

תרגילים בקורס 88-236

חשבון איפניטסימלי 4

ודים זאב אוסטפנקו

`ostap@math.biu.ac.il`

`http://u.math.biu.ac.il/~ostap`

תשע"ה

תוכן עניינים

1 יריעות חלקות

7

הקדמה

בקובץ נמצאים תשובות לתרגילים פתורים קשורים לקורס 88-236 "חשבון איפניטסימלי
4". הקורס מוקדש לחשבון אינטגרלי על יריעות חלקות.

פרק 1

יריעות חלקות

את נבטים בנקודה $p \in M$ נסמן ב- f או ב- $\bar{f}$.

נניח שהאטלס על היריעה M נוצר ע"י מפה אחת. הוכח M היא יריעת C^∞ .

פתרון: לכל מפה אחרת (U_1, φ_1, V_1) מתקיים $\varphi \circ \varphi_1^{-1} \in C^\infty$ וגם $\varphi_1 \circ \varphi^{-1} \in C^\infty$.

נסמן ב- M את הישר $\mathbb{R}^1$ יחד עם האטלס המכסימלי הנוצר ע"י שתי
מפות הבאות: $U_1 = U_2 = \mathbb{R}^1$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^3$. הוכח שהיריעה
 M אינה מסוג C^∞ .

פתרון: העתקת המעבר $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ אינה גזירה בנקודה $0 \in M$.

נסמן ב- M את הישר $\mathbb{R}^1$ יחד עם האטלס המכסימלי הנוצר ע"י שתי
מפות הבאות: $U_1 = U_2 = \mathbb{R}^1$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x + |x|$. הוכח
שהיריעה M מסוג C^1 ואינה מסוג C^2 .

נגדיר בקבוצה $\tilde{\mathcal{F}}$ את הפעולות הבאות:

$$1. f + g := \overline{f + g},$$

$$2. \lambda f := \overline{\lambda f},$$

$$3. f \cdot g := \overline{f \cdot g}.$$

בדוק שהפעולות מוגדרות היטב.

חשב את האינטגרל $\oint_S \omega$ כאשר

$$\omega = x^2 dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$$

החרות $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (z - 1)^2, 0 \leq z \leq 1\}$ עם

נורמל חיצוני.

פתרון:

$$d\omega = (2x + 2) dx \wedge dy \wedge dz$$

לכן, לפי נוסחת Stokes (במקרה הזה, היא נקראת נוסחת Gauß),

$$\oint_{\partial V} \omega = \int_V d\omega = \int_V (2x + 2) dx \wedge dy \wedge dz = \iiint_V (2x + 2) dx dy dz.$$

כדי לחשב את האינטגרל המשולש, נסמן ב- $D : \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ את הבסיס

של V ונשתמש במשפט Fubini:

$$\iiint_V (2x + 2) \, dx \, dy \, dz = \iint_D \left(\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} (2x + 2) \, dz \right) dx \, dy =$$

$$= 2 \iint_D (1 - \sqrt{x^2 + y^2})(x + 1) \, dx \, dy =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 - r)(r \cos \theta + 1)r \, dr \right) d\theta = 4\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}\pi$$

מצא את שטח הפנים של המשטח

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^3 - 3, -2 \leq x \leq 1\}$$

פתרון: המשתנה x הוא פונקציה מפורשת של y ו- z , לכן ניתן לבחור את $u := y$,

$v := z$ כפרמטרים חופשיים. זה נותן את הפרמטריזציה

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 + v^3 - 3 \\ u \\ v \end{pmatrix}.$$

תחום ההשתנות של פרמטרים: הטבעת

$$D := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4\}.$$

מצא את שני וקטורי המהרות:

$$\Phi'_u = \begin{pmatrix} 2u \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Phi'_v = \begin{pmatrix} 2v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ונשתמש באינטגרל המשתחי מסוג ראשון:

$$A = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{\|\Phi'_u\|^2 \cdot \|\Phi'_v\|^2 - |\langle \Phi'_u, \Phi'_u \rangle|^2} du dv =$$

$$= \iint_D \sqrt{(4u^2 + 1)(4v^2 + 1) - 4u^2v^2} du dv =$$