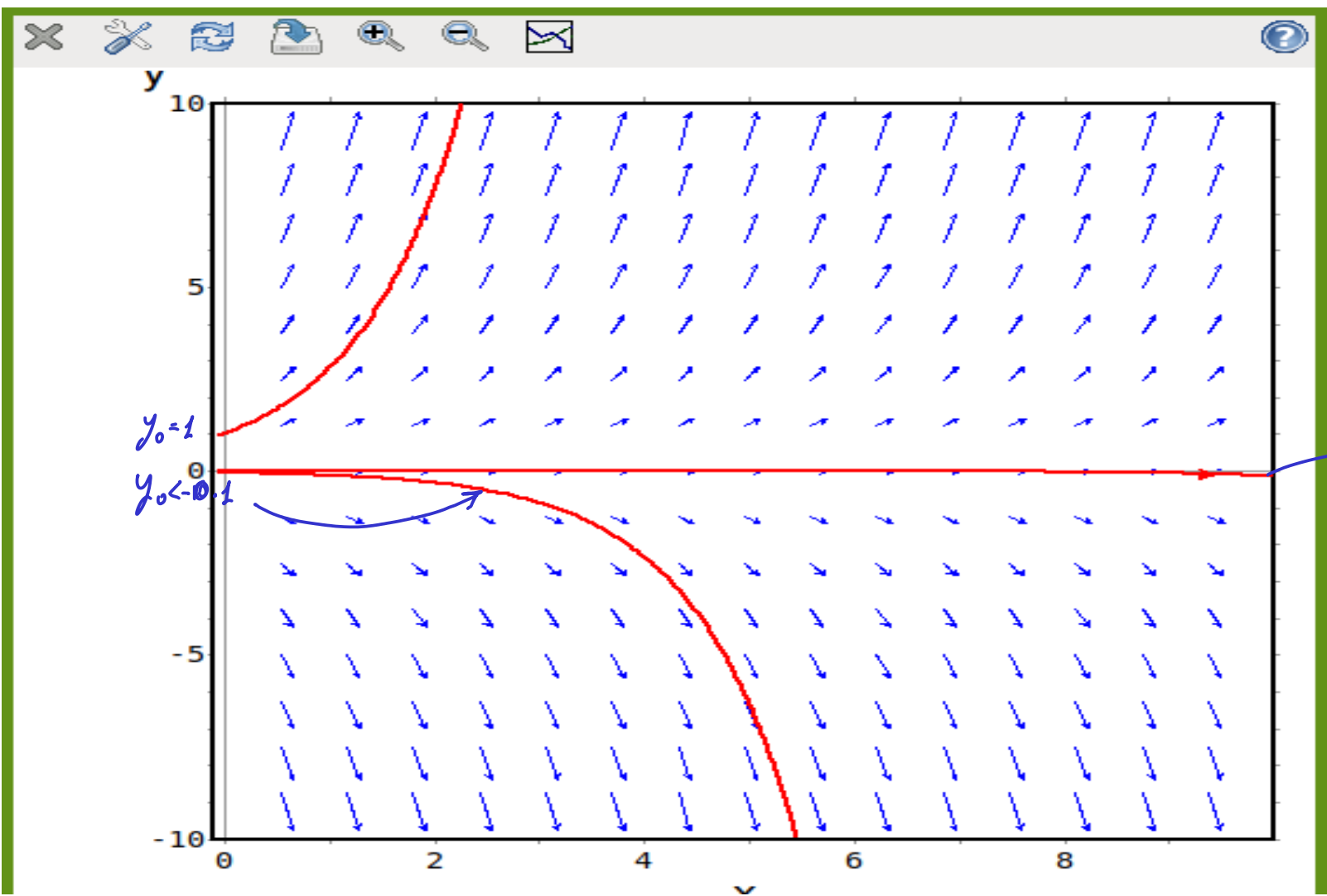
$y' = y$

ערכי יציבה של המערכת

$a = 1 > 0$

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$



```
File Edit View Search Terminal Help
ystap@ostap-desktop:~$ maxima

Maxima 5.43.2 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.12
distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) plotfd(y^2-1,[x,-.01,10],[y,-10,10])
;

Incorrect syntax: Missing )
;

(%i1) plotfd(y^2-1,[x,-.01,10],[y,-10,10]);
2
(%o1) plotfd(y - 1, [x, - 0.01, 10], [y, - 10, 10])
(%i2) plotfd(y^2-1,[x,-.01,10],[y,-10,10]);
2
(%o2) plotfd(y - 1, [x, - 0.01, 10], [y, - 10, 10])
(%i3) plotfd(y^2-1,[x,-.01,10],[y,-10,10]);
(%o3) /tmp/maxout6433.xmaxima
(%i4) █
```

$$y' = ay$$

$$y' = y^2 - 1$$

$$y' = f(x, y)$$

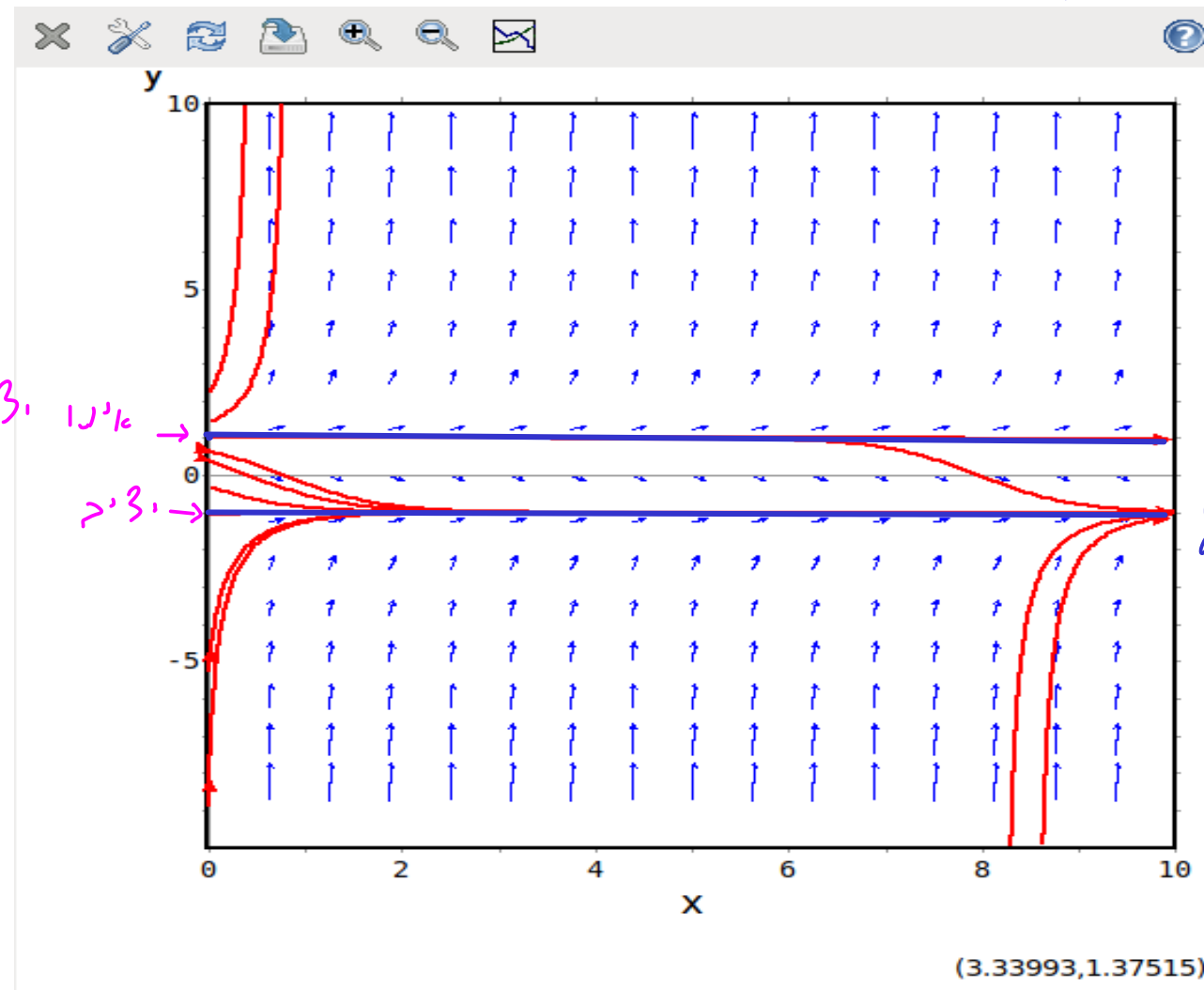
$$y' = y^2 - 1$$

4

$$y' = y^2 - 1 \rightarrow y(x) \equiv 1$$

$$y' = y^2 - 1 \rightarrow y(x) \equiv -1$$

2 גרונות עיוניות:



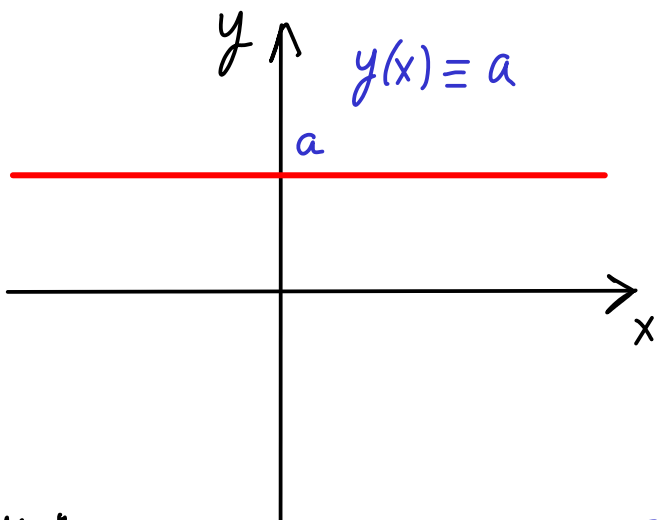
2.3, 1.37515 →

2.3, →

$y(x) \equiv 1$

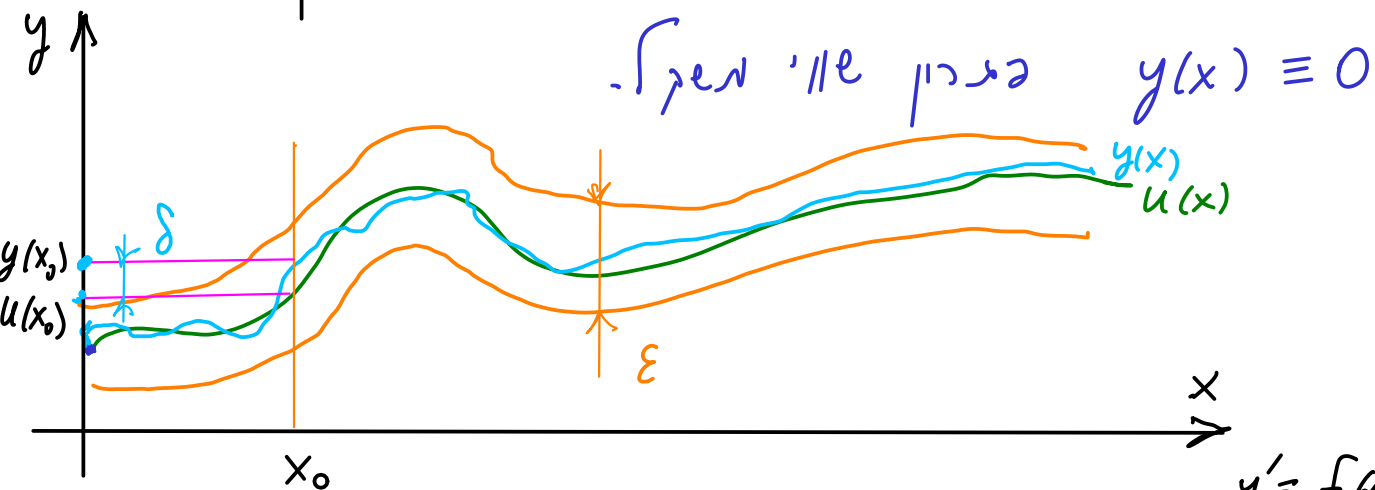
$y(x) \equiv -1$

(3.33993, 1.37515)



משוואה אוטונומית $y' = h(y)$ (ק)

נניח $h(a) = 0$, a/s הפונקציה הקבועה $y(x) \equiv a$ בגבול.
בגבול כזה נקרא בגבול שלילי משקל.



דגור $y' = Ay$ משוואה (מחזורית) לנייח, 4

פתרון $u(x)$ של $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יציב כאשר $x \rightarrow \infty$
 לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$: לכל פתרון $y(x)$ של המשוואה $y' = f(x, y)$

$$x > x_0 \implies |y(x) - u(x)| < \varepsilon \iff |y(x_0) - u(x_0)| < \delta$$

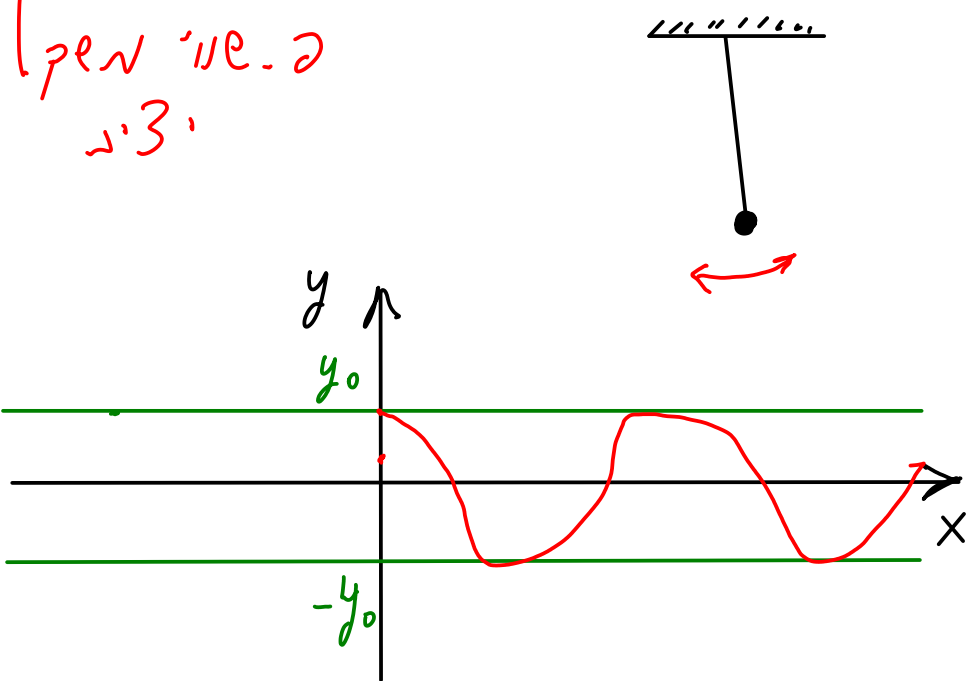
פגרון שוו' נשקל $y(x) \equiv a$ יציב אס'מט'ר' אס'מט'ר' $y(0) = 0$ יציב $y(0) = 0$ יציב

$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = a \iff |u(x) - a| < \delta$

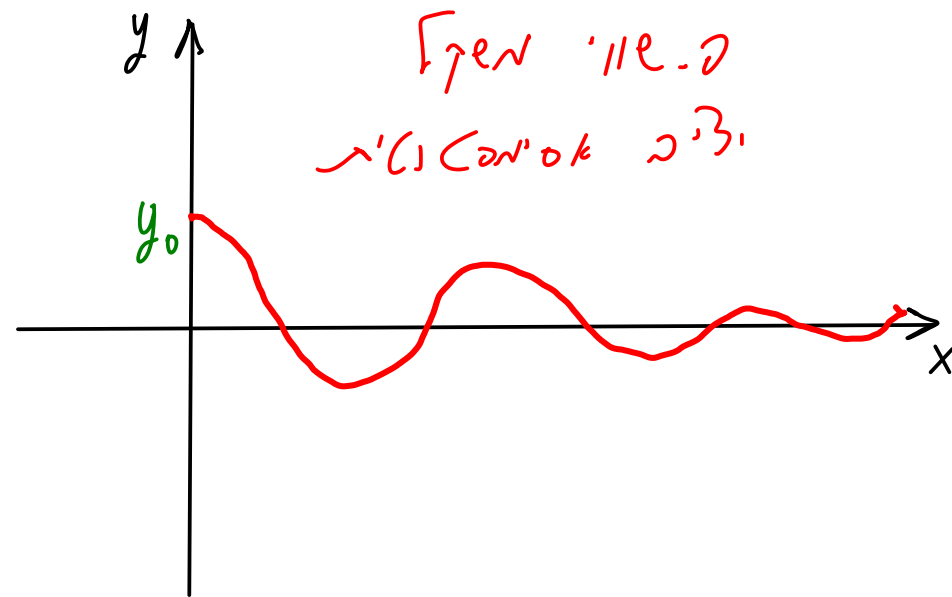
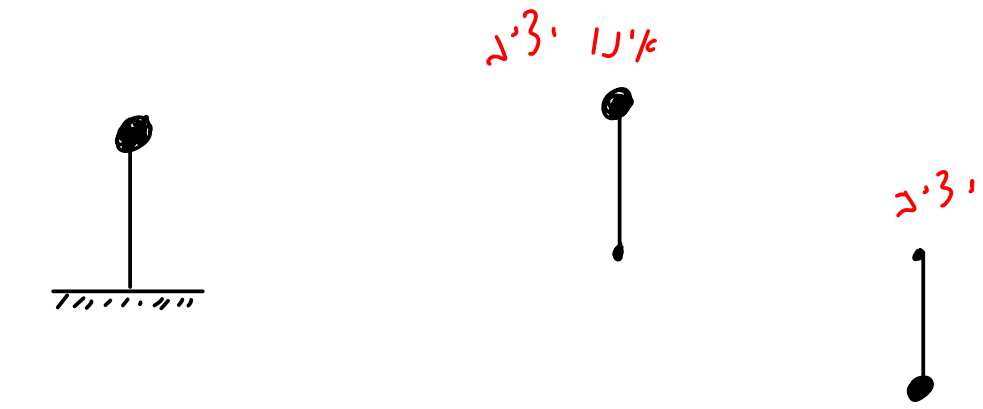
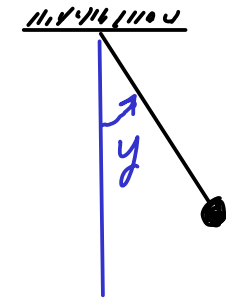
ק"מ $\delta > 0$ לכל פגרון אס'מט'ר' $u(x)$ נכנסת לכל δ חסר

$y'' = \sin(y) \approx y$
 $y'' = y$ ליניאריזציה:

פגרון שוו' נשקל יציב



פגרון שוו' נשקל $y(0) = 0$



פגרון שוו' נשקל יציב אס'מט'ר' אס'מט'ר' $y(0) = 0$ יציב

נכנסת לכל δ חסר

$y'' = y - ky' \quad (k > 0)$

נניח $f(x, 0) = 0$
 $y' = f(x, y)$ משוואה דיפרנציאלית
 : f עקבית, y עקבית

$$u(x) \equiv 0$$

הפניקס של $u(x)$: $\exists \delta > 0$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ (ולכל x_0 קיים $\delta > 0$:
 $x > x_0$ כן $|y(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow |y(x_0)| < \delta$

$$|y(x) - u(x)| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |y(x_0) - u(x_0)| < \delta$$

"משוואה" N ערכה N משוואות

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

$n=1$ $\leftarrow$ משוואה אחת

$n=2$ $\leftarrow$

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} \quad u(x) \equiv 0 \text{ עקבית} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} f_1(x, 0, 0) \equiv 0 \\ f_2(x, 0, 0) \equiv 0 \end{matrix} \text{ נכ}$$

$u_1(x) \equiv 0 \quad u_2(x) \equiv 0$

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

$$y' = A(x)y + b(x) \text{ על פתרון}$$

$$y' = A(x)y + b(x) \quad (*)$$

המשוואה הומוגנית במשתנה

$$y' = A(x)y \quad (**)$$

Leven כל פתרון של (*) יציב $\Leftrightarrow$ הפונקציות של (**) יציב.

$$f(x, 0) = 0$$

$$f(x, y) = A(x)y \quad \text{בנקודה שנו:}$$

$$f(x, 0) = 0 \quad \text{הגשמי מנקודות}$$

לכן (**) במידה שפיתרון אריותלי.

משפט נניח f - (*) יש פגיון יציב.

אז' כל פגיון של (*) יציב.

הוכחה מסקנה מ"ציג של המשפט הקודם.

מ.ע.ל.

יציבות אסימפטוטית

פתיחון $u(x)$ דבר'ר גומל'ה $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$ יציב אסימפטוטית (כ.ל.ר $x \rightarrow \infty$) אם $u(x)$ יציב (א)

ק"מ $\delta > 0$: עבור כל פתרון $y(x)$ של $y' = f(x, y)$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - u(x)) = 0 \iff |y(x_0) - u(x_0)| < \delta$ (ב)

לענין $u(x)$ פתרון לבד'ר גומל'ה $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

אם $u(x)$ יציב (יציב אסימפטוטית) $\iff$ יציב (יציב אסימפטוטית) הפתרון הארימונאלי

$$z' = f(x, u(x) + z) - f(x, u(x))$$

כ.ל.ר z עומד צ'ר נחלם חזל'ה : $z := y - u(x)$

לשם קביעת $(*)$ יציג ϵ -סכמת נא' $\Rightarrow$ יבגין בריבוי $(**)$ יציג ϵ -סכמת נא'.

$$y' = A(x)y + b(x) \quad (*)$$

$$y' = A(x)y \quad (**)$$

$\delta > 0$ $\rho'' \rho$ ρ $\rightarrow' C1C2N'O'K$ ~ 3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = y_0$$

open $\begin{cases} y' = h(y) \\ y(x_0) = u_0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y' = h(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{pen me } y(x)$$

$$\delta \text{ כל } u_0 : \|u_0 - y_0\| < \delta \quad \text{הפונקציה } \text{כבר ידועה}$$

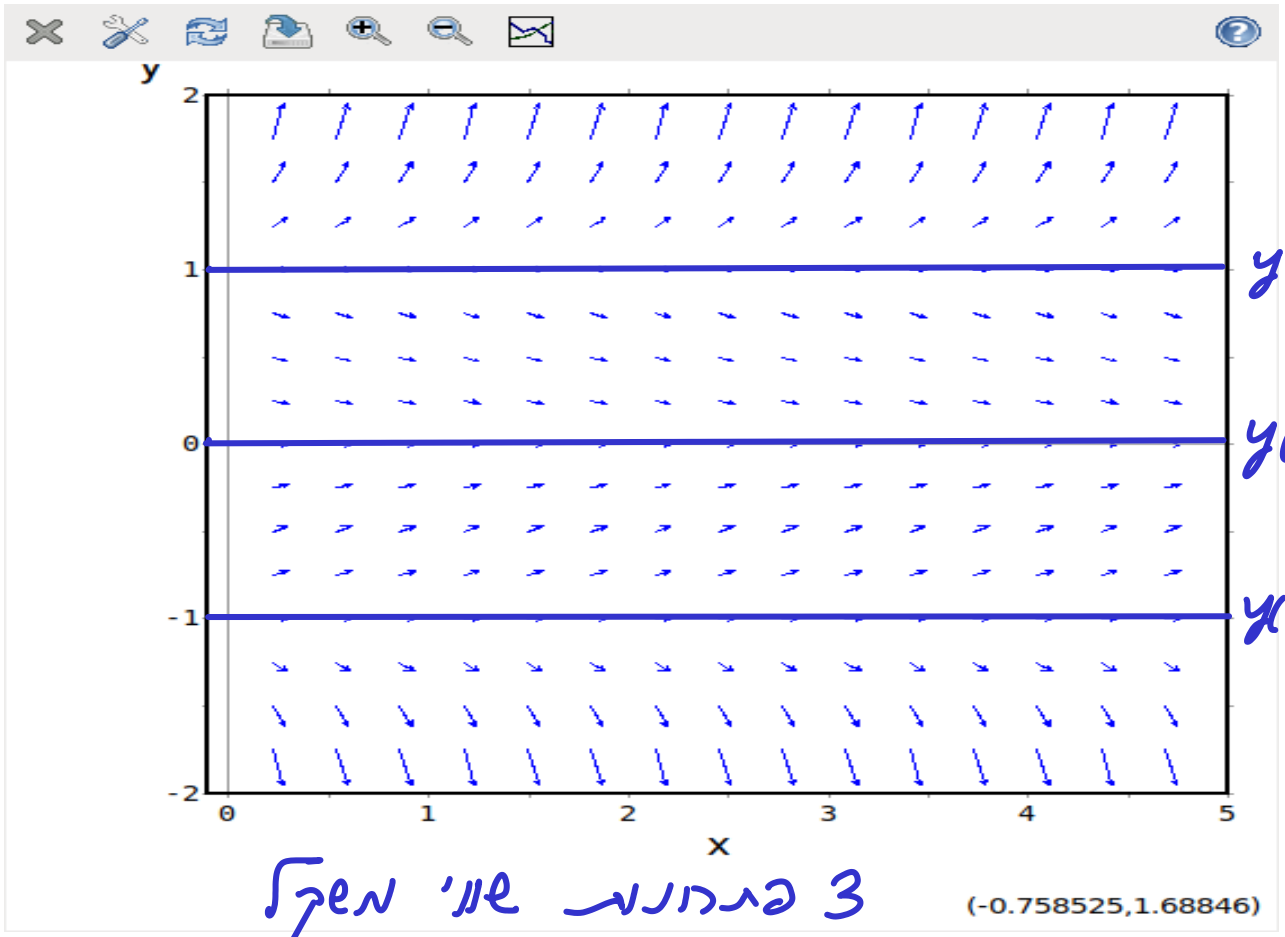
$y(x) \equiv 0$
 $y(x) \equiv 1$
 $y(x) \equiv -1$

$$y' = y^3 - y$$

$$h(y) = y^3 - y$$

$$y = 0, \pm 1$$

$$\Leftarrow h(y) = 0$$



$y(x) \equiv 0$

$y(x) \equiv 1$
 $y(x) \equiv -1$

הסגור:

$$y' = y(y-1)(y+1)$$

$$\int \frac{dy}{y(y-1)(y+1)} = \int dx$$

הפרשון $y(x) \equiv 0$, יציב

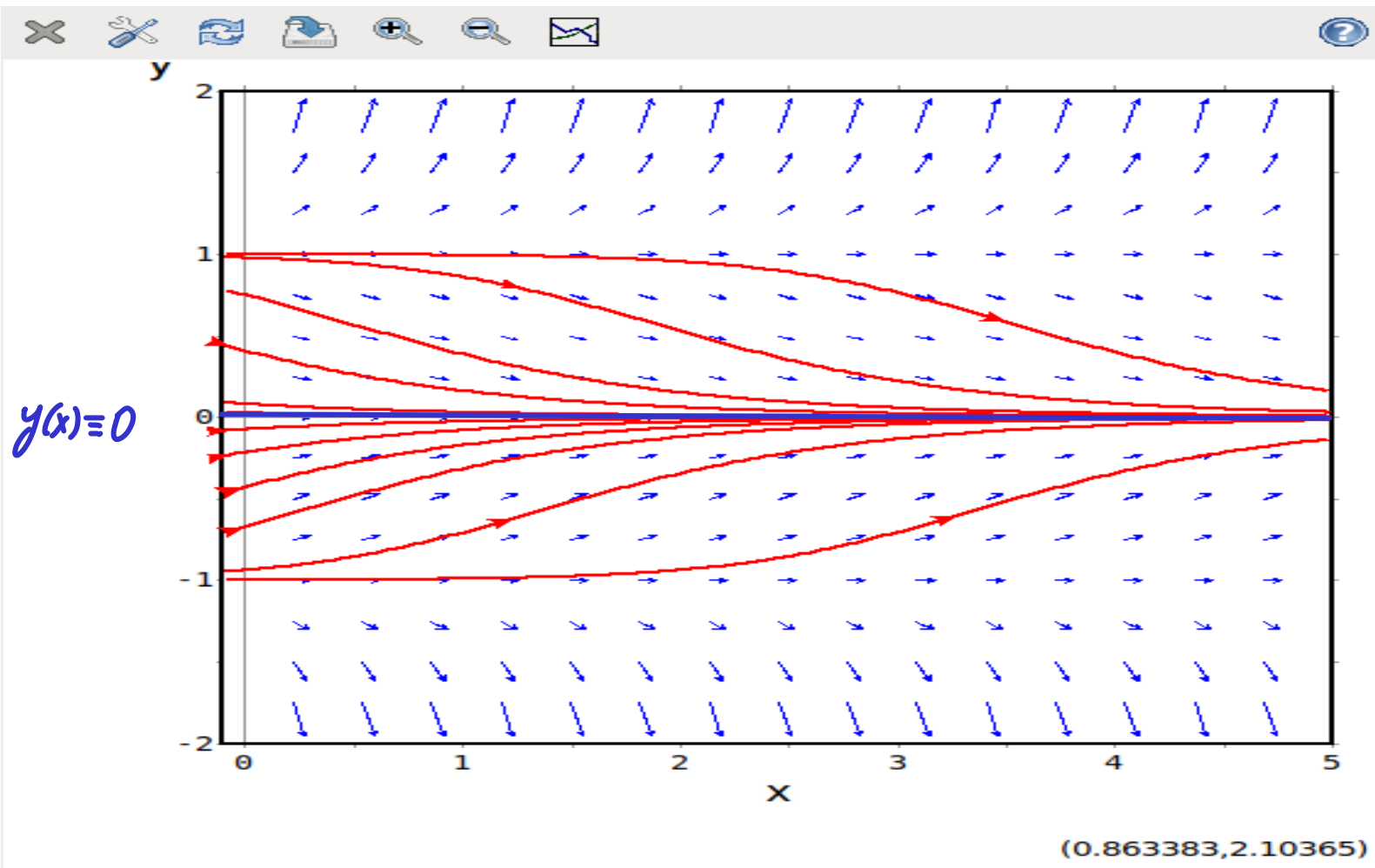
כל הפרשון $y(x)$ לכדי גיחה

$$\begin{cases} y' = y^3 - y \\ y(x) = y_0 \end{cases}$$

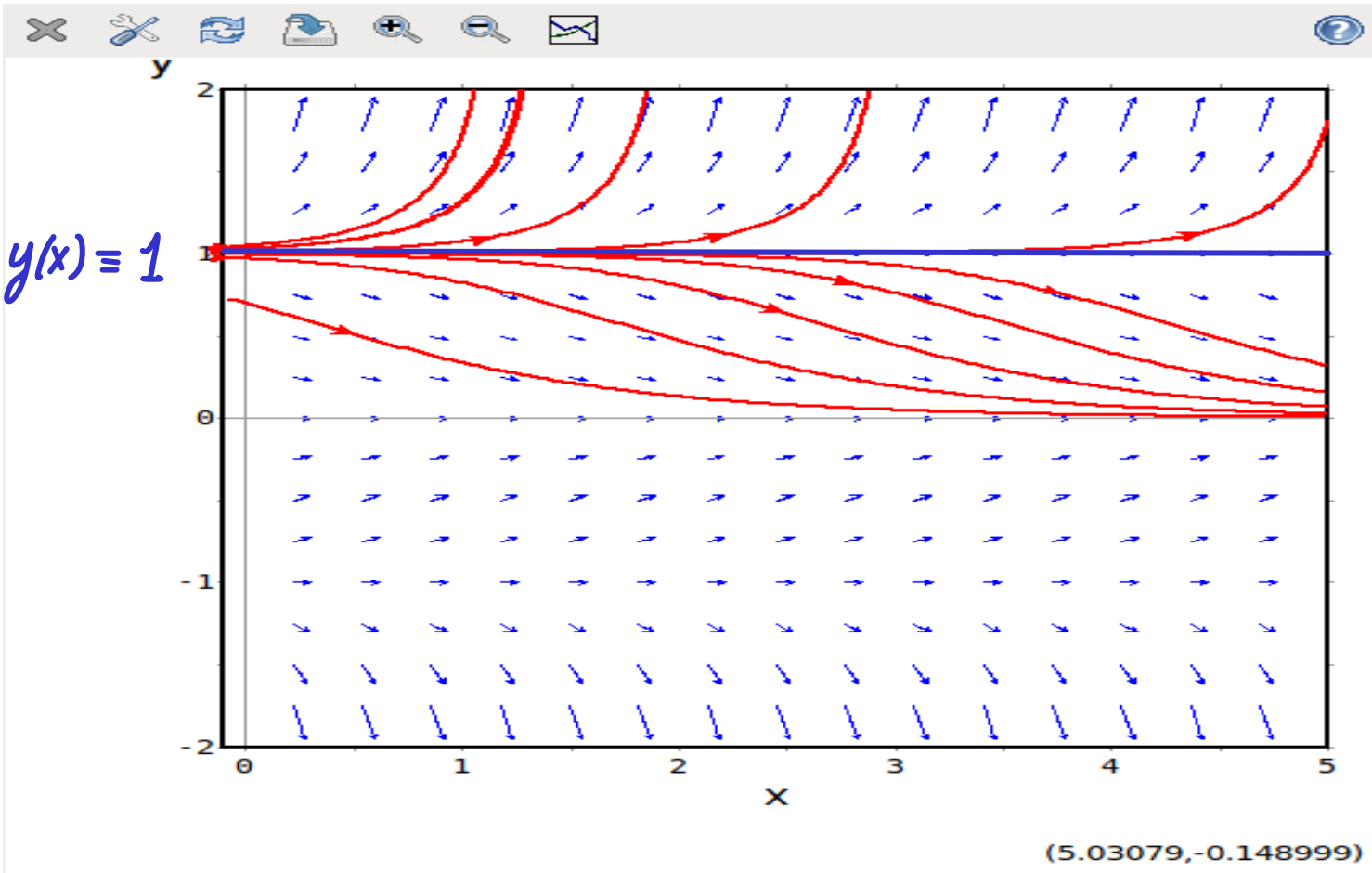
עבור $-1 < y_0 < 1$ מתקיי $y(x) \equiv 0$

כאשר $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$$



הפטרון $y(x) \equiv 1$ / 3 יב



כל הפטרון $y(x)$ לבדיו גיגחלה

$$\begin{cases} y' = y^3 - y \\ y(x) = y_0 \end{cases}$$

עבור $y_0 > 1$ $y(x)$ מתרחקת מ-1

כאשר $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \infty \neq 1$$

עבור $0 < y_0 < 1$ $y(x)$ גש מתרחקת מ-1:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0 \neq 1$$

באופן דומה, הפטרון $y(x) \equiv -1$ אינו יציב

הפגיון האנליטי של נוסף גורם:

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} + \frac{C}{y+1} = \frac{A(y^2-1) + B(y^2+y) + C(y^2-y)}{y^3-y}$$

$$\begin{array}{l|l} y^2 & A+B+C=0 \\ y & B=C \\ 1 & -A=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} A=-1 \\ 2B=1 \\ B=C=\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y} =$$

$$= \frac{y^2+y+y^2-y-2(y^2-1)}{2(y^2-1)y} = \frac{\cancel{2y^2}-\cancel{2y^2}+2}{2(y^2-1)y} = \frac{1}{y^3-y}$$

ר' 3
 $y(x) \equiv 0$
 $y(x) \equiv 1$
 $y(x) \equiv -1$
 נוסף גורם

$$\int \frac{dy}{y^3-y} = \frac{1}{2} \ln |y-1| + \frac{1}{2} \ln |y+1| - \ln |y| = x + C$$

$$\ln \left| \frac{y^2-1}{y^2} \right| = 2x + C$$

נכנס ל $y(x) \equiv 0$

$$1 - \frac{1}{y^2} = Ce^{2x}$$

$$\frac{1}{y^2} = 1 - Ce^{2x}$$

$\forall C$

$$y^2 = 1 - ce^{2x}$$

$$y^2 = \frac{1}{1 - ce^{2x}}$$

$$\left[\begin{array}{l} y = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - ce^{2x}}} \\ y(x) \equiv 0 \\ y'(x) \equiv \pm 1 \end{array} \right.$$

קטע אנטימטר כחול האם בגרונות
שימוי משקל יציבים.

מה אפשר?

דגשורה: צדיק אפשר "אינטרזציה"

$n=1$ Γ n $n=1$

$$y(x) = ce^{ax}$$

$$u(x) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow a > 0$$

$$u(x) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow a < 0$$

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(x_0) = 0 \end{cases} \quad u(x) \equiv 0$$

$$y' = ay \quad a \text{ constant}$$

$$y' = Ay \quad \lambda = \mu + i\omega$$

$$e^{\lambda x} = e^{(\mu + i\omega)x} = e^{\mu x} e^{i\omega x} = e^{\mu x} (\cos(\omega x) + i \sin(\omega x))$$

$Re(\lambda)$ μ ω

$$y(x) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow A \text{ } \lambda \text{ } Re(\lambda) < 0$$

μ ω

μ ω λ μ ω

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\mu x} = \infty$$

$$\Leftrightarrow \mu > 0$$

$$|e^{\lambda x}| = 1$$

$$\Leftrightarrow \mu = 0$$

$$\mu = Re(\lambda)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\mu x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu < 0$$

$$|e^{\lambda x}| = e^{\mu x} |\cos(\omega x) + i \sin(\omega x)| = e^{\mu x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |e^{\lambda x}| = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\mu x}$$

$y' = Ay$ ממשותפת ויש לה פתרון ייחודי לכל y_0 וכל t_0

$$h = 2$$

$$y' = h(y)$$

$$y(x) \equiv 0$$

לפי שני דברים

$$כאן פגדו' עיון' נלקט = הסברין ב' כיוון' י'$$

$$\gamma^* \gamma \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n$$

$n=4$ 2, -3, -3, 8

$\sigma'_{1/2} = 2,8$

$$2 \quad 12 \quad -3 \quad -5$$

$$\sim \{1, 0, -3, -3, -2\}$$

$$23' \text{ of } 0, -3, -3, 2$$

$$2, 3, \frac{1}{4}, 0, 0, -3, -3$$

על פני $\textcircled{1/c}$ אם $\text{Re}(\lambda_k) < 0$ עבור $k \leq n$ $\Leftrightarrow$ הפתרון הכללי ייחסי, צב $\% \text{ סימטריה}$.

• 'C(2N) d/c 23 k f — " — $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda_m) > 0 : \lambda_m$ d''p d/c 2

1- $\mathcal{N}$ $\int_{\mathbb{R}^2}$ ρ_{abs} γ, γ $\int_{\mathbb{R}^2}$ $\text{Re}(\lambda) \leq 0$ ρ_{abs} γ, γ $\int_{\mathbb{R}^2}$ ρ_{abs} $\textcircled{?}$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0$ מציגים $\int_0^\infty e^{\lambda t} dt$ 'צ' $\in \mathbb{C}$ ו N ו λ 'א.

2.3' 1/2 -1- $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda_k) = \operatorname{Re}(\lambda_e) = 0$ 2.5 2.7 2.8 (3)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

A is a 2x2 matrix

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 \end{cases}$$

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

n=2, so the characteristic polynomial is a quadratic

$$\text{tr}(A) = -1 - 1 = -2$$

$$\det(A) = (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) = 2$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - 2} = -1 \pm i$$

Since the real part of both eigenvalues is negative, the system is asymptotically stable.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(\lambda_1) = -1 < 0 \\ \text{Re}(\lambda_2) = -1 < 0 \end{cases}$$

2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$t_2(A) = 2$$

$$\det(A) = 2$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i$$

נצ' נר'ב

$$\begin{cases} y_1(x) \equiv 0 \\ y_2(x) \equiv 0 \end{cases}$$

$$\text{פרטנר} \Leftarrow \operatorname{Re}(\lambda_1) = 1 > 0$$

3

$$t_2(A) = 0 \quad \det(A) = 4$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -4y_1 \end{cases}$$

נצ' (100%)

נצ' נר'ב

$$\begin{cases} y_1(x) \equiv 0 \\ y_2(x) \equiv 0 \end{cases}$$

פרטנר

$$\Leftarrow \operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) = 0$$

: נר'ב 2 ע' פ'ו

יציגו אסימפּטוטה לפעולה שיווי משקל

של מערכות אקאנומיות או לניאריה

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$h(y) = \begin{pmatrix} h_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ h_n(y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

$$y' = h(y)$$

$h(y)$ בנקודה של משתנה 1 $n=1$

קירוב לניארי של $h(y)$ בקרן $y = y_0$ הוא $h'(y_0)$

הקרום הליניארי של $h(y)$ נגזרת $h'(y)$ של נגזרת $h'(y)$ יחידה.
בהצבה $y = y_0$ מקבלים $h'(y_0)$ מספיק.

נניח ונראה כי

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 22\sin(y_2) + y_1^2 - y_2^3 \\ y_2' = \sin(y_1) - 5y_2 + e^{y_1^2} - 1 \end{cases}$$

הפונקציה $y(x) \equiv y_0$

$\hat{=}$

$$h(y_0) = 0$$

הנקודה y_0

הפונקציה $y(x) \equiv y_0$

$$\begin{cases} h_1 \begin{cases} 3y_1 - 22\sin(y_2) + y_1^2 - y_2^3 = 0 \\ h_2 \begin{cases} \sin(y_1) - 5y_2 + e^{y_1^2} - 1 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{הפונקציה } y(x) \equiv y_0 \begin{cases} y_1(x) \equiv 0 \\ y_2(x) \equiv 0 \end{cases}$$

נקודה y_0 היא הנקודה y_0 , וזוהי הנקודה y_0 .

הנקודה y_0 היא הנקודה y_0 .

$$\frac{\partial h_1}{\partial y_1}(0,0) = 3 + 2y_1|_{y_1=0} = 3$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial y_1} = \cos y_1 + 2y_1 e^{y_1^2} \Big|_{y_1=0} = 1$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial y_2} = -22 \cos(y_2) - 3y_2^2 \Big|_{y_2=0} = -22$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial y_2}(0,0) = -5$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -22 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}(A) = -2$$

$$\det(A) = -15 + 22 = 7$$

: λ_1, λ_2 ג'ר נ/ר/ב/ר

$$\lambda^2 + 2\lambda + 7 = 0$$

נ/ר/ב/ר

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 7}}{2}$$

$$\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = -1 < 0$$

$$\text{נ/ר/ב/ר } \lambda_1, \lambda_2, \begin{cases} y_1(x) \equiv 0 \\ y_2(x) \equiv 0 \end{cases}$$

נ/ר/ב/ר: ה/ר/ב/ר

$$h(y_0) = 0$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$y' = h(y)$$

$$y(x) = y_0$$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 y_2 - 2 \\ y_2' = y_1 - 2 y_2 \end{cases}$$

(1) נמצא את פתרונות המערכת:

$$\begin{cases} y_1 y_2 - 2 = 0 \\ y_1 - 2 y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 y_2 = 2 \\ y_1 = 2 y_2 \end{cases}$$

$$2 y_2^2 = 2 \Rightarrow y_2^2 = 1 \Rightarrow y_2 = \pm 1 \Rightarrow y_1 = \pm 2$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} y_1(x) \equiv -2 \\ y_2(x) \equiv -1 \end{cases}$$

$$\textcircled{1/2} \begin{cases} y_1(x) \equiv 2 \\ y_2(x) \equiv 1 \end{cases}$$

ע' 2 פתרונות של המערכת:

$$\begin{pmatrix} y_2 & y_1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

נציג את הפתרונות:

$$A = \begin{pmatrix} y_2 & y_1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1(x) \equiv 2 \\ y_2(x) \equiv 1 \end{cases} \quad \underline{\text{לדוגמה}}$$

$$\lambda^2 + \lambda - 4 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2}$$

$$\text{למעשה } \lambda_1 > 0 \text{ ו- } \lambda_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} > 0$$

$$A = \begin{pmatrix} y_2 & y_1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1(x) \equiv -2 \\ y_2(x) \equiv -1 \end{cases} \quad \underline{\text{לדוגמה}}$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} < 0$$

$$\text{למעשה } \lambda_1 < 0 \text{ ו- } \lambda_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1(x) \equiv -2 \\ y_2(x) \equiv -1 \end{cases}$$

