

פתרונות לכמה תרגילי בית

בקורס 27-301 משוואות דיפרנציאליות רגילות למדעי המוח

ודים זאב אוסטפנקו

`ostap@math.biu.ac.il`

`http://vzostapenko.org/academia.html`

תשפ"ב

תוכן העניינים

• עבודת בית 1	-----	עמוד 4
• עבודת בית 2	-----	עמוד 13
• עבודת בית 3	-----	עמוד 16
• עבודת בית 4	-----	עמוד 33
• עבודת בית 5	-----	עמוד 47
• עבודת בית 6	-----	עמוד 58
• עבודת בית 7	-----	עמוד 62
• עבודת בית 8	-----	עמוד 74
• עבודת בית 9	-----	עמוד 91
• עבודת בית 10	-----	עמוד 128
• עבודת בית 11	-----	עמוד 142
• עבודת בית 21	-----	עמוד 160
• עבודת בית 13	-----	עמוד 164

עבודת בית 1

1. ע"י הצבה, בדוק שהפונקציה $y(x)$ היא פתרון של המשוואה הנתונה לכל ערך של הקבוע C :

$$3y - xy' = 0, y(x) = Cx^3 \quad (\text{א})$$

פתרון:

$$y = Cx^3$$

$$y' = 3Cx^2$$

$$xy' = 3Cx^3$$

$$xy' = 3y$$

$$3y - xy' = 0.$$

$$y'' + y = 0, y(x) = \sin x \quad (\text{ב})$$

פתרון:

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$y'' = -\sin x$$

$$(-\sin x) + \sin x \equiv 0$$

$$y'' + y = 0.$$

$$xy' + y = \cos x, y(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (\text{ג})$$

פתרון:

$$xy' + y = x \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)' + \frac{\sin x}{x} = x \cdot \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} + \frac{\sin x}{x} =$$

$$= \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x} + \frac{\sin x}{x} = \frac{x \cdot \cos x}{x} = \cos x.$$

$$.xy' + y = \cos x \quad \text{סיכום:}$$

$$y' + 2y = e^x, y(x) = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3} \quad (\text{т})$$

$$yy' = x - 2x^3, y(x) = x\sqrt{1 - x^2} \quad (\text{н})$$

$$y' = e^{x-y}, y(x) = \ln(C + e^x) \quad (\text{и})$$

$$y^2 - x^2 - 2xyy' = 0, x^2 + y^2 = 2Cx \quad (\text{с})$$

$$(1 - y^2)y' = x^2, x^3 + y^3 = 3y + C \quad (\text{н})$$

$$(x + y)^2 y' = 1, x + y = \tan y \quad (\text{ט})$$

פתרון: נגזור את שני האגפים של המשוואה $x + y = \tan y$:

$$(x + y)' = (\tan y)'$$

$$1 + y' = \frac{y'}{\cos^2 y}$$

$$\cos^2 y + (\cos^2 y) y' = y'$$

$$\cos^2 y = y' - (\cos^2 y) y'$$

$$\cos^2 y = (1 - \cos^2 y) y'$$

$$1 = (\tan^2 y) y'$$

נזכור כי $x + y = \tan y$, ז"א שאפשר להחליף את $\tan^2 y$ עם $(x + y)^2$:

$$(x + y)^2 y' = 1$$

2. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{x-4} \quad (\text{א})$$

פתרון: הצבה $t = x - 4$: $dt = dx$

$$\int \frac{dx}{3x+2} \quad (\text{ב})$$

$$\int \frac{1-x}{x} dx \quad (\text{ג})$$

$$\int \frac{x}{1-x} dx \quad (\text{ד})$$

$$\int \frac{2x-1}{3x+2} dx \quad (\text{ה})$$

פתרון:

$$\int \frac{2x-1}{3x+2} dx = 2 \int \frac{x}{3x+2} dx - \int \frac{1}{3x+2} dx = \frac{2}{3} \int \frac{3x}{3x+2} dx - \int \frac{1}{3x+2} dx$$

$$= \frac{2}{3} \left(\int \frac{3x+2}{3x+2} dx - \int \frac{2}{3x+2} dx \right) - \int \frac{1}{3x+2} dx$$

$$= \frac{2}{3} \int dx - \frac{7}{3} \int \frac{2}{3x+2} dx = \frac{2}{3}x - \frac{7}{9} \ln|3x+2| + C$$

$$\int \frac{dx}{3x^2+2} \quad (\text{ו})$$

פתרון: הצבה $t = \sqrt{\frac{3}{2}}x$

$$\int \frac{dx}{x^2+x} \quad (\text{ז})$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1} \quad (\text{ח})$$

פתרון: הצבה $t = x + 1$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} \quad (\text{ט})$$

$$\ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C. \quad \textbf{תשובה:}$$

פתרון: נשתמש בפיצול $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1},$$

לכן

$$\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-2| - \ln|x-1| + C$$

בעזרת התכונה האופיינית של לוגריתם, $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$, מקבלים את התשובה הסופית:

$$\ln|x-2| - \ln|x-1| + C = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 34} \quad (\text{י})$$

פתרון: לא ניתן לפצל את המכנה מכיון שהדיסקרימיננטה $36 - 4 \cdot 34$ היא מספר שלילי.

לכן צריך למצוא דרך אחרת. ראשית, ניתן לרשום

$$\text{אזי } x^2 + 6x + 34 = (x + 3)^2 + 5^2$$

$$\text{כאשר } \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 34} = \int \frac{dt}{t^2 + 5^2} = \frac{1}{5} \arctan \frac{t}{5} + C = \frac{1}{5} \arctan \frac{x+3}{5} + C$$

$$t = x + 3$$

$$\int \frac{1-x}{x^2} dx \quad (\text{יא})$$

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 1} \quad (\text{יב})$$

$$\text{פתרון: ההצבה } t = x^2 + 1, dt = 2x dx$$

$$\int \frac{x^3}{1+x^4} dx \quad (\text{יג})$$

$$\text{פתרון: הצבה } t = x^4$$

$$\int \frac{dx}{x \ln^3 x} \quad (\text{יד})$$

$$\text{פתרון: הצבה } t = \ln x$$

$$\int \frac{e^x}{2+e^x} dx \quad (\text{טו})$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} \quad (\text{טז})$$

פתרון:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x} = \left\| \begin{array}{l} u := \cos x \\ du = -\sin x dx \end{array} \right\| = - \int \frac{du}{u^2 - 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right|.$$

$$\int \cos^3 x \, dx \quad (\text{יז})$$

$$\int (5x + 4)^{14} \, dx \quad (\text{יח})$$

$$\int x \sin x \, dx \quad (\text{יט})$$

פתרון: אינטגרציה בחלקים

$$\int \ln x \, dx \quad (\text{כ})$$

פתרון: נבצע אינטגרציה בחלקים: $f(x) = \ln x$, $g(x) = x$, לכן

$$x \ln x = \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx + \int \ln x \, dx = x + \int \ln x \, dx$$

$$\int e^{-x} x^2 \, dx \quad (\text{כא})$$

פתרון: אינטגרציה בחלקים.

$$\int x^2 \sin(2x) \, dx \quad (\text{כב})$$

פתרון: אינטגרציה בחלקים

עבודת בית 2

$$1. \quad (א) \text{ נגדיר שתי פונקציות: } y_1(x) := (x-1)^3 \text{ ו- } y_2(x) := \begin{cases} (x-1)^3, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1 \end{cases} \text{ בדוק ששתיהן}$$

$$\text{פתרונות לבעית ההתחלה} \quad \begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

פתרון: ע"י ההצבה מגיים שהפונקציה $y_1(x)$ מקיימת את המשוואה. בנוסף, $y_1(1) = 0$ לכן $y_1(x)$ היא פתרון של בעית ההתחלה הנתונה.

כדי לבדוק שהפונקציה $y_2(x)$ גם מקיימת את המשוואה, צריך לבדוק שהיא גזירה עבור $x = 1$. הנגזרת השמאלית של $y_2(x)$ שווה ל-0, הנגזרת הימנית שווה ל-0, לכן $y_2(x)$ גזירה בנקודה $x = 1$ ו- $y_2'(1) = 0$.
 $((x-1)^3)'|_{x=1} = 3(x-1)^2|_{x=1} = 0$ לכן $y_2(x)$ גזירה בנקודה $x = 1$ ו- $y_2'(1) = 0$.

ועתה, באור ש- $y_2^{\frac{2}{3}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{2}{3}(x-1)^2 & x > 1 \end{cases}$ רואים שגם $y_2(x)$ היא פתרון של אותה בעית ההתחלה.

הסיבה לכך שהפונקציה $f_y'(x, y) = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ אינה מוגדרת בנקודה $(1, 0)$ (ובכלל בציר x), לכן בעית ההתחלה אינה מקיימת תנאי משפט Picard.

(ב) קבע האם ניתן להשתמש במשפט Peano כדי להבטיח קיום פתרון לבעית ההתחלה הנתונה:

$$\begin{cases} (y-x)y' = y \ln x \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

פתרון: נרשום את המשוואה בצורה נורמלית: $y' = \frac{y \ln x}{y-x}$. הפונקציה

$f(x, y) = \frac{y \ln x}{y-x}$ רציפה סביב הנקודה $(1, 2)$, לכן, לפי משפט Peano, לבעית ההתחלה

$$\left\{ \begin{array}{l} (y-x)y' = y \ln x \\ y(1) = 2 \end{array} \right. \text{ יש לפחות פתרון אחד.}$$

(ג) קבע האם ניתן להשתמש במשפט Peano כדי להבטיח קיום פתרון לבעיית ההתחלה הנתונה:

$$\left\{ \begin{array}{l} (y-x)y' = y \ln x \\ y(1) = 2 \end{array} \right.$$

פתרון: בנקודה $(2, 2)$ הפונקציה $f(x, y)$ אינה רציפה. לכן, משפט Peano, לא אומר

שום דבר על קיום של פתרון לבעיית ההתחלה $\left\{ \begin{array}{l} (y-x)y' = y \ln x \\ y(2) = 2 \end{array} \right.$. ז"א יכול להיות שפתרונות קיימים, וגם יכול להיות שלא קיים אף פתרון אחד.

2. שרטט את הכיוונים המוגדרים ע"י משוואות הבאות בנקודות $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$, $(\pm 1, \pm 1)$:

$$y' = x + 1 \quad (\text{א})$$

$$y' = x^2 - y^2 \quad (\text{ב})$$

$$y' = 1 \quad (\text{ג})$$

$$y' = \frac{y+1}{x-1} \quad (\text{ד})$$

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \quad (\text{ה})$$

$$y' = y^2 \quad (\text{ו})$$

$$y' = y - x \quad (\text{ז})$$

3. מצא את הזווית בין הקווים האינטגרליים של המשוואות $y' = x + y$ ו- $y' = x - y$ העוברים

דרך הנקודה $M(2, 1)$.

4. שרטט כמה קווים אינטגרליים של המשוואה $y' = y^3 - y$.

5. שרטט כמה קווים אינטגרליים של המשוואה $y' = (y+3)^2(y^2-1)$.

$$6. \text{ מצא את כל הפתרונות של בעיית ההתחלה} \quad \begin{cases} y' = y(y-1) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{ללא חישובים.}$$

תשובה: $y(x) \equiv 1$

פתרון: הפונקציות $f(x, y) = y(y-1)$ ו- $f'_y(x, y) = 2y-1$ רציפות בכל המשור $\mathbb{R}^2$. לפי משפט Picard, דרך כל נקודה (x_0, y_0) עובר קו אינטגרלי של המשוואה $y' = y(y-1)$ אחד בדיוק. בפרט, דרך הנקודה $(0, 1)$ עובר קו אינטגרלי אחד ויחיד. מצד שני, למשוואה $y' = y(y-1)$ יש פתרון שווי משקל $y(x) \equiv 1$. הגרף של הפתרון הזה עובר דרך אותה נקודה $(0, 1)$, לכן הפונקציה $y(x) \equiv 1$ היא הפתרון היחיד של בעיית ההתחלה הנתונה.

עבודת בית 3

1. (א) $yy' + x = 0$. מצא את הפתרון הכללי ע"י נוסחת Barrow ובדוק את תשובתך ע"י ההצבה.

בנוסף לכך, מצא גם את הפתרון הפרטי המתאים לתנאי ההתחלה $y(-2) = 4$.

תשובה: הפתרון הכללי $x^2 + y^2 = C$, $C \geq 0$. הפתרון הפרטי לבעיית ההתחלה $y(x) = \sqrt{20 - x^2}$.

פתרון: הצורה הנורמלית של המשוואה, $y' = -\frac{y}{x}$, מוראה שהמשוואה מקבלת הפרדת משתנים. לכן נשתמש בנוסחה של I. Barrow:

$$\int y \, dy = - \int x \, dx$$

הפתרון ע"י הנוסחה $y^2 = -x^2 + C$ או $x^2 + y^2 = C$. הנוסחה מגדירה פונקציה סתומה עבור כל $C \geq 0$.

נמצא את הערך של הקבוע C עבור תנאי ההתחלה הנתון:

$$\text{הוא } \begin{cases} yy' + x = 0 \\ y(-2) = 4 \end{cases} \quad \text{לכן הפתרון הפרטי לבעיית ההתחלה } C = 4^2 + (-2)^2 = 20$$

$x^2 + y^2 = 20$. בגלל ש- $y(-2) = 4 > 0$, את הפתרון ניתן לרשום בצורה מפורשת:

$$y(x) = \sqrt{20 - x^2}$$

(ב) מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $y' = y$.

בנוסף לכך, מצא גם את הפתרון הפרטי המתאים לתנאי ההתחלה $y(-2) = 4$.

תשובה: $y(x) = Ce^x, y(x) = 4e^{x+2}$

פתרון: זאת משוואת הפרדת המשתנים, לכן נשתמש בנוסחת I. Barrow:

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln |y| = x + C$$

$$|y| = Ce^x \quad C > 0$$

$$y = Ce^x \quad C \neq 0$$

במשך חיפוש הפתרונות, היינו מוכרחים לחלק ב- y , לכן צריך לבדוק, האם פונקציה אפס,

$y(x) \equiv 0$ היא פתרון. כדי לבדוק את העניין, צריך להציב את $y(x) \equiv 0$ במשוואה. אכן

$y'(x) \equiv 0$ בגלל ש- $y(x)$ פונקציה קבועה. אנו רואים שזה גם פתרון. הוא נכנס למשפחה

$y(x) = Ce^x$ עבור $C = 0$. סופית, הפתרון הכללי של המשוואה הוא משפחה של פונקציות

$y(x) = Ce^x$ המוגדרת עבור כל ערך של הפרמטר C .

נמצא את הפתרון הפרטי לביעת ההתחלה $\begin{cases} y' = y \\ y(-2) = 4 \end{cases}$. בשביל זה, נציב את $x = -2$

בפונקציה $y(x) = Ce^x$: $y(-2) = Ce^{-2}$. זה אמור להיות שווה ל-4, שנותן תנאי על הקבוע

C : $Ce^{-2} = 4$, לכן $C = 4e^2$.

(ג) מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $x^2 y' + y = 0$

בנוסף לכך, מצא גם את הפתרון הפרטי המתאים לתנאי ההתחלה $y(-2) = 4$

תשובה: $y(x) = 4e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{x}}$ $y(x) = Ce^{\frac{1}{x}}$

פתרון: נרשום את המשוואה בצורה נורמלית: $y' = -\frac{y}{x^2}$ זאת משוואה אם הפרדת

המשתנים, לכן נשתמש בנוסחת Barrow:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\ln |y| = - \int x^{-2} dx$$

$$\ln |y| = x^{-1} + C$$

$$\ln |y| = \frac{1}{x} + C$$

$$|y| = Ce^{\frac{1}{x}} \quad C > 0$$

$$y = Ce^{\frac{1}{x}} \quad C \neq 0$$

בגלל האינטגרל $\int \frac{dy}{y}$, נבדוק ע"י ההצבה את הפתרון הקבוע $y(x) \equiv 0$: $x^2 \cdot 0 = 0$, לכן,

$C = 0$ גם נותן פתרון למשוואה. לכן הפתרון הכללי למשוואה הוא משפחה חד־פרמטרית

$$y(x) = Ce^{\frac{1}{x}}$$

מצא את הפתרון הפרטי המתאים לתנאי ההתחלה $y(-2) = 4$: $y(-2) = Ce^{-\frac{1}{2}} = 4$, לכן

$$C = 4e^{\frac{1}{2}}$$

(ד) מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $(y+1)xy' - (x-1)y = 0$.

בנוסף לכך, מצא גם את הפתרון הפרטי המתאים לתנאי ההתחלה $y(-2) = 4$.

תשובה: $xy = Ce^{x-y}$

פתרון: נרשום את המשוואה בצורה נורמלית: $y' = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{y}{y+1}$. זאת המשוואה

הנתונה להפרדת המשתנים: $y' = g(x)h(y)$. ע"י שמוש בנוסחה $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx$,

נקבל $\int \left(1 + \frac{1}{y}\right) dy = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$, $\ln|y| + \ln|x| = y + \ln|y| = x - \ln|x| + C$,

$\ln|xy| = x - y + C$, $|xy| = Ce^{x-y}$, $(C > 0)$, $xy = Ce^{x-y}$, $(C \neq 0)$. ועתה נבדוק

האם הערך $C = 0$ גם נותן פתרון. זה ככה, כי למשוואה האלגברית $xy = 0$ יש שני

פתרונות: $x = 0$ ו- $y = 0$. ברור ששני הישרים הם קווים אינטגרליים. לכן הפתרון הכללי

הוא $xy = Ce^{x-y}$ כאשר כל ערך של הקבוע C מותר. הפתרון הזה הוא פונקציה סתומה.

כדי לקבל את הפתרון הפרטי, נציב $x = -2$, $y = 4$ בפתרון הכללי ונקבל $C = -8e^6$, לכן

הפתרון הפרטי הוא $xy = -8e^{x-y+6}$.

נבדוק שהפונקציה הסתומה $xy = Ce^{x-y}$ היא הפתרון:

$$xy = Ce^{x-y}$$

$$(xy)' = (Ce^{x-y})'$$

$$y + xy' = (Ce^{x-y})'$$

נחשב את הנגזרת באגף הימני:

$$(Ce^{x-y})' = C(e^{x-y})' = Ce^{x-y} \cdot (x-y)' = Ce^{x-y} \cdot (1-y')$$

הגיה זמן לזכור ש- $Ce^{x-y} = xy$ לכן

$$Ce^{x-y} \cdot (1-y') = xy(1-y')$$

וסופית נקבל

$$y + xy' = (Ce^{x-y})'$$

$$y + xy' = xy(1 - y')$$

$$y + xy' = xy - xyy'$$

$$xy' + xyy' = xy - y$$

$$x(1 + y)y' = (x - 1)y$$

$$(y + 1)xy' - (x - 1)y = 0$$

השורה האחרונה היא המשוואה הנתונה.

(ה) מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $(1+y)y' + x - 1 = 0$.

בנוסף לכך, מצא גם את הפתרון הפרטי המתאים לתנאי ההתחלה $y(-2) = 4$.

תשובה: הפתרון הכללי: $x^2 + y^2 + 2(y - x) = C$

(ו) מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $y - xy' = 1 + x^2y'$

בנוסף לכך, מצא גם את הפתרון הפרטי המתאים לתנאי ההתחלה $y(-2) = 4$

תשובה: $y(x) = 1 + \frac{2x}{3(1+x)}$, $y(x) = 1 + \frac{Cx}{1+x}$ ($C \in \mathbb{R}$)

פתרון: הצורה הנורמלית של המשוואה היא $y' = \frac{y-1}{x(x+1)}$. זאת משוואה עם הפרדת

משתנים. לפי נוסחת Barrow,

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y-1} &= \int \frac{dx}{x(x+1)} \\ \ln|y-1| &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} \\ \ln|y-1| &= \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C\end{aligned}$$

לכן $|y-1| = C \cdot \left| \frac{x}{x+1} \right|$, ($C > 0$), $y-1 = C \cdot \frac{x}{x+1}$, ($C \neq 0$). פתרון בצורה מפורשת:
 $y(x) = 1 + \frac{Cx}{1+x}$

קל לבדוק שהערך המיוחד $C = 0$ גם נותן פתרון.

$$e^y(1+x^2)y' - 2x(1+e^y) = 0 \quad (ז)$$

$$y(x) = \ln [C(x^2 + 1) - 1] \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: כדי לזהות את סוג המשוואה, נרשום את הצורה הנורמלית:

$$e^y(1+x^2)y' = 2x(1+e^y)$$

$$y' = \frac{2x(1+e^y)}{e^y(1+x^2)}$$

$$y' = \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{1+e^y}{e^y}$$

רואים שזאת משוואת פרידה, לכן אפשר להשתמש בנוסחה של Isaac Barrow:

$$\int \frac{e^y}{1+e^y} dy = \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$\ln |1+e^y| = \ln |1+x^2| + C_1$$

$$\ln(1+e^y) = \ln(1+x^2) + C_1$$

$$1+e^y = e^{C_1}(1+x^2)$$

$$e^y = C(1+x^2) - 1 \quad C > 0$$

$$y = \ln[C(1+x^2) - 1] \quad C > 0$$

בחישובים לעיל לקחנו בחשבון ש- $1+x^2 > 0$ ו- $1+e^y > 0$.

2. מצא את הפתרון הכללי למשוואה וגם את הפתרון הפרטי המתאים לתנאי ההתחלה $y(-2) = 4$ (אם קיים):

$$y^2 + x^2 y' = x y y' \quad (\text{א})$$

תשובה: פונקציה סתומה $y = C e^{\frac{y}{x}}$

פתרון:

i. נרשום את המשוואה בצורה נורמלית:

$$y' = \frac{y^2}{xy - x^2}.$$

רואים שזאת מד"ר-1 עם פונקציה הומוגנית האגף הימני, לכן נבצע את ההצבה $y(x) =$

$$xu(x)$$

$$y^2 + x^2 y' = x y y'$$

$$(xu)^2 + x^2 y' = x(xu) y'$$

$$(xu)^2 = (x^2 u - x^2)(xu)'$$

$$x^2 u^2 = x^2(u - 1)(u + xu')$$

$$u^2 = (u - 1)(u + xu')$$

$$u^2 = (u - 1)u + x(u - 1)u'$$

$$0 = -u + x(u - 1)u'$$

$$x(u - 1)u' = u$$

הגענו למשוואת פרידה, אזי ניתן להשתמש בנוסחת Barrow:

$$x(u-1)u' = u$$

$$\int \frac{u-1}{u} du = \int \frac{dx}{x}$$

$$u - \ln u = \ln |x| + C$$

$$\ln(e^u) - \ln |u| = \ln |Cx| \quad (C > 0)$$

$$\ln \left| \frac{e^u}{u} \right| = \ln |Cx| \quad (C > 0)$$

$$\left| \frac{e^u}{u} \right| = |Cx| \quad (C > 0)$$

$$\frac{e^u}{u} = Cx \quad (C \neq 0)$$

לכן הפתרון הוא פונקציה סתומה $e^u = Cxu$ עבור כל $C \neq 0$.

ii. האינטגרל $\int \frac{u-1}{u} du$ שמופיע באמצע החישובים הנ"ל מכריח לנו לבדוק האם הפונקציה

הקבועה $u(x) \equiv 0$ נותנת פתרון למשוואה. הפונקציה הזאת מתאימה ל- $y(x) \equiv 0$ שהיא

$$\text{באמת פתרון למשוואה המקורית } y^2 + x^2 y' = xy y'$$

iii. כדי לחזור לפונקצית הנעלם y , נבצע את ההצבה $u = \frac{y}{x}$:

$$e^{\frac{y}{x}} = Cy \quad C \neq 0$$

יותר נוח להעביר את הקבוע C לצד שמאל:

$$y = Ce^{\frac{y}{x}} \quad \forall C$$

נשים לב שהמשפחה הזאת מכילה אל פתרון שווי המשקל שלנו (כאשר $C = 0$).

iv. נבדוק את התשובה שקיבלנו:

$$y = Ce^{\frac{y}{x}}$$

$$y' = \left(Ce^{\frac{y}{x}}\right)'$$

$$y' = Ce^{\frac{y}{x}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{y'x - y}{x^2}$$

$$y' = Ce^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{y'x - y}{x^2}$$

$$x^2 y' = Ce^{\frac{y}{x}} \cdot (y'x - y)$$

בגלל ש- $Ce^{\frac{y}{x}} = y$, נקבל סופית

$$x^2 y' = y(y'x - y)$$

$$x^2 y' = xy y' - y^2$$

$$x^2 y' + y^2 = xy y'$$

הגענו למשוואה הנתונה, לכן הפונקציה הסתומה $y = Ce^{\frac{y}{x}}$ אכן הפתרון.

$$(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0 \quad (\text{ב})$$

$$\ln \left| \frac{y}{x} \right| - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = C \quad \text{תשובה:}$$

$$(y+x)y' + y - x = 0 \quad (\text{ג})$$

תשובה: הפתרון הכללי: $y^2 + 2xy - x^2 = C \quad (C \neq 0)$ הפתרו הפרטי עבור תנאי

$$\text{ההתחלה } y(-2) = 4: y^2 + 2xy - x^2 = 4$$

פתרון: 1. הצורה הנורמלית של המשוואה היא $y' = \frac{x-y}{x+y}$ זאת משוואה עם פונקציה

הומוגנית באגף הימני לכן נבצע את ההצבה $y(x) = x \cdot u(x)$:

$$xu' + u = \frac{x - xu}{x + xu}$$

$$xu' = \frac{1-u}{1+u} - u$$

$$u' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1-2u-u^2}{1+u}$$

קבלנו משוואה עם הפרדת המשתנים. לפי נוסחת Barrow,

$$\int \frac{u+1}{u^2+2u-1} du = - \int \frac{dx}{x}.$$

נחשב את האינטגרל השמאלי ע"י ההצבה $t := u^2 + 2u - 1$:

$$\int \frac{u+1}{u^2+2u-1} du = \left\| \begin{array}{l} t := u^2 + 2u - 1 \\ dt = 2(u+1) dx \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |u^2 + 2u - 1| + C$$

לכן הפתרון למשוואת העזר הוא

$$\begin{aligned}\ln |u^2 + 2u - 1| &= \ln \left| \frac{1}{x^2} \right| + C \\ \ln |u^2 + 2u - 1| &= \ln \left| \frac{C}{x^2} \right| \quad (C \neq 0) \\ u^2 + 2u - 1 &= \frac{C}{x^2} \quad (C \neq 0) \\ x^2 u^2 + 2x^2 u - x^2 &= C \quad (C \neq 0)\end{aligned}$$

נבדוק את הערך המיוחד $C = 0$. כדי לעשות את זה, נגזור את הביטוי

$$y^2 + 2xy - x^2 = 0 \quad (\text{נזכור ש-} y \text{ הוא פונקציה סתומה של } x):$$

$2yy' + 2y + 2xy' - 2x = 0$, אבל זה בדיקת משוואה שלנו. ז"א שהפונקציה הסתומה הזאת היא גם פתרון למשוואה.

2. כדי למצוא את הפטרון הפרטי, נציב $x = -2$, $y = 4$ בפתרון הכללי:

$$C = 4^2 + 2(-2)4 - (-2)^2 = C \quad \text{לכן } C = 4.$$

$$xy' + x + y = 0 \quad (\text{ד})$$

$$y(x) = \frac{C - x^2}{2x} \quad \text{\underline{\textbf{תשובה:}}}$$

פתרון: 1. הצורה הנורמלית, $y' = -1 - \frac{y}{x}$, מוראה שזאת משוואה עם פונקציה הומוגנית

באגף הימני, לכן נבצע את ההצבה $y(x) = xu(x)$:

$$xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2} \quad (\text{ה})$$

תשובה: $(C \neq 0), y(x) = x \sin(\ln |Cx|)$

פתרון: נרשום את המשוואה בצורה נורמלית:

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}.$$

זאת משוואה עם פונקציה הומוגנית באגף הימני, לכן נבצע את ההצבה $y = xu$:

$$u + xu' = \sqrt{1 - u^2} + u$$

$$xu' = \sqrt{1 - u^2}$$

$$u' = \frac{\sqrt{1 - u^2}}{x}.$$

הגענו למשוואה עם הפרדת משתנים. נרשום עבורה את הנוסחת I. Barrow:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\arcsin u = \ln |Cx| \quad (C \neq 0)$$

$$u = \sin(\ln |Cx|) \quad (C \neq 0)$$

פתרון פרטי עם התנאי ההתחלה $y(-2) = 4$ אינו קיים, בגלל שתמיד

$$|y(-2)| = 2|\sin(\ln(2C))| \leq 2,$$

ז"א $y(-2)$ קטן מ-2 עבור כל ערך של C ולא יכול להיות שווה ל-4.

בדיקת התשובה בעזרת התוכנה MAXIMA:

```
define(y(x),x*sin(log(C*x)));

define(ypr(x),diff(y(x),x));

fullratsimp(x*ypr(x)-y(x)-sqrt(x^2-(y(x))^2));
```

$$xy' + x - y = 0 \quad (ו)$$

$$y(x) = x \ln \frac{C}{x} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2} \quad (ז)$$

$$x = y\sqrt{-2 \ln |Cy|} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: זאת משוואה בצורה נורמלית עם פונקציה הומוגנית באגף הימני, לכן נבצע את ההצבה

$$y = xu$$

$$u + xu' = \frac{u}{1 - u^2}$$

$$xu' = \frac{u^3}{1 - u^2}$$

הגענו למשוואה עם הפרדת המשתנים. נרשום עבורה את הנוסחה של I. Barrow:

$$\int \frac{1-u^2}{u^3} du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{u^3} - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + C$$

$$C + \frac{1}{2u^2} + \ln|u| = -\ln|x|$$

$$C + \frac{x^2}{2y^2} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\ln|x|$$

$$C + \frac{x^2}{2y^2} + \ln|y| - \ln|x| = -\ln|x|$$

רואים שאי אפשר לרשום את y כפונקציה מפורשת של x , אבל ניתן לבדד את x :

$$\frac{x^2}{2y^2} = C - \ln|y|$$

$$x^2 = 2y^2 (C - \ln|y|)$$

$$x = \pm|y|\sqrt{C - 2\ln|y|}.$$

$$(x^2 + y^2)y' = 2xy \quad (\text{ח})$$

$$y^2 - x^2 = Cy \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

עבודת בית 4

1. נניח שפונקציה $y(x)$ היא פתרון למשוואה $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ ונסמן $z := y^{1-n}$. הוכח

$$z'(x) + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

שהפונקציה $z(x)$ היא פתרון למשוואה

2. מצא את הפתרון הכללי למשוואה הנתונה, ומצא את הפתרון הפרטי המתאים לתנאי ההתחלה

$$y(-2) = 4 \quad (\text{אם קיים}):$$

$$y' - 2xy + 2x^3 = 0 \quad (\text{א})$$

$$y(x) = Ce^{x^2} + x^2 + 1 \quad \textbf{תשובה:}$$

פתרון: 1. משוואה לינארית, לכן הפתרון יהיה בצורה $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ כאשר $y_h(x)$

הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית $y' = 2xy$ ו- $y_p(x)$ פתרון פרטי כלשהו של המשוואה הנתונה.

2. הפתרון הכללי $y_h(x)$: למשוואה $y' = 2xy$ נתון ע"י נוסחת Barrow:

$$\int \frac{dy}{y} = 2 \int x \, dx$$

$$\ln |y| = x^2 + C$$

$$|y| = Ce^{x^2} \quad C > 0$$

$$y = Ce^{x^2} \quad C \neq 0$$

שהיות של y במחנה של האינטגרל הראשון אומרת שצריך לבדוק האם לא איבדנו בדרך את

הפתרון הקבוע $y(x) \equiv 0$. ההצבה של הפונקציה הזאת במשוואה $y' = 2xy$ מביאה לזהות,

לכן $C = 0$ ב- $y = Ce^{x^2}$ גם נותנת פתרון. בסיכום, הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית נתון ע"י הנוסחה $y_p(x) = Ce^{x^2}$ כאשר כל ערכים של הקבועה C מותרים.

3. את הפתרון הפרטי של המשוואה הנתונה נחפש בצורה $y_p(x) = c(x)e^{x^2}$ כאשר $c(x)$ פונקציה לא ידועה. כדי למצוא את $c(x)$, נציב את הביטוי עבור $y_p(x)$ במשוואה:

$$c'e^{x^2} + c \cdot 2xe^{x^2} - 2ce^{x^2} + 2x^3 = 0$$

$$c'e^{x^2} + 2x^3 = 0$$

$$c' = -2x^3 e^{-x^2}$$

$$c(x) = -2 \int x^3 e^{-x^2} dx$$

לכן נשאר לנו לחשב את האינטגרל $-2 \int x^3 e^{-x^2} dx$. נבצע את האינטגרציה בחלקים.

$$f(x) := x^2 \quad g'(x) := -2xe^{-x^2}$$

$$f'(x) = 2x \quad g(x) \in \int (-2xe^{-x^2}) dx$$

$$f'(x) = 2x \quad g(x) = e^{-x^2}$$

$$\begin{aligned} \int f(x)g'(x) dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx = \\ &= x^2 e^{-x^2} - 2 \int x e^{-x^2} dx = (x^2 + 1)e^{-x^2} \end{aligned}$$

$$y_p(x) = c(x)e^{x^2} = (x^2 + 1)e^{-x^2} e^{x^2} = x^2 + 1 \quad \text{לכן}$$

4. $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{x^2} + x^2 + 1$ וכל ערך של C נותן פתרון פרטי.

$$y' + y = e^{-x} \quad (\text{ב})$$

$$y(x) = \frac{x + C}{e^x} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

$$y' + \frac{1-2x}{x^2} y - 1 = 0 \quad (\text{ג})$$

$$y(x) = x^2 \left(1 + C e^{\frac{1}{x}} \right) \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: זאת משוואה לינארית. נרשום אותה בצורה נורמלית:

$$y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1.$$

i. נמצא את הפתרון הכללי $y_h(x)$ של המשוואה ההומוגנית מתאימה

$$y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 0 :$$

$$y' = \frac{2x-1}{x^2} y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x-1}{x^2} dx$$

חשוב : ראינו פונקצית הנעלם y בתוך האינטגרל במכנה, לכן חייבים בסוף לבדוק את

הפתרון $y(x) \equiv 0$!

$$\ln |y| = 2 \ln |x| - \int x^{-2} + C$$

$$\ln |y| = \ln (x^2) + \frac{1}{x} + C$$

$$\ln |y| - \ln (x^2) = \frac{1}{x} + C$$

$$\ln \left| \frac{y}{x^2} \right| = \frac{1}{x} + C$$

$$\left| \frac{y}{x^2} \right| = C e^{\frac{1}{x}} \quad (C > 0)$$

$$\frac{y}{x^2} = C e^{\frac{1}{x}} \quad (C \neq 0)$$

לכן

$$y_h(x) = C x^2 e^{\frac{1}{x}} \quad (C \neq 0).$$

ii. נבדוק ע"י הצבה שהפונקציה הקבועה $y(x) \equiv 0$ גם פתרון למשוואה ההומוגנית

המתאימה:

$$y(x) \equiv 0$$

$$y'(x) \equiv 0$$

$$y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 0 + \frac{1-2x}{x^2} 0 = 0$$

לכן זה פתרון, והפונקציות

$$y_h(x) = C x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

הן פתרונות של המשוואה ההומוגנית המתאימה עבור כל מספר ממשי C .

iii. נמצא פתרון פרטי $y_p(x)$: נחפש אותו בצורה

$$y_p(x) = c(x)x^2e^{\frac{1}{x}}$$

כאשר $c(x)$ פונקציה לא ידועה. כדי למצוא אותה, נציב את $y_p(x)$ במשוואה המקורית

(הלא הומוגנית):

$$y(x) = c(x)x^2e^{\frac{1}{x}}$$

$$y'(x) = c'(x)x^2e^{\frac{1}{x}} + c(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$$

$$c'(x)x^2e^{\frac{1}{x}} + c(2x-1)e^{\frac{1}{x}} + \frac{1-2x}{x^2}cx^2e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$c'(x)x^2e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$c' = x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}$$

$$c \in \int x^{-2}e^{-\frac{1}{x}} dx$$

$$c(x) = e^{-\frac{1}{x}}$$

לכן

$$y_p(x) = c(x)x^2e^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}}x^2e^{\frac{1}{x}} = x^2.$$

iv. סופית,

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

$$y' - \frac{2}{x}y = e^x x^2 \quad (\text{ד})$$

$$y(x) = x^2(e^x + C) \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

$$y' \cos x + y \sin x = 1 \quad (\text{ה})$$

$$y(x) = \sin x + C \cos x \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

$$y' + 2y = y^2 e^x \quad (\text{ו})$$

תשובה: $y(x) = \frac{1}{e^x + C e^{2x}}$ או $y(x) \equiv 0$.

פתרון:

i. זאת משוואת Bernoulli, לכן מבצעים את ההצבה $z(x) := y^{-1}(x)$:

$$\begin{aligned} y &= z^{-1} \\ y' &= -\frac{z'}{z^2} \\ -\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{z} &= \frac{e^x}{z^2} \\ -z' + 2z &= e^x \\ z' - 2z &= -e^x \end{aligned}$$

קיבלנו משוואה ליניארית. נשים לב על זה שלמשוואה הנתונה יש הפתרון הטריוויאלי

$$y(x) \equiv 0$$

ii. נמצא את הפתרון הכללי $z_h(x)$ לצשוואה ההומוגנית המתאימה: $z' - 2z = 0$.

$$z' = 2z$$

$$\int \frac{dz}{z} = 2 \int dx$$

$$\ln |z| = 2x + C$$

$$|z(x)| = Ce^{2x} \quad C > 0$$

$$z(x) = Ce^{2x} \quad C \neq 0$$

$$.C \neq 0, z_h(x) = Ce^{2x} \text{ לכן}$$

iii. נמצא פתרון פרטי כלשהו $z_p(x)$ למשוואה $z' - 2z = -e^x$. נחפש את הפתרון בצורה

$z_p(x) = c(x)e^{2x}$ כאשר $c(x)$ פונקציה נעלם. כדי לרשום משוואה דיפרנציאלית עבור

$$:z' - 2z = -2e^x \text{ במשוואה } z_p(x) = c(x)e^{2x} \text{ נציב את } c(x)$$

$$c'e^{2x} + 2ce^{2x} - 2ce^{2x} = -e^x$$

$$c'e^{2x} = -e^x$$

$$c' = -e^{-x}$$

הפתרון הכללי למשוואה $c' = -e^{-x}$ הוא האינטגרל הלא מסוים

$$c(x) = - \int e^{-x} dx = e^{-x} + C.$$

אנחנו צריכים פתרון פרטי אחד, הבחירה טבעית ביותר היא $C = 0$, לכן

$$z_p(x) = e^{-x}e^{2x} = e^x$$

ואז

$$z(x) = z_h(x) + z_p(x) = Ce^{2x} + e^x.$$

iv. נחזור למשוואה המקורית:

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{Ce^{2x} + e^x} \quad C \neq 0.$$

נקבע האם הערך $C = 0$ גם נותן פתרון:

$$C = 0 \Rightarrow z(x) = e^{-x}$$

$$y' + 2y = y^2 e^x$$

$$(e^{-x})' + 2e^{-x} = -e^{-x} + 2e^{-x} = e^{-x}$$

$$(e^{-x})^2 e^x = e^{-2x} e^x = e^{-x}$$

$$e^{-x} = e^{-x},$$

לכן $C = 0$ גם נותן פתרון.

$$(x+1)(y' + 2y^2) + y = 0 \quad (ז)$$

תשובה: $y(x) = \frac{1}{(x+1)(2 \ln |x+1| + C)}$ או $y(x) \equiv 0$

פתרון: זאת משוואת Bernoulli לכן נציב $z = \frac{1}{y}$ $z' = -\frac{y'}{y^2}$ $z' - \frac{z}{x+1} = 2$

קבלנו משוואה לינארית, הפתרון הוא סכום $z = z_h + z_p$. הפונקציה $z_h(x)$ מקיימת את

המשוואה $z' = \frac{z}{x+1}$ לכן $z_h(x) = C \cdot (x+1)$ את הפונקציה $z_p(x)$ נחפש בצורה

$$z_h(x) = (x+1)c(x) : c' = \frac{2}{x+1} \quad \text{לכן}$$

$$c(x) = 2 \ln |x+1| + C$$

$$y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4 \quad (\text{ח})$$

$$y(x) \equiv 0, y(x) = \frac{1}{x \sqrt[3]{C - 3 \ln |x|}} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון:

i. זאת משוואת Bernoulli לכן נשתמש בהצבה $z := y^{1-4} = y^{-3}$. כדי לבצע את ההצבה,

נגזור את הפונקציה z , $z' = -3y^{-4}y'$ ונרשום את המשוואה בצורה

$$y^{-4}y' + \frac{y^{-3}}{x} = x^2,$$

אזי

$$y^{-3} = z$$

$$y^{-4}y' = -\frac{1}{3}z'$$

$$y^{-4}y' + \frac{y^{-3}}{x} = x^2$$

$$-\frac{1}{3}z' + \frac{z}{x} = x^2$$

$$z' - 3\frac{z}{x} = -3x^2$$

לכן צריך למצוא את הפתרון הכללי למשוואה הלינארית

$$z' - 3\frac{z}{x} = -3x^2$$

ii. נמצא את הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית המתאימה $z' - 3\frac{z}{x} = 0$. לפי

הנוסחה הכללית,

$z_h(x) = Ce^{-p(x)}$ כאשר $p(x)$ אחת מהפונקציות הקדומות ל- $-\frac{3}{x}$. בגלל ש-

, $C = 0$, נוח לקחת את הפונקציה עם $C = 0$, $\int \left(-\frac{3 dx}{x} \right) = -3 \ln |x| + C = -3 \ln |x| + C$
 ז"א $p(x) = -3 \ln |x| = -\ln |x^3|$. לכן $z_h(x) = C e^{-p(x)} = C e^{\ln |x^3|} = C |x^3|$.

בגלל ש- C מספר שרירותי (הוא יכול להיות גם חיובי וגם שלילי), אפשר להוריד את

הסימן של הערך המוחלט:

$$z_h(x) = Cx^3.$$

נבדוק שזה פתרון למשוואה ההומוגנית:

$$z(x) = Cx^3$$

$$z'(x) = 3Cx^2$$

$$z' - 3\frac{z}{x} = 3Cx^2 - 3\frac{Cx^3}{x} \equiv 0$$

לכן זה פתרון.

iii. פתרון פרטי למשוואה הלינארית $z' - 3\frac{z}{x} = -3x^2$ נחפש בצורה $z_p(x) = c(x)x^3$

ומצא את המשוואה עבור פונקציה הנעלם $c(x)$:

$$z' = c'x^3 + 3cx^2$$

$$c'x^3 + 3cx^2 - 3\frac{cx^3}{x} = -3x^2$$

$$c'x^3 = -3x^2$$

$$c' = -3x^{-1}$$

מתוך כל פתרונות של המשוואה אנחנו זקוקים באחד בלבד. אזי

$$c(x) \in -3 \int \frac{dx}{x} = -3 \ln |x| + C$$

ובחירה טבעית היא שוב $C = 0$:

$$z_p(x) = -3 \ln |x| x^3$$

iv. הפתרון הכללי למשוואה הלינקרית $z' - 3\frac{z}{x} = -3x^2$ הוא $z(x) = z_h(x) + z_p(x)$

$$z(x) = Cx^3 - 3 \ln|x| x^3 = (C - 3 \ln|x|) x^3$$

v. נחזור לפונקצית הנעלם $y(x)$:

$$z = y^{-3}$$

$$y(x) = z^{-\frac{1}{3}} = [(C - 3 \ln|x|) x^3]^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(C - 3 \ln|x|) x^3}} = \frac{1}{x \sqrt[3]{C - 3 \ln|x|}}$$

עבודת בית 5

$$1. \text{ וודה קיום ויחידות של הפתרון לבעיית ההתחלה הנתונה } \begin{cases} xy' = y \\ y(1) = 1 \end{cases} \text{ . רשום את תהליך Euler}$$

עבור צעד h כללי. רשום את הביטוי ל- y_4 עבור $h = 0.5$. בנוסף, מצה את הפתרון המדויק

(האנליטי) $y(x)$ וחשב את $y(3)$. חשב את השגיאה $|y_4 - y(3)|$.

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_m = \frac{m+2}{m+1} \cdot y_{m-1}, \quad m = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad \text{תשובה:}$$

פתרון: הפונקציות $f(x, y) = \frac{y}{x}$ ו- $f'_y(x, y) = \frac{1}{x}$ רציפות בנקודה $(1, 1)$ לכן לפי משפט Picard

פתרון קיים והוא יחיד. לכן זה חוקי להשתמש בשיטות נומריות עבור בעיית ההתחלה הזאת.

$$y_m = y_{m-1} + h \cdot \frac{y_{m-1}}{1 + (m-1)h} = \frac{mh + 1}{(m-1)h + 1} \cdot y_{m-1} \quad \text{לאחר ההצבה } h = 0.5, \text{ נקבל}$$

$$n = \frac{3-1}{0.5} = 4$$

לכן

$$y_m = \frac{m+2}{m+1} \cdot y_{m-1}, \quad m = 1, 2, 3, 4$$

$$\text{ז"א } y_0 = 1, y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = 2, y_3 = \frac{5}{2}, y_4 = 3$$

הפתרון הפרטי המדויק הוא $y(x) = x$ לכן $y(3) \approx y_4 = 3$.

2. וודה קיום ויחידות של הפתרון לבעית ההתחלה הנתונה

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2}xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

רשום את תהליך Euler

עבור צעד h כללי. רשום את הביטוי ל- y_{10} עבור $h = 0.1$. בנוסף, מצה את הפתרון המדויק

(האנליטי) $y(x)$ וחשב את $y(1)$. חשב את השגיאה $|y_{10} - y(1)|$.

3. וודה קיום ויחידות של הפתרון לבעית ההתחלה הנתונה

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

רשום את תהליך Euler עבור צעד h כללי. רשום את הביטוי ל- y_{10} עבור $h = 0.1$.

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_m = y_{m-1} + h y_{m-1}^2 + h^3 (m-1)^2 \quad (m = 1, 2, \dots, 10) \end{cases}$$

תשובה:

פתרון: הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2$ מקיימת תנאי משפט Picard בכל המשור $\mathbb{R}^2$, לכן פתרון למשוואה הנתונה קיים ויחיד לכל תנאי התחלה. בפרט, לבעית ההתחלה שלנו מותר להשתמש בשיטות נומריות.

נרשום את תהליך Euler לבעית ההתחלה הנתונה.

$$y_m = y_{m-1} + h \cdot (((m-1)h)^2 + (y_{m-1})^2) = y_{m-1} + h y_{m-1}^2 + h^3 (m-1)^2$$

עבור $m = 1, 2, \dots, 10$.

4. חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (2 + (0.1)^k) = 2 \quad (\text{א})$$

פתרון: $\lim_{k \rightarrow \infty} (0.1)^k = 0$, בגלל ש- $|0.1| < 1$, לכן

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (2 + (0.1)^k) = 2 + \lim_{k \rightarrow \infty} (0.1)^k = 2 + 0 = 2$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1-2k}{1+2k} = -1 \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1-2k}{1+2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} - 2}{\frac{1}{k} + 2} = \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} - 2}{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} + 2} = \frac{0 - 2}{0 + 2} = -1 \quad \underline{\text{פתרון:}}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k + (-1)^k}{k} = 1 \quad (\text{ג})$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k + (-1)^k}{k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k} \right) = 1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{k} = & \textbf{\underline{פתרון:}} \\ &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - 5k^4}{k^4 + 8k^3} = -5 \quad (\text{ד})$$

פתרון: החזקה של k הגבוהה ביותר היא 4, לכן נחלק את המונה וגם את המכנה של השבר

באותו ביטוי k^4 . נקבל אותו שבר בצורה

$$\frac{1 - 5k^4}{k^4 + 8k^3} = \frac{\frac{1}{k^4} - 5}{1 + \frac{8}{k}}.$$

באור ש- $\frac{1}{k} \rightarrow 0$, נקבל

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - 5k^4}{k^4 + 8k^3} = \frac{0 - 5}{1 + 0} = -5$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin k}{k} = 0 \quad (\text{ה})$$

פתרון: אחת מהתכונות הבסיסיות של סינוס $\sin$ הוא תמיד נמצא בין המיספרים -1 ו- 1 :

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

עבור כל x . ניתן לבטא את התכונה הזאת גם בצורה $|\sin x| \leq 1$.

$$\text{לכן } \left| \frac{\sin k}{k} \right| < \frac{1}{k}$$

אנחנו יודעים אבל ש- $\frac{1}{k} \rightarrow 0$ לכן גם $\frac{\sin k}{k} \rightarrow 0$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = 0 \quad (\text{ו})$$

פתרון: $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$ לכן הגבול שווה לאפס.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(0.9)^k} = \infty \quad (ז)$$

פתרון: $\frac{1}{(0.9)^k} = \left(\frac{1}{0.9}\right)^k = \left(\frac{10}{9}\right)^k$ בגלל ש- $\frac{10}{9} > 1$ הגבול שווה לאינסוף.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^k}\right) \left(\frac{k+1}{2k}\right) = 1 \quad (\text{ח})$$

עבודת בית 6

1. בסעיפים הבאים, רשום את הפונקציה $f(x)$ כטור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$. ציין את הקטע שאבורו הטור שמצאת מתכנס. ניתן להשתמש במשפט הבא בלבד: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ עבור $-1 < x < 1$.

$$a=0, f(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad (\text{א})$$

$$\text{תשובה: } \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \quad \text{תחום ההתכנסות: } (-1, 1).$$

פתרון: נסמן $t := x^2$. אזי, לפי נוסחת סכום הטור ההנדסי,

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

עבור $|x| < 1$ או $|t| = |x^2| = |x|^2 < 1$.

הערה: המקדמים של הטור, $\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$, נתונים ע"י המוסחה:

$$c_m = \begin{cases} 1, & m = 2n \\ 0, & m = 2n + 1 \end{cases}.$$

$$.a = -3 , f(x) = \frac{1}{1-x} \quad (\text{ב})$$

$$.a = 0, f(x) = \frac{1}{1+2x} \quad (\text{ג})$$

$$\text{תשובה: } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n, \text{ תחום ההתכנסות: } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

פתרון: נסמן $t := 2x$, אזי, לפי נוסחה לסכום של הטור ההנדסי,

$$\frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n$$

עבור $|x| < \frac{1}{2}$ או $|t| = |2x| = 2 \cdot |x| < 1$.

$$a = 2, f(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{ד})$$

עבודת בית 7

1. פתח את הפונקציה $\sin x$ לטור חזקות ליד הנקודה $x = 0$.

(רפז: הפונקציה $\sin x$ היא פתרון למד"ר $y'' + y = 0$ שמקיים את התנאים $y(0) = 0, y'(0) = 1$)

תשובה:
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

2. תשתמש בנוסחה $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ כדי למצוא את הפיתוח של הפונקציה e^{-x} לטור חזקוד ליד $x = 0$.

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: נסמן $t := -x$ אזי

$$e^{-x} = e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}.$$

3. פתח את הפונקציה $f(x)$ ליד $x = 0$ עד לסדר 4. ניתן להשתמש בפיתוח של הפונקציה e^x וגם

את הפיתוח של הפונקציה $\cos x$ שמצאת קודם.

$$f(x) = e^x \cos x \quad (\text{א})$$

$$e^x \cos x \approx 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: בכל החישובים צריך לשמור את האיברים עד למעלה 4 בלבד.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

$$\begin{aligned} \cos x e^x &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right) \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4\right) = \\ &= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4\right) - \frac{1}{2}x^2 \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) + \frac{1}{24}x^4 = \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{24}x^4 = \\ &= 1 + x + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24}\right)x^4 = \\ &= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4. \end{aligned}$$

$$f(x) = e^x + e^{-x} \quad (\text{ב})$$

$$e^x + e^{-x} \approx 2 + x^2 + \frac{x^4}{12} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$e^x + e^{-x} = (1 + 1) + (x - x) + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6}\right) + \left(\frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{24}\right) + \dots$$

$$= 2 + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 2 \cdot \frac{x^4}{24} + \dots$$

4. מצא את הפתרון $y(x)$ של בעיית ההתחלה בצורת טור חזקות. מצא את האיברים עד לסדר 4

בלבד:

$$y'(0) = 1, y(0) = 1, y'' = xy + y' \quad (\text{א})$$

$$y(0) = 0, (1-x)y' = 1 + x - y \quad (\text{ב})$$

$$y(x) \approx x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: נחפש את הפתרון בצורה $y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4$. תנאי ההתחלה

$$y(0) = 0, c_0 = 0, \text{ לכן } y(x) = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4$$

$$y(x) = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4$$

$$y'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3$$

$$(1-x)(c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3) = 1 + x - (c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4)$$

נהשווה את המקדמים של החזקות $x^0, \dots, x^3$:

$$x^0 : \quad c_1 = 1$$

$$x : \quad c_2 = \frac{1}{2}$$

$$x^2 : \quad 3c_3 = c_2 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{6}$$

$$x^3 : \quad 4c_4 = 2c_3 \Rightarrow c_4 = \frac{1}{12}$$

(ג) מצא את הפתרון $y(x)$ של בעיית ההתחלה $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$ בצורת טור חזקות עד לסדר 4.

$$\text{תשובה: } y(x) \approx 1 + x + x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{7x^4}{6}$$

פתרון: נחפש את הפתרון בצורה $y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4$. תנאי ההתחלה

קובע לנו $c_0 = 1$, לכן

$$y(x) = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4.$$

נמצא את y' :

$$y'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3.$$

שימו לב: הביטוי של y' מכיל איברים עד חזקה 3 בלבד, לכן באגף הימני של המשוואה אנחנו

חייבים לשמור איברים עד לחזקה 3, ולא יותר. בפרט, נחשב את y^2 :

$$y^2 = (1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3)^2 = 1 + c_1^2x^2 + 2c_1x + 2c_2x^2 + 2c_3x^3 + 2c_1c_2x^3 + \dots$$

כאשר הנקודות מסמנים את האיברים ממעלה 4 והלה, לאין להם שימוש. נציב את כל

הביטויים שקבלנו למשוואה:

$$c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 = x^2 + 1 + c_1^2x^2 + 2c_1x + 2c_2x^2 + 2c_3x^3 + 2c_1c_2x^3$$

או, אחרי כינוס איברים דומים:

$$c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 = 1 + 2c_1x + (1 + c_1^2 + 2c_2)x^2 + (2c_3 + 2c_1c_2)x^3$$

ועתה, נהשווה את המקדמים של החזקות x^0, x^1, x^2, x^3 :

$$x^0 : \quad c_1 = 1$$

$$x^1 : \quad c_2 = c_1$$

$$x^2 : \quad 3c_3 = 1 + c_1^2 + 2c_2$$

$$x^3 : \quad 4c_4 = 2c_3 + 2c_1c_2$$

מכאן נובע

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = 1$$

$$c_3 = \frac{4}{3}$$

$$c_4 = \frac{7}{6}$$

(ד) מצא את הפתרון של בעיית ההתחלה $y'' = yy' - x^2$, $y(0) = y'(0) = 1$ בצורת טור חזקות עד לסדר 4.

$$y(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

(ה) מצא את הפתרון של בעית ההתחלה $y(0) = \frac{1}{2}, y' = y^2 + x^3$ בצורת טור חזקות עד לסדר 4.

$$y(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \text{תשובה:}$$

פתרון: נחפש את הפתרון כטור חזקות של x , בגלל שתנאי ההתחלה נתון עבור $x = 0$:

$$y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 \text{ לפי תנאי ההתחלה, } c_0 = y(0) = \frac{1}{2} \text{ לכן}$$

$$y(x) = \frac{1}{2} + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4.$$

לביטוי $y'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3$ יש סדר 3 לכן בהמשך מספיק לשמור איברים

עד למעלה 3 בלבד:

$$y(x) = \frac{1}{2} + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$$

$$y'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3$$

$$[y(x)]^2 = \frac{1}{4} + c_1^2x^2 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + 2c_1c_2x^3$$

$$= \frac{1}{4} + c_1x + (c_1^2 + c_2)x^2 + (c_3 + 2c_1c_2)x^3$$

ההצבה במשוואה:

$$c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 = \frac{1}{4} + c_1x + (c_1^2 + c_2)x^2 + (c_3 + 2c_1c_2)x^3 + x^3.$$

נבצע את ההשוואת המקדמים של x^0, x^1, x^2, x^3 :

$$x^0 : c_1 = \frac{1}{4}$$

$$x^1 : 2c_2 = c_1$$

$$x^2 : 3c_3 = c_1^2 + c_2$$

$$x^3 : 4c_4 = c_3 + 2c_1c_2 + 1$$

$$c_1 = \frac{1}{4}$$

$$c_2 = \frac{1}{8}$$

$$c_3 = \frac{1}{16}$$

$$c_4 = \frac{9}{32}$$

(ו) מצא את הפתרון $y(x)$ של בעיית ההתחלה $y' = x^2 y^2 - 1$, $y(0) = 0$ בצורת טור חזקות עד לסדר 4.

תשובה: $-x + \dots$

פתרון: נחפש את הפתרון בצורה $y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4$. תנאי ההתחלה קובע

$c_0 = 0$, לכן $y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4$. הנגזרת $y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3$

ממעלה 3, ז"א שפיתוח של האגף הימני מספיק לשמור מחוברים עד למעלה 3:

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4$$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3$$

$$x^2 [y(x)]^2 = x^2 (c_1 x + \dots)^2 = 0 + \dots$$

נציב את הביטויים האלה במשוואה:

$$y' = x^2 y^2 - 1$$

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 = -1$$

לכן $c_2 = c_3 = c_4 = 0$, $c_1 = -1$.

$$y'(0) = -3, y(0) = 4, y'' + y = 4e^x \quad (\text{ז})$$

$$y(0) = y'(0) = 0, y'' + 2y' + 2y = xe^{-x} \quad (\text{ח})$$

עבודת בית 8

בתרגילים הבאים ניתן להשתמש בנוסחאות:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1, \\ e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.\end{aligned}$$

1. מצא את הפיתוח של הפונקציה $f(x)$ לטור חזקות סביב הנקודה נקודה $x = 0$. מצא את תחום

ההתכנסות:

$$f(x) = \sin(x/2) \quad (\aleph)$$

$$\sin(x/2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

עבור כל x .

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \underline{\text{פתרון:}} \quad \text{נסמן } t := \frac{x}{2} \text{ ונשתמש בפיתוח}$$

$$\begin{aligned}\sin(x/2) &= \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}}}{(2n+1)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}\end{aligned}$$

$$f(x) = x^2 e^{2x} \quad (\text{ב})$$

$$.(-\infty, \infty), \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{(n-2)!} x^n \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון:

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 e^{2x} &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^{n+2} = \left\| \begin{array}{l} m := n+2 \\ n = m-2 \\ m = 2, 3, \dots \end{array} \right\| = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2^{m-2}}{(m-2)!} x^m = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{(n-2)!} x^n \end{aligned}$$

$$f(x) = \cos \sqrt{x} \quad (\text{ג})$$

$$\mathcal{D} = (-\infty, +\infty), \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: נגדיר $\sqrt{x} =: t$, ועתה נשתמש את פיתוח Taylor עבור פונקציה $\cos t$:

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$$

$$f(x) = \cos^2 x \quad (\text{ד})$$

$$\mathcal{D} = (-\infty, +\infty), 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: נשתמש באזהות $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{ה})$$

פתרון: נשתמש בנוסחה $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ הנכונה עבור כל x :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

הסכום $\frac{1 + (-1)^n}{2}$ תלוי באזגיות של n :

$$\frac{1 + (-1)^n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2m + 1 \\ 1, & n = 2m \end{cases}$$

לכן

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

שימו לב שהנוסחה שכבלנו מזכירה צאוד את הפיתוח של הפונקציה $\cos x$.

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} \quad (\text{ו})$$

תשובה: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!}$, $D = (-\infty, +\infty)$

$$f(x) = (1+x)e^{-x} \quad (ז)$$

$$x \text{ עבור כל } (1+x)e^{-x} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(n-2)!} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון:

$$\begin{aligned} (1+x)e^{-x} &= (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} + x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!} = \\ &= \left\| \begin{array}{l} m := n+1 \\ n = m-1 \\ m = 1, 2, \dots \end{array} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} x^m}{(m-1)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n-1)!} = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n-1)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} \right] x^n = \end{aligned}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n!} - \frac{n}{n!} \right] x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1-n}{n!} x^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1-n}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n!} x^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(n-2)!}.$$

כאן השתמשנו בעובדה ש- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1-n}{n!} x^n = 0$ עבור $\frac{1-n}{n!} x^n$

$n = 1$. הפתוח לטור חזקות של הפונקציה e^x מתכנס בכל הישר $\mathbb{R}$, לכן גם הטור שקבלנו

מתכנס בכל $\mathbb{R}$, $R = \infty$

* * *

ניתן לבדוק את האיברים הראשוניים של הפיתוח ע"י תוכנה MAXIMA. לדוגמה:

```
define(f(x), (1+x)*%e^(-x));
```

```
taylor(f(x),x,0,10);
```

2. פתח את הפונקציה $f(x) = e^x$ לטור חזקות סביב הנקודה נקודה $x = -1$. מצא את תחום

ההתכנסות.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{e \cdot n!} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: נסמן $t := x + 1$ ואז
$$e^{t-1} = e^{-1}e^t = e^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

3. רשום את המקדם c_n , מצא את רדיוס ההתכנסות, את מרכז הפיתוח a ואת קטע ההתכנסות של

הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (4x+1)^n \quad (\text{א})$$

תשובה: $c_n = (-1)^n 4^n, (-\frac{1}{2}, 0), R = \frac{1}{4}$

פתרון: $a = -\frac{1}{4}, c_n = (-1)^n \cdot 4^n$ לכן $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (4x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 4^n \left(x + \frac{1}{4}\right)^n$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x-2)^n}{n} \quad (\text{ב})$$

תשובה: $(\frac{1}{3}, 1), R = \frac{1}{3}$

פתרון: $a = \frac{2}{3}, c_n = (-1)^n \cdot 3^n$ לכן $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x-2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3^n \left(x - \frac{2}{3}\right)^n$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n} \quad (\text{ג})$$

תשובה: $(-8, 12), R = 10$

פתרון: $a = 2, c_n = \frac{1}{10^n}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{n+1}}{10^n} = 10$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n \text{ (ד)}$$

$(-0.5, 0.5)$, $R = \frac{1}{2}$ **תשובה:**

$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = ,a = 0 ,c_n = 2^n$ **לכן** $\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$ **פתרון:**

$\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}} \quad (\text{ה})$$

תשובה: $a = 1, R = 1, (0, 2)$

$$.R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1, a = 1, c_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \underline{\text{פתרון:}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!} \quad (ו)$$

$$(-\infty, \infty), R = \infty, a = 0 \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

$$.R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty, a = 1, c_n = \frac{3^n}{n!} \quad \underline{\text{פתרון:}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} \quad (ז)$$

תשובה: $(-\infty, \infty), c_n = \frac{1}{(n-1)!}, R = \infty, a = 0$

פתרון: כדי למצוא את רדיוס ההתכנסות, נוח לכתוב את הטור בצורה

$$x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, שהוא בתורו שווה ל-

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

העת, נרשום את הטור בצורה תקינה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = \left\| \begin{array}{l} m := n+1 \\ m = 1, 2, \dots \\ n = m-1 \end{array} \right\| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{(m-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$$

$$c_n = \frac{1}{(n-1)!} \quad \text{לכן}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n^2 + 3}} \quad (ח)$$

$$(-1, 1), c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 3}}, R = 1, a = 0 \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^2 + 3}}{\sqrt{n^2 + 3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2 + 2n + 4}{n^2 + 3}} = 1$$

מרכז הסדר הוא $x = 0$, לכן תחום ההתכנסות הוא $(-1, 1) = (0 - 1, 0 + 1)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n} \quad (\text{ט})$$

$$(-8, 2), R = 5, a = -3 \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5^n} \cdot \frac{5^{(n+1)}}{n+1} = 5, a = -3, c_n = \frac{n}{5^n} \quad \underline{\text{פתרון:}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n(n^2+1)} \quad (י)$$

$$(-4, 4), R = 4, a = 0 \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

$$,a = 0, c_n = \frac{n}{4^n(n^2+1)} \quad \underline{\text{פתרון:}}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4^n(n^2+1)} \cdot \frac{4^{n+1}(n^2+2n+2)}{n+1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{4^{n+1}}{4^n} \cdot \frac{n^2+2n+2}{n^2} \right) = 1 \cdot 4 \cdot 1 = 4.$$

4. בעזרת נוסחת בינום של Newton רשום את הפיתוח של הפונקציה $f(x)$ ליד הנקודה $x = 0$:

$$f(x) = \sqrt{1+x} \quad (\text{א})$$

פתרון: כאן $\lambda = \frac{1}{2}$

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$$

נשתמש בנוסחת בינום של I. Newton:

$$\begin{aligned} (x+1)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 2\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} x^n = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-3}{2}\right)}{n!} x^n = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^{n+1} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2n-3}{2} x^n = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{n! 2^n} x^n \end{aligned}$$

לביטויים כמו $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots$ יש סימן מיוחד:

$$(2n+1)!! := 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$$

למשל, $3!! = 1 \cdot 3 = 3$, $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. לכן את התוצאה שלנו ניתן לרשום

בצורה

$$(x+1)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{n! 2^n} x^n.$$

הנוסחה הזאת מציגה את $\sqrt{1+x}$ עבור כל $-1 < x < 1$. (שימו לב שעבור $n = 1$ הביטוי

$(2n-3)!!$ חסר משמעות, לכן את האיבר הלינארי כתבנו בנפרד).

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (\text{ב})$$

$$\text{תשובה: } \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{עבור } -1 < x < 1.$$

פתרון: בנוסחה

$$(1+x)^\lambda = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-n+1)}{n!} x^n$$

נשים $\lambda = -1$, אזי

$$\begin{aligned} (1+x)^{-1} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)(-1-1) \cdots (-n)}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1 \cdot 2 \cdots n}{n!} x^n = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n. \end{aligned}$$

שימו לב: השימוש בנוסחת סכום של הטור ההנדסי היה מביא אותנו לאותה תוצאה.

$$f(x) = \sqrt[5]{1+x} \quad (g)$$

פתרון: בנוסחה

$$(1+x)^\lambda = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-n+1)}{n!} x^n$$

נשים $\lambda = \frac{1}{5}$, אזי

$$(1+x)^{\frac{1}{5}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} - 1\right) \left(\frac{1}{5} - 2\right) \cdots \left(\frac{1}{5} - n + 1\right)}{n!} x^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{5} \left(-\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{9}{5}\right) \cdots \left(-\frac{5n-6}{5}\right)}{n!} x^n = 1 + \frac{x}{5} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdots (5n-6)}{5^n n!} x^n.$$

(שימו לב שעבור $n = 1$ הביטוי $(5n-6)!!$ חסר משמעות, לכן את האיבר הלינארי כתבנו

בנפרד).

5. מצא את רדיוס ההתכנסות של בינום Newton, ז"א של פיתוח הפונקציה $f(x) = (1+x)^\lambda$ לטור חזקות ליד $a = 0$.

תשובה: $R = \infty$ כאשר $\lambda \in \mathbb{N}$, $R = 1$ כאשר $\lambda \notin \mathbb{N}$.

פתרון: נתבונן בשני המקרים בנפרד: $\lambda \in \mathbb{N}$ ו- $\lambda \notin \mathbb{N}$.

המקרה $\lambda \in \mathbb{N}$: הביטוי $f(x) = (1+x)^\lambda$ הוא פולינום (לפי נוסחת הבינום הרגיל!), לכן $R = \infty$. שימו לב:

במקרה הזה $c_n = 0$ כמעט לכל n , כלן אי אפשר להשתמש כאן בנוסחה $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$

המקרה $\lambda \notin \mathbb{N}$: כאן יותר נוח להשתמש בנוסחת הנסיגה עבור מיקדמים c_n בנוסחת בינום Newton:

$$c_{n+1} = \frac{\lambda - n}{n+1} c_n.$$

אכן

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{\lambda - n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + \frac{1}{n}}{\frac{\lambda}{n} - 1} \right| = 1.$$

עבודת בית 9

1. מצא את הפיתוח של הפונקציה $f(x)$ לטור חזקות סביב הנקודה נקודה $x = 0$. מצא את תחום

ההתכנסות:

$$f(x) = \ln(1 - x^2) \quad (\text{א})$$

$$\ln(1 - x^2) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} \quad \text{עבור } |x| < 1. \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: נגדיר $t := -x^2$ אזי

$$\ln(1 + t) \stackrel{0}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x^2)^n}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$$

* * *

ניתן לבדוק את האיבריס הראשוניים של הפיתוח ע"י תוכנה MAXIMA. לדוגמה:

```
define(f(x),log(1-x^2));
```

```
taylor(f(x),x,0,20);
```

$$\ln \sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}} \quad (\text{ב})$$

$$\text{תשובה: } \ln \sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{5(2m+1)} x^{2m+1} \quad \text{עבור } |x| < 1$$

$$\text{פתרון: קודם כל } \ln \sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{5} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] \text{ עתה אפשר להשתמש בפיתוח}$$

של הפונקציה $\ln$ בנקודה $x = 0$:

$$\ln \sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{5} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] =$$

$$= \frac{1}{5} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x)^n}{n} \right) = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^{n+1} + 1] \frac{x^n}{n} =$$

$$= \frac{2}{5} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{2m+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{5(2m+1)} x^{2m+1}.$$

מכיוון ש-

$$(-1)^{n+1} + 1 = \begin{cases} (-1)^{2m+1} + 1 = -1 + 1 = 0, & n = 2m \\ (-1)^{2m} + 1 = 1 + 1 = 2, & n = 2m + 1 \end{cases}$$

הערה: נרשום כאן מפורש את המקדם שלפני x^n בטור שקיבלנו:

$$c_n = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ \frac{2}{5n}, & n = 2m + 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \ln(x^2 - 10x + 9) \quad (ג)$$

$$\mathcal{D} = (-1, 1), 2 \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1 - 9^n}{n \cdot 9^n} x^n \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: עבור $|x| < 1$ מתקיים

$$\begin{aligned} \ln(x^2 - 10x + 9) &= \ln[(x-1)(x-9)] = \ln[(1-x)(9-x)] = \ln \left[9(1-x) \left(1 - \frac{x}{9} \right) \right] = \\ &= \ln 9 + \ln(1-x) + \ln \left(1 - \frac{x}{9} \right) = 2 \ln 3 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 9^n} = \\ &= 2 \ln 3 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^n}{n} + \frac{x^n}{n \cdot 9^n} \right] = 2 \ln 3 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+9^n}{n \cdot 9^n} x^n = \\ &= 2 \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1-9^n}{n \cdot 9^n} x^n. \end{aligned}$$

* * *

ניתן לבדוק את האיברים הראשונים של הפיתוח ע"י תוכנה MAXIMA:

```
define(f(x),log(x^2-10*x+9));
```

```
taylor(f(x),x,0,20);
```

2. פתח את הפונקציה $y(x)$ לטור חזקות ליד $x = 0$:

$$y(x) = \arctan x \quad (\text{א})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: $\arctan x$ היא פונקציה קדומה ל- $Y(x) = \frac{1}{1+x^2}$ שמקיימת את התנאי $Y(0) = 0$.

נפתח את $Y(x)$ לטור חזקות ליד $x = 0$:

$$Y(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

אינטגרצית איבר-איבר נותנת ישר

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

שימו לב שבפיתוח מופיעות חזקות אי-זוגיות בלבד. זה מסתדר עם העובדה שהפונקציה

$$\arctan x \text{ אי-זוגית, ז"א } \arctan(-x) = -\arctan x.$$

* * *

ניתן לבדוק את האיבריס הראשוניים של הפיתוח ע"י תוכנה MAXIMA:

```
define(f(x),atan(x));
```

```
taylor(f(x),x,0,20);
```

(ב) פתח את הפונקציה $y(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$ לטור חזקות ליד $x=0$:

תשובה: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n$, עבור $-1 < x < 1$

פתרון: (דרך 1)

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} \right)'' = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)'' = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)'' = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \left\| \begin{array}{l} m := n-2 \\ n = m+2 \\ m = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right\| = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)x^m = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n \end{aligned}$$

פתרון: (דרך 2)

לאור העובדה $\frac{1}{(1-x)^3} = (1-x)^{-3}$, נציב $\lambda = -3$ נוסחת בינום של Newton $(1+x)^\lambda =$

$$: 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1)}{n!} x^n$$

$$\begin{aligned} (1+x)^{-3} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)(-4)(-5)\cdots(-n-2)}{n!} (-x)^n = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+2)}{n!} (-1)^n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+2)}{2 \cdot n!} x^n = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{2 \cdot n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n \end{aligned}$$

$$y(x) = \frac{1}{(1+x)^3} \quad (2)$$

3. מצא את הערך המוחלט $|\lambda|$ למספר הנתון:

$$\lambda = 3i \quad (\text{א})$$

$$|\lambda| = 3 \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

$$\lambda = -2 \quad (\text{ב})$$

$$|\lambda| = 2 \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

$$\lambda = 1 + i \quad (\text{ג})$$

$$|\lambda| = \sqrt{2} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

$$\lambda = 2 - 5i \quad (\text{ד})$$

$$|\lambda| = \sqrt{29} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

4. רשום את המספר λ בצורה $\mu + i\omega$:

$$\lambda = (1 + i)(1 - i) \quad (\aleph)$$

תשובה: $\text{Im}(\lambda) = 0, \text{Re}(\lambda) = 2, \lambda = 2$

פתרון: נשתמש בנוסחה $(s + t)(s - t) = s^2 - t^2$:

$$(1 + i)(1 - i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

$$\lambda = 1 + i^{123} \quad (\text{ב})$$

$$\text{Im}(\lambda) = -1, \text{Re}(\lambda) = 0, \lambda = -i \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: נשתמש בתכונת החזקות:

$$i^{123} = i^{120+3} = i^{120} \cdot i^3 = i^{4 \cdot 30} \cdot i^{2+1} = (i^4)^{30} \cdot i^2 \cdot i = 1^{30} \cdot (-1) \cdot i = -i$$

$$z = \frac{2+i}{3-4i} \quad (\text{ג})$$

$$\text{Im}(\lambda) = \frac{11}{25}, \text{Re}(\lambda) = \frac{2}{25}, \lambda = \frac{2}{25} + \frac{11}{25}i \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון:

$$\frac{2+i}{3-4i} = \frac{(2+i)\overline{(3-4i)}}{(3-4i)\overline{(3-4i)}} = \frac{(2+i)(3+4i)}{3^2+4^2} = \frac{2 \cdot 3 + i \cdot 3 + 2 \cdot 4i + i \cdot 4i}{9+16} =$$

$$= \frac{6+3i+8i+4i^2}{25} = \frac{6+3i+8i+4 \cdot (-1)}{25} = \frac{2+11i}{25} = \frac{2}{25} + \frac{11}{25}i$$

$$z = \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} \quad (\text{ד})$$

$$\text{Im}(\lambda) = 0, \text{Re}(\lambda) = -\frac{2}{5}, \lambda = -\frac{2}{5} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \frac{1+2i}{3-4i} &= \frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{(3+4i) + 2i(3+4i)}{3^2+4^2} = \frac{3+4i+6i+8i^2}{25} = \\ &= \frac{3+4i+6i-8}{25} = \frac{-5+10i}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \end{aligned}$$

$$\frac{2-i}{5i} = \frac{(2-i)(-5i)}{25} = \frac{-5-10i}{25} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

$$\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i - \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i = -\frac{2}{5}.$$

$$\lambda = (2 + 3i)(3 - 2i) \quad (\text{ה})$$

$$\text{Im}(\lambda) = 5, \text{Re}(\lambda) = 12, \lambda = 12 + 5i \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: נבצע את פתיחת הסוגריים:

$$\begin{aligned} (2 + 3i)(3 - 2i) &= 2 \cdot 3 + 3i \cdot 3 + 2 \cdot (-2i) + 3i \cdot (-2i) = 6 + 9i - 4i - 6i^2 = \\ &= 6 + 5i - 6 \cdot (-1) = 6 + 5i + 6 = 12 + 5i \end{aligned}$$

$$\lambda = (3 - 2i)^2 \quad (\text{ו})$$

$$\text{Im}(\lambda) = -12, \text{Re}(\lambda) = 5, \lambda = 5 - 12i \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: נשתמש בנוסחה אלגברית $(s + t)^2 = s^2 + 2st + t^2$ ונעשה כינוס איברים דומיים:

$$\begin{aligned} (3 - 2i)^2 &= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot (-2i) + (-2i)^2 = 9 + 6 \cdot (-2) \cdot i + (-2)^2 \cdot i^2 = \\ &= 9 - 12i + 4 \cdot (-1) = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i \end{aligned}$$

$$\lambda = (1 + i)^3 \quad (\text{ז})$$

$$\text{Im}(\lambda) = 2, \text{Re}(\lambda) = -2, \lambda = -2 + 2i \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: נשתמש בנוסחה אלגברית $(s + t)^3 = s^3 + 3s^2t + 3st^2 + t^3$ ונעשה כינוס איברים

דומיים:

$$\begin{aligned} (1 + i)^3 &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i + 3(-1) + i^2 \cdot i = \\ &= 1 + 3i - 3 + (-1) \cdot i = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{1+2i}{2+3i} \quad (\text{ח})$$

$$\text{Im}(\lambda) = \frac{1}{13}, \text{Re}(\lambda) = \frac{8}{13}, \lambda = \frac{8}{13} + \frac{1}{13}i \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: נכפול את המונה ואת המכנה באותו מספר $\overline{(2+3i)} = (2-3i)$ ונשתמש בעובדה

$$:(2+3i)\overline{(2+3i)} = (2+3i)(2-3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4 + 9 = 13 \quad \text{ש-}$$

$$\frac{1+2i}{2+3i} = \frac{(1+2i)\overline{(2+3i)}}{(2+3i)\overline{(2+3i)}} = \frac{(1+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 - 1 \cdot 3i + 2i \cdot 2 - 2i \cdot 3i}{13} = \frac{2 - 3i + 4i - 6i^2}{13} =$$

$$= \frac{2+i+6}{13} = \frac{8+i}{13} = \frac{8}{13} + \frac{1}{13}i$$

5. מצא את e^{Ax} :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\aleph)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ב})$$

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

$$\underline{\text{פתרון:}} \quad \text{לפי ההגדרה, } e^{Ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n, \text{ נחשב את } A^n:$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

כאשר I מסמן את מטריצת היחידה. מכאן נקבל

$$A^3 = A^2 A = -I A = -A$$

$$A^4 = A^2 A^2 = (-I)(-I) = I$$

$$A^5 = A^4 A = I A = A$$

$$A^6 = A^5 A = A A = -I$$

ובכלל

$$A^n = \begin{cases} (-1)^k I & n = 2k \\ (-1)^k A & n = 2k + 1 \end{cases}$$

לכן ניתן לפרק את הסכום $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n$ לשני סכומים:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} A^{2k} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} A^{2k+1} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} I + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} A = \\
 &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right) I + \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) A = I \cos x + A \sin x = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sin x = \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin x \\ -\sin x & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ג})$$

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{פתרון:}} \text{ נחשב כמה חזקות ראשונות של המטריצה}$$

$$(Ax)^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(Ax)^1 = Ax = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(Ax)^2 = A^2 x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(Ax)^3 = A^3 x^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(Ax)^n = 0, \quad n > 2$$

$$e^{Ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (Ax)^n = I + Ax + \frac{1}{2} (Ax)^2 = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (ד)$$

פתרון: המטריצה משולשית עליונה ממש, לכן היא נילפוטנטית. נמצא את החזקה קטנה ביותר

כך ש- $A^k = 0$:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

רואים ש- $A^3 = 0$ לכן

$$\begin{aligned} e^{Ax} &= A^0 x^0 + Ax + \frac{x^2}{2} A^2 = I + Ax + \frac{x^2}{2} A^2 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & 2x + \frac{3}{2}x^2 \\ 0 & 1 & 3x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{ה})$$

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{פתרון:}} \quad \text{ניתן לפרק את המטריצה } A \text{ לסכום של מטריצה אלכסונית}$$

$$\text{ומטריצה נילפוטנטית } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : A = D + N \quad \text{חישוב ישר נותן } DN = 0 \text{ ו-}$$

$$ND = 0, \text{ לכן } DN = ND \text{ וניתן להשתמש בנוסחה } e^{Ax} = e^{Dx}e^{Nx}.$$

$$e^{xN} = I + xN = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N^2 = 0 \text{ בגלל ש-}$$

$$e^{Dx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix}, D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \text{ בגלל ש-}$$

סופית,

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (v)$$

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} & \frac{x^2 e^{2x}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & xe^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-3x} & xe^{-3x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-3x} \end{pmatrix} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{פתרון:}} \text{ נשים לב ש- } A = D + N \text{ כאשר}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ו-}$$

קל לבדוק שהמטריצות הללו מתחלפות: $DN = ND$,

לכן $e^{Ax} = e^{Dx} e^{Nx}$. נחשב את e^{Dx} :

$$e^{Dx} = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-3x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-3x} \end{pmatrix},$$

$$\cdot (Dx)^n = \begin{pmatrix} (2x)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2x)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2x)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3x)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-3x)^n \end{pmatrix} \quad \text{בגלל ש-}$$

כדי לקבל ביטוי למטריצה e^{Nx} , נחשב את חזקות של N :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^n = 0, \quad n > 2$$

לכן

$$e^{Nx} = I + Nx + \frac{1}{2}N^2x^2 = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

סופית,

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} (2x)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2x)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2x)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3x)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-3x)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} & \frac{x^2 e^{2x}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & xe^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-3x} & xe^{-3x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-3x} \end{pmatrix}$$

6. מצא את הערכים עצמיים ואת הוקטורים עצמיים של המטריצה A :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{א})$$

$$\text{תשובה: } u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -1, \lambda_1 = 1$$

פתרון: המשוואה האופיינית של מטריצה 2×2 נראת ככה:

$$\lambda^2 - \text{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A) = 0, \text{ במקרה שלמו,}$$

$$\text{tr } A = -2 + 2 = 0$$

$$\det A = (-2) \cdot 2 - 1 \cdot (-3) = -1$$

לכן המשוואה האופיינית היא $\lambda^2 - 1 = 0$, והערכים העצמיים הם $\lambda_2 = -1, \lambda_1 = 1$.

כיוון ששני הערכים עצמיים שונים זה מזה, למטריצה A יש שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית. נמצא טוֹתם כעת.

נמצא את הוקטור העצמי u_1 השייך לערך עצמי $\lambda_1 = 1$:

$$\text{נסמן } u_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \text{ אזי } u_1 \text{ פתרון למשוואה } (A - I)u = 0 \text{ או}$$

$$\text{מתאים כל פתרון לא טריוויאלי} \quad \begin{pmatrix} -2-1 & 1 \\ -3 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ (שונה מ-0), נגיד, } \xi_1 = 1, \xi_2 = 3 \text{ או}$$

נמצא את הוקטור העצמי u_2 השייך לערך עצמי $\lambda_2 = -1$:

$$\text{נסמן } u_2 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \text{ אזי } u_2 \text{ פתרון למשוואה } (A + I)u = 0 \text{ או}$$

מתאים כל פתרון לא טריוויאלי

$$\begin{pmatrix} -2+1 & 1 \\ -3 & 2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(שונה מ-0), נגיד, $\xi_1 = 1, \xi_2 = 1$ או $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ב) מצא את הערכים עצמיים ואת הוקטורים עצמיים של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$:

תשובה: $\lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$
 $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{5} + 3 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5} - 3 \end{pmatrix}$

פתרון:

i. נמצא את הפולינום האופייני:

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(-2 - \lambda) + 1 =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda + 2) + 1 = (\lambda^2 + \lambda - 2) + 1 = \lambda^2 + \lambda - 1.$$

ניתן לקבל את הפולינום האופייני בדרך יותר קצרה:

$$f_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det A = \lambda^2 - [1 + (-2)]\lambda + [1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1)] = \lambda^2 + \lambda - 1$$

ii. פתרון למשוואה האופיינית:

$$f_A(\lambda) = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

לכן הערכים העצמיים של המטריצה A הם $\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ו- $\lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

iii. נמצא וקטורים עצמיים.

א'. עבור $\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$:

הרכיבים של וקטור עצמי $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ הם פתרונות למשוואה אלגברית לינארית

$$\begin{aligned} \left(A - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} I \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= 0 \\ \left(A - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} I \right) &= 0 \\ \begin{pmatrix} 1 - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} & 1 \\ -1 & -2 - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} -\frac{3 - \sqrt{5}}{2} a + b \\ -a - \left(2 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) b \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{5}}{2} a + b = 0 \\ -a - \left(2 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

למעשה, שתי המשוואות תלויות זו בזו, לכן אנחנו צריכים למצוא פתרון כלשהו

לא טריוויאלי למשוואה

$$-\frac{3 - \sqrt{5}}{2} a + b = 0$$

נקח $a = 2, b = \sqrt{5} - 3$, ז"א שוקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_1 הוא

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5} - 3 \end{pmatrix}$$

ב'. עבור $\lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$:

הרכיבים של וקטור עצמי $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ הם פתרונות למשוואה אלגברית לינארית

$$\begin{aligned} \left(A + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} I \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= 0 \\ \left(A + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} I \right) &= 0 \\ \begin{pmatrix} 1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} & 1 \\ -1 & -2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{3 + \sqrt{5}}{2} a + b \\ -a - \left(2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) b \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a + b = 0 \\ -a - \left(2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

למעשה, שתי המשוואות תלויות זו בזו, לכן אנחנו צריכים למצוא פתרון כלשהו

לא טריוויאלי למשוואה

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} a + b = 0$$

נקח $a = -2$, $b = \sqrt{5} + 3$, ז"א שוקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_2 הוא

$$u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{5} + 3 \end{pmatrix}$$

(ג) נמצא את הערכים העצמיים ואת הוקטורים עצמיים של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

תשובה: $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -i, \lambda_1 = i, u_2 = \overline{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

פתרון:

i. נמצא את הפולינום האופייני:

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

ii. פתרון למשוואה האופיינית:

$$f_A(\lambda) = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

לכן הערכים העצמיים של המטריצה A הם $\lambda_1 = i$ ו- $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -i$.

iii. נמצא וקטורים עצמיים. האיבים של המטריצה A הם מספרים ממשיים, לכן גם

המקדמים של $f_A(\lambda)$ ממשיים. בגלל זה גם ההרכים העצמיים וגם הוקטורים עצמיים

צמודים זה לזה:

$$\lambda_2 = \overline{\lambda_1} \quad u_2 = \overline{u_1}$$

לכן נמצא את u_1 : הרכיבים של וקטור עצמי $u_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ הם פתרונות למשוואה

אלגברית לינארית

$$\begin{aligned}
 (A - iI) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= 0 \\
 \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= 0 \\
 \begin{pmatrix} -ia + b \\ -a - ib \end{pmatrix} &= 0 \\
 \begin{cases} -ia + b = 0 \\ -a - ib = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

למעשה, שתי המשוואות תלויות זו בזו, לכן אנחנו צריכים למצוא פתרון כלשהו לא טריוויאלי

למשוואה

$$-ia + b = 0$$

נקח $a = 1, b = i$, אז שוקטור עצמי ששייך לערך עצמי λ_1 הוא

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

כמו הזכרנו קודם, $u_2 = \overline{u_1}$ לכן

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

(ד) מצא את הערכים עצמיים ואת הוקטורים עצמיים של המטריצה $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

תשובה: $\lambda_2 = -1, \lambda_1 = 0, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

פתרון: המשוואה האופיינית של מטריצה 2×2 נראת ככה: $\lambda^2 - \text{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A) = 0$. במקרה שלמו,

$$\text{tr } A = -4 + 3 = -1$$

$$\det A = (-4) \cdot 3 - (-2) \cdot 6 = 0$$

לכן המשוואה האופיינית היא $\lambda^2 + \lambda = 0$ או $\lambda(\lambda + 1) = 0$, והערכים העצמיים הם $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$.

כיוון ששני הערכים עצמיים שונים זה מזה, למטריצה A יש שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית. נמצא טוֹתם כעת.

נמצא את הוקטור העצמי u_1 השייך לערך עצמי $\lambda_1 = 0$:

נסמן $u_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ אזי u_1 פתרון למשוואה $Au = 0$ או

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מתאים כל פתרון לא טריוויאלי (שונה מ-0), נגיד, $\xi_1 = 1$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ או $\xi_2 = -2$

נמצא את הוקטור העצמי u_2 השייך לערך עצמי $\lambda_2 = -1$:

נסמן $u_2 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ אזי u_2 פתרון למשוואה $(A + I)u = 0$ או

מתאים כל פתרון לא

$$\begin{pmatrix} -4+1 & -2 \\ 6 & 3+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

טריוויאלי, נגיד, $\xi_1 = 2, \xi_2 = -3$ או $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

7. מצא את הערכים עצמיים ואת הוקטורים עצמיים של המטריצה A (אחד מערכים עצמיים שווה ל-1):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\aleph)$$

(ב) מצא את הערכים עצמיים ואת הוקטורים עצמיים של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix} \quad (\text{אחד מערכים עצמיים שווה ל-1})$$

עבודת בית 10

1. רשום את המשוואות הבאות כמערכת של מד"ר-1. כתוב בנפרד את המטריות A ו- b .

$$y'' + y = \frac{x+6}{x^4} \quad (\text{א})$$

(ב) רשום את המשוואה $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$ כמערכת של מד"ר-1. כתוב בנפרד את המטריצות A ו- b .

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos 2x} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{תשובה:}$$

פתרון: נסמן $y_1 := y, y_2 := y'$ ונציב במשוואה: $y_2' + 4y_1 = \frac{1}{\cos 2x}$ לכן המשוואה

הנתונה שקולה למערכת

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -4y_1 + \frac{1}{\cos 2x} \end{cases}$$

או

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos 2x} \end{pmatrix}$$

(ג) רשום את המשוואה $y'' - 2y' + y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$ כמערכת של מד"ר-1. כתוב בנפרד את המטריצות A ו- b .

$$b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x^2+2x+2}{x^3} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: נסמן $y := y_1, y_2 := y'$ ונציב במשוואה: $y_2' - 2y_2 + y_1 = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$ לכן

המשוואה הנתונה שקולה למערכת

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 2y_2 - y_1 + \frac{x^2+2x+2}{x^3} \end{cases}$$

או

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x^2+2x+2}{x^3} \end{pmatrix}$$

(ד) רשום את המשוואה $y'' + 4y' = \frac{16}{1 - e^{-4x}}$ כמערכת של מד"ר-1. כתוב בנפרד את המטריצות A ו- b .

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{16}{1 - e^{-4x}} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: נסמן $y := y_1, y_2 := y'$ ונציב במשוואה: $y_2' + 4y_2 = \frac{16}{1 - e^{-4x}}$ לכן המשוואה

הנתונה שקולה למערכת

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -4y_2 + \frac{16}{1 - e^{-4x}} \end{cases}$$

או

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{16}{1 - e^{-4x}} \end{pmatrix}$$

(ה) רשום את המשוואה $y''' - 6y'' + 9y' = e^{3x} \cos 2x$ כמערכת של מד"ר-1. כתוב בנפרד את המטריצות A ו- b .

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{3x} \cos 2x \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{תשובה:}$$

פתרון: נסמן $y_1 := y, y_2 := y', y_3 := y''$ ונציב במשוואה: $y_3' - 6y_3 + 9y_2 = e^{3x} \cos 2x$

לכן המשוואה הנתונה שקולה למערכת

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = 6y_3 - 9y_2 + e^{3x} \cos 2x \end{cases}$$

או

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 6 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{3x} \cos 2x \end{pmatrix}$$

(ו) רשום את המשוואה $y''' - 3y' + 2y = 0$ כמערכת של מד"ר-1. כתוב בנפרד את המטריצות A ו- b .

$$b = 0, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{תשובה:}$$

פתרון: נסמן $y_3 := y'', y_2 := y', y_1 := y$

ונציב במשוואה: $y_3' - 3y_2 + 2y_1 = 0$ לכן המשוואה הנתונה שקולה למערכת

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = 3y_2 - 2y_1 \end{cases}$$

או

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} y$$

2. מצא את המטריצה היסודית ואת הפתרון הכללי:

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2 \\ y_2' = -3y_1 + 2y_2 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ y_2(x) = 3C_1 e^x + C_2 e^{-x} \end{cases}, \Psi(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 3e^x & e^{-x} \end{pmatrix} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: המשוואה היא משוואה לינארית, $y' = Ay$, עם $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

המשוואה האופיינית של המטריצה A , $\lambda^2 - \text{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A) = 0$, היא $\lambda^2 - 1 = 0$, לכן הערכים העצמיים הם $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. הוקטורים העצמיים המתאימים: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, לכן המטריצה היסודית של המשוואה: $\Psi(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 3e^x & e^{-x} \end{pmatrix}$. הפתרון הכללי של המשוואה נתון ע"י הנוסחה

$$y(x) = \Psi(x)C = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 3e^x & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ 3C_1 e^x + C_2 e^{-x} \end{pmatrix}$$

או, בצורה יותר מפורטת,

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ y_2(x) = 3C_1 e^x + C_2 e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= -y_2 - 2y_1 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \cos x - \sin x & \cos x + \sin x \\ -2 \cos x & -2 \sin x \end{pmatrix} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1(\cos x - \sin x) + C_2(\cos x + \sin x) \\ y_2(x) = -2C_1 \cos x - 2C_2 \sin x \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{פתרון:}} \quad \text{המשוואה היא משוואה לינארית, } y' = Ay \text{ עם}$$

המשוואה האופיינית של המטריצה A ,

$$\lambda^2 - \text{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A) = 0, \text{ היא } \lambda^2 + 1 = 0, \text{ לכן הערכים העצמיים הם } \lambda = \lambda_1 = i, \lambda_2 = \bar{\lambda} = -i.$$

$$u = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} \text{ הוקטור העצמי המתאים ל-}\lambda:$$

$$z(x) = e^{ix} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)e^{ix} \\ -2e^{ix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)(\cos x + i \sin x) \\ -2(\cos x + i \sin x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos x - \sin x) + i(\cos x + \sin x) \\ -2 \cos x - 2i \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x - \sin x \\ -2 \cos x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ -2 \sin x \end{pmatrix}$$

לכן המערכת היסודית של פתרונות

$$s_1(x) = \Re z(x) = \begin{pmatrix} \cos x - \sin x \\ -2 \cos x \end{pmatrix} \quad s_2(x) = \Im z(x) = \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ -2 \sin x \end{pmatrix}$$

והמטריצה היסודית של המשוואה:

$$\Psi(x) = (s_1(x), s_2(x)) = \begin{pmatrix} \cos x - \sin x & \cos x + \sin x \\ -2 \cos x & -2 \sin x \end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי של המשוואה נתון ע"י הנוסחה

$$y(x) = \Psi(x)C = \begin{pmatrix} \cos x - \sin x & \cos x + \sin x \\ -2 \cos x & -2 \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1(\cos x - \sin x) + C_2(\cos x + \sin x) \\ -2C_1 \cos x - 2C_2 \sin x \end{pmatrix}$$

או, בצורה מפורטת,

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1(\cos x - \sin x) + C_2(\cos x + \sin x) \\ y_2(x) = -2C_1 \cos x - 2C_2 \sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 \end{cases} \quad (ג)$$

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ y_2(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{cases}, \Psi(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{פתרון:}} \quad \text{המשוואה היא משוואה לינארית, } y' = Ay, \text{ עם}$$

המשוואה האופיינית של המטריצה A ,

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A) = 0, \lambda^2 + 1 = 0, \text{ לכן הערכים העצמיים הם } \lambda = \lambda_1 = i, \lambda_2 = \bar{\lambda} = -i. \text{ הוקטור העצמי המתאים ל-}\lambda: u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$z(x) = e^{ix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ix} \\ ie^{ix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x + i \sin x \\ i \cos x - \sin x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x + i \sin x \\ -\sin x + i \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

לכן המערכת היסודית של פתרונות

$$s_1(x) = \Re z(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} \quad s_2(x) = \Im z(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

והמטריצה היסודית של המשוואה:

$$\Psi(x) = (s_1(x), s_2(x)) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי של המשוואה נתון ע"י הנוסחה

$$y(x) = \Psi(x)C = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{pmatrix}$$

או, בצורה מפורטת,

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ y_2(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' + 4y_1 + 2y_2 = 0 \\ y_2' - 6y_1 - 3y_2 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{(אחד מערכים עצמיים שווה ל-1).} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1' = 2y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3 \\ y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3 \end{array} \right. \quad (\text{ה})$$

$$(א) \text{ אחד מערכים עצמיים שווה ל-1.} \quad \begin{cases} y_1' = 4y_2 - 2y_3 - 3y_1 \\ y_2' = y_3 + y_1 \\ y_3' = 6y_1 - 6y_2 + 5y_3 \end{cases} \quad (ו)$$

עבודת בית 11

1. רשום את המד"ר-2 כמערכת $y' = Ay$ של שתי משוואות מסדר 1 ומצא את המטריצה היסודית

ואת הפתרון הכללי:

$$(א) \quad y'' + y = 0.$$

$$y'' - 5y' + 4y = 0 \quad (\text{ב})$$

פתרון:

1. נגדיר שתי פונקציות נעלם חדשות: $w_1 := y$ ו- $w_2 := y' = w_1'$ אזי את המשוואה

$$y'' - 5y' + 4y = 0 \quad \text{ניתן לרשום בצורה} \quad w_2' - 5w_2 + 4w_1 = 0 \quad \text{יחד אם התנאי}$$

$$w_1' = w_2$$

$$\begin{cases} w_1' = w_2 \\ w_2' = -4w_1 + 5w_2 \end{cases}.$$

2. נגדיר

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

אזי ניתן לרשון את המערכת בצורה

$$w' = Aw.$$

3. נמצא את הערכים העצמיים של המטריצה $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ למשוואה האופיינית,

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \quad \text{יש שני שורשים שונים: } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4. \quad \text{לכן ניתן למצוא למטריצה}$$

A שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית.

עבור $\lambda_1 = 1$, וקטור $u = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ מקיים את התנאי $(A - I)u = 0$, או

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

. פתרון לא טריוויאלי, למשל, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, לכן $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

באופן דומה, עבור $\lambda_2 = 4$, פותרים את המשוואה האלגברית הלינארית

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

. כאן נקח את $\alpha_2 = 1, \alpha_1 = 4$ כפתרון (לא טריוויאלי). לכן

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4. המטריצה היסודית היא

$$\Psi(x) = (e^x u_1, e^{4x} u_2) = \begin{pmatrix} e^x & e^{4x} \\ e^x & 4e^{4x} \end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי הוא

$$\Psi(x)C = \begin{pmatrix} e^x & e^{4x} \\ e^x & 4e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^x + C_2 e^{4x} \\ C_1 e^x + 4C_2 e^{4x} \end{pmatrix}.$$

$$y'' + 3y' - 4y = 0 \quad (\alpha)$$

2. רשום את המערכת הנתונה בצורה $y' = Ay + b(x)$, ובעזרת המטריצה היסודית מצא את הפתרון הכללי למערכת:

$$(א) \quad \begin{cases} y_1' &= -2y_1 + y_2 - e^{2x} \\ y_2' &= -3y_1 + 2y_2 + 6e^{2x} \end{cases}$$

$$\text{תשובה:} \quad \begin{cases} y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 2e^{2x} \\ y_2(x) = 3C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 9e^{2x} \end{cases}$$

פתרון: המשוואה היא משוואה לינארית, $y' = Ay + b(x)$ עם $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ ו- $b(x) = \begin{pmatrix} -e^{2x} \\ 6e^{2x} \end{pmatrix}$.

את המטריצה היסודית של המשוואה מצאנו קודם: $\Psi(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 3e^x & e^{-x} \end{pmatrix}$. הפתרון הכללי של המשוואה נתון ע"י הנוסחה

$$y(x) = \Psi(x) \left[C + \int_0^x \Psi^{-1}(t) b(t) dt \right] \quad \text{כאשר } C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 3e^x & e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$\det \Psi(x) = -2$$

$$\Psi^{-1}(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{-x} & e^{-x} \\ 3e^x & -e^x \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{-1}(x)b(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{-x} & e^{-x} \\ 3e^x & -e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{2x} \\ 6e^{2x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7e^x \\ -9e^{3x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 3e^x & e^{-x} \end{pmatrix} \left[C + \frac{1}{2} \int_0^x \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{-t} \\ 3e^t & -e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 6e^{2t} \end{pmatrix} dt \right] = \\ &= \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 3e^x & e^{-x} \end{pmatrix} \left[C + \frac{1}{2} \int_0^x \begin{pmatrix} 7e^t \\ -9e^{3t} \end{pmatrix} dt \right] = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 3e^x & e^{-x} \end{pmatrix} \left[C + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \int_0^x e^t dt \\ -9 \int_0^x e^{3t} dt \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 3e^x & e^{-x} \end{pmatrix} \left[C + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7(e^x - 1) \\ -3(e^{3x} - 1) \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{7}{2} e^x - \frac{3}{2} e^{-x} + 2e^{2x} \\ 3C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{21}{2} e^x + \frac{3}{2} e^{-x} + 9e^{2x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(x) = (C_1 - \frac{7}{2}) e^x + (C_2 + \frac{3}{2}) e^{-x} + 2e^{2x} \\ y_2(x) = (3C_1 - \frac{21}{2}) e^x + (C_2 + \frac{3}{2}) e^{-x} + 9e^{2x} \end{array} \right. \quad \text{לכן}$$

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 2e^{2x} \\ y_2(x) = 3C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 9e^{2x} \end{cases}$$

נכתוב C_1 במקום $C_1 - \frac{7}{2}$ ו- C_2 במקום $C_2 + \frac{3}{2}$, אזי הפתרון יקבל צורה

* * *

בדיקת הפתרון ע"י התוכנה MAXIMA:

```
define(y1(x), C1*%e^x+C2*%e^(-x)+2*%e^(2*x));
define(y2(x), 3*C1*%e^x +C2*%e^(-x)+9*%e^(2*x));
define(ypr1(x), diff(y1(x), x));
define(ypr2(x), diff(y2(x), x));
fullratsimp(ypr1(x)+2*y1(x)-y2(x)+%e^(2*x));
fullratsimp(ypr2(x)+3*y1(x)-2*y2(x)-6*%e^(2*x));
```

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 + y_2 - \cos x \\ y_2' &= -y_2 - 2y_1 + \cos x + \sin x \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$\begin{cases} y_1 &= (C_1 - C_2) \sin x - (x + C_1 + C_2) \cos x \\ y_2 &= (x + 2C_1) \cos x + (x + 2C_2) \sin x \end{cases} \quad \textbf{תשובה:}$$

פתרון: המשוואה היא משוואה לינארית, $y' = Ay + b(x)$ עם $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$b(x) = \begin{pmatrix} -\cos x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix}$$

את המטריצה היסודית של המשוואה מצאנו קודם: $\Psi(x) = \begin{pmatrix} \cos x - \sin x & \cos x + \sin x \\ -2 \cos x & -2 \sin x \end{pmatrix}$

הפתרון הכללי של המשוואה נתון ע"י הנוסחה $y(x) = \Psi(x) \int \Psi^{-1}(x)g(x) dx$

$$\det \Psi(x) = -2 \sin x (\cos x - \sin x) + 2 \cos x (\cos x + \sin x) = 2$$

$$\Psi^{-1}(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \sin x & -(\cos x + \sin x) \\ 2 \cos x & \cos x - \sin x \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\Psi^{-1}(x)b(x) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \sin x & -(\cos x + \sin x) \\ 2 \cos x & \cos x - \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \sin x \cos x - (\cos x + \sin x)(\cos x + \sin x) \\ -2 \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}
y(x) &= \begin{pmatrix} \cos x - \sin x & \cos x + \sin x \\ -2 \cos x & -2 \sin x \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} dx = \\
&= \begin{pmatrix} \cos x - \sin x & \cos x + \sin x \\ -2 \cos x & -2 \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\int \frac{dx}{2} \\ -\int \frac{dx}{2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos x - \sin x & \cos x + \sin x \\ -2 \cos x & -2 \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{x}{2} + C_1 \\ -\frac{x}{2} + C_2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -(\frac{x}{2} + C_1)(\cos x - \sin x) - (\frac{x}{2} + C_2)(\cos x + \sin x) \\ (x + 2C_1) \cos x + (x + 2C_2) \sin x \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (C_1 - C_2) \sin x - (x + C_1 + C_2) \cos x \\ (x + 2C_1) \cos x + (x + 2C_2) \sin x \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 + \tan^2 x - 1 \\ y_2' &= \tan x - y_1 \end{cases} \quad (\text{ג})$$

$$\begin{cases} y_1' &= -4y_1 - 2y_2 + \frac{2}{e^x - 1} \\ y_2' &= 6y_1 + 3y_2 - \frac{3}{e^x - 1} \end{cases} \quad (\text{ד})$$

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 + 2e^{-x}(\ln|e^x - 1| + C_2) \\ y_2(x) = -2C_1 + -3e^{-x}(\ln|e^x - 1| + C_2) \end{cases} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: זאת מערכת לינארית עבור $y' = Ay + b(x)$ ו- $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ ו- $b(x) =$

. את המטריצה היסודית של המערכת מצאנו קודם: $\begin{pmatrix} \frac{2}{e^x - 1} \\ -\frac{3}{e^x - 1} \end{pmatrix}$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2e^{-x} \\ -2 & -3e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$\det \Psi(x) = 1 \cdot (-3e^{-x}) - 2e^{-x} \cdot (-2) = e^{-x}$$

$$\Psi(x)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2e^{-x} \\ -2 & -3e^{-x} \end{pmatrix}^{-1} = e^x \begin{pmatrix} -3e^{-x} & -2e^{-x} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2e^x & e^x \end{pmatrix}$$

$$\Psi(x)^{-1}b(x) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2e^x & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{e^x-1} \\ -\frac{3}{e^x-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^x}{e^x-1} \end{pmatrix}$$

$$\int \Psi(x)^{-1}b(x) \, dx = \begin{pmatrix} C_1 \\ \int \frac{e^x \, dx}{e^x - 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \ln |e^x - 1| + C_2 \end{pmatrix}$$

$$y(x) = \Psi(x) \int \Psi(x)^{-1}b(x) \, dx = \begin{pmatrix} C_1 + 2e^{-x}(\ln |e^x - 1| + C_2) \\ -2C_1 + -3e^{-x}(\ln |e^x - 1| + C_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 + \frac{1}{\cos x} \end{cases} \quad (7)$$

3. רשום את המד"ר-2 כמערכת $y' = Ay + b(x)$ של שתי משוואות מסדר 1 ופתור את המערכת

בעזרת המטריצה היסודית:

$$y'' + y = 4 \sin x \quad (\text{א})$$

תשובה: $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x \cos^2 x - \sin x \cos^2 x + \sin^3 x$

פתרון:

(a). נרשום את המערכת השקולה בת שתי מד"ר-1: נסמן $w_1 := y, w_2 := y'$. אזי המשוואה

הנתונה מקבלת הצורה $w_2' + w_1 = 4 \sin x$ ויחד עם השוויון $w_2 = w_1'$, זה נותן את

$$w' = Aw + B(x), \text{ או, בצורה מטריצית, } \begin{cases} w_1' = w_2 \\ w_2' = -w_1 + 4 \sin x \end{cases} \quad \text{המערכת הבאה:}$$

כאשר $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \sin x \end{pmatrix}$.

(b). נמצא מטריצה יסודית של המערכת:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \quad \text{המשוואה האופיינית היא}$$

לכן $\lambda_{1,2} = \pm i$. נסמן $\lambda := \lambda_1 = i$ אזי $\lambda_2 = \bar{\lambda} = -i$. נמצא את וקטור עצמי u עבור $\lambda = i$: $\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ מכאן $\alpha = 1$,

$$\beta = i, \quad \text{אזי } \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

נמצא את $e^{ix}u$:

$$e^{ix}u = (\cos x + i \sin x) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x + i \sin x \\ i \cos x - \sin x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

לכן $s_2(x) := \operatorname{Im}(e^{ix}u) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$, $s_1(x) := \operatorname{Re}(e^{ix}u) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$ היא

מערכת יסודית של פתרונות למשוואה ההומוגנית $w' = Aw$ ואז $\Psi(x) = (s_1, s_2) =$

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

c. נמצא את הפתרון הכללי למערכת $w' = Aw + b(x)$:

$$\det \Psi(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\Psi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{-1}(x)b(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \sin^2 x \\ 4 \sin x \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos(2x) - 2 \\ 2 \sin(2x) \end{pmatrix}$$

$$w(x) = \Psi(x) \int \Psi^{-1}b(x) \, dx = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 2 \cos(2x) - 2 \\ 2 \sin(2x) \end{pmatrix} dx =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int (2 \cos(2x) - 2) \, dx \\ 2 \int \sin(2x) \, dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(2x) - 2x + C_1 \\ -\cos(2x) + C_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x \sin(2x) - 2x \cos x + C_1 \cos x - \sin x \cos(2x) + C_2 \sin x \\ 2x \sin x - \sin x \sin(2x) - C_1 \sin x - \cos x \cos(2x) + C_2 \cos x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x \cos^2 x - \sin x \cos^2 x + \sin^3 x \\ -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2x \sin x - 2 \sin^2 x \cos x - \cos^3 x + \cos x \sin^2 x \end{pmatrix}$$

i. הפונקציה המבוקשת היא

$$y(x) = y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x \cos^2 x - \sin x \cos^2 x + \sin^3 x$$

$$y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x} \quad (\text{ב})$$

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x} \quad (\lambda)$$

$$y'' - 2y' + y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3} \quad (7)$$

עבודת בית 12

1. קבע על פי ההגדרה את היציבות של הפתרונות לבעיות ההתחלה הבאות:

$$\begin{cases} y' = y + x \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (\text{א})$$

פתרון:

i. הפתרון הכללי למשוואה הוא $y(x) = Ce^x - x - 1$

הפתרון לבעית ההתחלה הוא $y(x) = 2e^x - x - 1$

$$\begin{cases} y' = -y + x^2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

פתרון:

i. הפתרון הכללי למשוואה הוא $y(x) = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2$

הפתרון לבעיית ההתחלה הוא $y(x) = x^2 - 2x + 2$

$$\begin{cases} y' = 2 + x \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

2. קבע את היציבות של הפתרון הטריטוריאלי למשוואה $y' = 2x(y + 1)$.

תשובה: יציב.

עבודת בית 13

1. קבע את היציבות של הפתרון הטריטוריאלי למשוואה:

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - 9y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2 \end{cases} \quad (\text{א})$$

פתרון:

i. נרשום את המרטיצה של המערכת:

$$\begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ii. הפולינום האופייני של A הוא

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -9 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2 + 9 = \lambda^2 + 2\lambda + 10$$

אותו פולינום ניתן לקבל ע"י הנוסחה $f_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$ כאשר

$$\text{tr}(A) = -1 - 1 = -2 \quad \det(A) = \begin{vmatrix} -1 & -9 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot (-9) = 10$$

iii. נמצא את הערכים העצמיים של A (ז"א שורשים של הפולינום האופייני):

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - 10} = -1 \pm 3i$$

iv. רואים שהחלקים הממשיים של שני הערכים העצמיים הם מספרים שליליים, $\text{Re}(\lambda_1) =$

$\text{Re}(\lambda_2) = -1 < 0$, לכן הפתרון הטריטוריאלי של המערכת הוא יציב אסימפטוטית.

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 - y_2 \\ y'_2 = 2y_1 + 3y_2 \end{cases} \quad (\text{б})$$

$$\begin{cases} y'_1 = -2y_1 - 3y_2 \\ y'_2 = y_1 + y_2 \end{cases} \quad (\text{в})$$

$$\begin{cases} y'_1 = 3y_1 + 2y_2 \\ y'_2 = y_1 + y_2 \end{cases} \quad (\text{г})$$

$$\begin{cases} y'_1 = -y_1 + 2y_2 \\ y'_2 = -2y_1 + 3y_2 \end{cases} \quad (\text{д})$$

$$\begin{cases} y'_1 = -2y_1 + y_2 \\ y'_2 = -y_1 - 4y_2 \end{cases} \quad (\text{е})$$

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 - y_2 + 2y_3 \\ y'_2 = 5y_1 - 3y_2 + 3y_3 \\ y'_3 = -y_1 - 2y_3 \end{cases} \quad (\text{ж})$$

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 - 3y_2 + 4y_3 \\ y'_2 = 4y_1 - 7y_2 + 8y_3 \\ y'_3 = 6y_1 - 7y_2 + 7y_3 \end{cases} \quad (\text{з})$$

2. עבור כל אחד מהמשוואות האוטונומיות הבאות, מצא את כל נקודות קריטיות (סינגולריות), רשום

את המשוואה הלינארית המתאימה (ליניאריזציה) וקבע את היציבות עבורה:

$$(א) \quad \begin{cases} y_1' = (2 + y_1)(y_2 - y_1) \\ y_2' = (4 - y_1)(y_2 + y_1) \end{cases}$$

תשובה: $\neg \begin{cases} y_1 \equiv -2 \\ y_2 \equiv 2 \end{cases}$ יציבים אסימפטוטית, $\begin{cases} y_1 \equiv 0 \\ y_2 \equiv 0 \end{cases}$ אינו יציב

אסימפטוטית.

פתרון:

1. מצא את כל פתרונות שווי משקל. כדי לעשות את זה, נמצא את כל הפתרונות למערכת

$$\begin{cases} (2 + y_1)(y_2 - y_1) = 0 \\ (4 - y_1)(y_2 + y_1) = 0 \end{cases}$$

משוואות אלגבריות

כל הפתרונות האלו נמצאות בין הפתרונות של שלוש מערכות יותר פשוטות:

$$\begin{cases} 2 + y_1 = 0 \\ y_2 + y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = 0 \\ 4 - y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = 0 \\ y_2 + y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{(למערכת רביעית, אין פתרון).} \quad \begin{cases} 2 + y_1 = 0 \\ 4 - y_1 = 0 \end{cases} \\ & \text{הפתרונות הם } y_1 = y_2 = 0, y_1 = y_2 = 4, y_1 = -2, y_2 = 2 \end{aligned}$$

לכן יש 3 פתרונות סינגולריות למערכת המשוואות:

$$\begin{cases} y_1 \equiv -2 \\ y_2 \equiv 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 \equiv 4 \\ y_2 \equiv 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 \equiv 0 \\ y_2 \equiv 0 \end{cases}$$

(2). מצא את המטריצת הקירוב הליניארי של מערכת המשוואות :

$$\begin{aligned} A(y_1, y_2) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1}(2 + y_1)(y_2 - y_1) & \frac{\partial}{\partial y_2}(2 + y_1)(y_2 - y_1) \\ \frac{\partial}{\partial y_1}(4 - y_1)(y_2 + y_1) & \frac{\partial}{\partial y_2}(4 - y_1)(y_2 + y_1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2y_1 + y_2 - 2 & 2 + y_1 \\ 4 - 2y_1 - y_2 & 4 - y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3). קבע יציבות אסימפטוטית של פתרון שיווי המשקל $y_1 \equiv -2, y_2 \equiv 2$: נציב במטריצה

$$\begin{aligned} & \text{אזי } A(y_1, y_2) \text{ את } y_1 = -2, y_2 = 2 \\ & A = A(-2, 2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לכן הקירוב הליניארי של מערכת המשוואות במקרה הזה הוא $y' = Ay$. המשוואה האופיינית של המטריצה A היא $\lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0$ לכן הערכים העצמיים הם $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 10$. שניהם חיוביים (למעשה מספיק שאחד יהיה חיובי) לכן הפתרון $y_1 \equiv -2, y_2 \equiv 2$ אינו יציב אסימפטוטית.

(4). קבע יציבות אסימפטוטית של פתרון שיווי המשקל $y_1 \equiv 4, y_2 \equiv 4$: נציב במטריצה

אזי $A(y_1, y_2)$ את $y_1 = -2, y_2 = 2$

$$A = A(-2, 2) = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן הקירוב הליניארי של מערכת המשוואות במקרה הזה הוא $y' = Ay$. המשוואה

האופיינית של המטריצה A היא $\lambda^2 + 6\lambda + 48 = 0$ לכן הערכים העצמיים הם

$\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{39}i$. החלק הממשי של הערכים העצמיים שלילי: $\Re \lambda_{1,2} = -3 < 0$,

לכן הפתרון $y_1 \equiv 4, y_2 \equiv 4$ יציב אסימפטוטית.

(5). קבע יציבות אסימפטוטית של פתרון שיווי המשקל $y_1 \equiv 0, y_2 \equiv 0$: נציב במטריצה

אזי $A(y_1, y_2)$ את $y_1 = -2, y_2 = 2$

$$A = A(-2, 2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

לכן הקירוב הליניארי של מערכת המשוואות במקרה הזה הוא $y' = Ay$. המשוואה

האופיינית של המטריצה A היא $\lambda^2 - 2\lambda - 16 = 0$ לכן הערכים העצמיים הם

$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{13}$. רואים ש- $\lambda_1 = 1 + \sqrt{13} > 0$ לכן הפתרון $y_1 \equiv 0, y_2 \equiv 0$ אינו

יציב אסימפטוטית.

$$\begin{cases} y_1' = 1 - y_2 \\ y_2' = y_1^2 - y_2^2 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_1^2 + y_2^2 \\ y_2' = y_2 - y_1 y_2 \end{cases} \quad (\text{ג})$$

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + y_1 y_2^3 \\ y_2' = y_1 - 2y_2 - y_1 y_2 \end{cases} \quad (\text{ד})$$

קורס 27-301 "משוואות דיפרנציאליות רגילות למדעי המוח"

עבודת בית