

תרגילים בפונקציות מרוכבות

ודים זאב אוסטפנקו

`ostap@math.biu.ac.il`

`http://grE8248.org`

מרחשון תשפ"א

תוכן עניינים

5	1 מספרים מרוכבים
17	2 פונקציות אלמנטריות
21	3 אינטגרל

פרק 1

מספרים מרוכבים

1. עבור $z = 4 + 3i$, $w = 5 - 2i$, מצא את $\overline{w}$, $z + w$, zw ואת $\frac{z}{w}$.

פתרון:

$$w = 5 - 2i$$

$$\overline{w} = 5 + 2i$$

$$z + w = (4 + 3i) + (5 - 2i) = 4 + 3i + 5 - 2i = (4 + 5) + (3 - 2)i =$$

$$= 9 + i$$

$$zw = (4 + 3i) \cdot (5 - 2i) = 4 \cdot 5 + 3i \cdot 5 + 4 \cdot (-2i) + (3i) \cdot (-2i) =$$

$$= 20 + 15i - 8i + 6 = 26 + 7i$$

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2} = \frac{(4 + 3i)(5 + 2i)}{5^2 + (-2)^2} = \frac{(20 - 6) + (15 + 8)i}{25 + 4} =$$

$$= \frac{14 + 23i}{29} = \frac{14}{29} + i\frac{23}{29}$$

2. עבור $w = 2 + 3i$, $z = 1 + 2i$, מצא את $\overline{w}$, $z - w$, zw ואת $\frac{z}{w}$.

פתרון:

$$w = 2 + 3i$$

$$\overline{w} = 2 - 3i$$

$$z - w = (1 + 2i) - (2 + 3i) = 1 + 2i - 2 - 3i = (1 - 2) + (2 - 3)i = -1 - i$$

$$zw = (1 + 2i) \cdot (2 + 3i) = (2 - 6) + (4 + 3)i = -4 + 7i$$

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2} = \frac{(1 + 2i)(2 - 3i)}{2^2 + 3^2} = \frac{2 + 4i - 3i - 6i^2}{4 + 9} = \frac{8 + i}{13} = \frac{8}{13} + i\frac{1}{13}$$

3. פתור את המשוואה $z^2 - (1 + 4i)z - 4 + i = 0$

תשובה:

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} + i \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$$

$$z_2 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} + i \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$$

פתרון: הפתרונות נתונות ע"י הנוסחה $z = \frac{1 + 4i + w}{2}$ כאשר w פתרון למשוואה $w^2 = (1 + 4i)^2 - 4(-4 + i) = 1 + 4i$. נסמן את החלק הממשי ואת החלק המדומה של w מפורש: $w = u + iv$. אזי $w^2 = (u + iv)^2 = (u^2 - v^2) + 2iuv = 1 + 4i$. לכן המשוואה $w^2 = 1 + 4i$ שקולה למערכת של שתי המשוואות

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 1 \\ uv = 2 \end{cases} \quad \text{או} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 1 \\ 2uv = 4 \end{cases}$$

נשים לב על העובדה ש- $u \neq 0$ וגם $v \neq 0$, אחרת היה $uv = 0$. לכן ניתן להציב את $v = \frac{2}{u}$ לתוך

המשוואה הראשונה:

$$u^2 - \frac{2}{u^2} = 1 \quad u \neq 0$$

$$u^4 - 2 = u^2$$

$$u^4 - u^2 - 2 = 0$$

$$u^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

מכוון ש- $u^2 > 0$, מגעים למסקנה ש- $u^2 = 2$, ז"א $u = \pm\sqrt{2}$. לכן

$$v = \frac{2}{\pm\sqrt{2}} = \pm\sqrt{2} \text{ ולכן } w = \pm\sqrt{2}(1+i) \text{ סופית,}$$

$$z = \frac{1+4i+w}{2} = \frac{1+4i \pm \sqrt{2}(1+i)}{2} \text{ שנותן}$$

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} + i\frac{4+\sqrt{2}}{2}$$

$$z_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} + i\frac{4-\sqrt{2}}{2}$$

4. פתור את המשוואה $z^4 = 8 - 8i\sqrt{3}$.

פתרון: נהפוך את המספר $8 - 8i\sqrt{3}$ לצורת Euler:

$$|8 - 8i\sqrt{3}| = 16$$

$$8 - 8i\sqrt{3} = 16 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

כדי לקבל את כל ארבע הפתרונות, נרשום אתו מספר בצורת Euler הכללית ביותר:

$$8 - 8i\sqrt{3} = 16e^{-i\frac{\pi}{3} + 2\pi k}$$

כאשר $k \in \mathbb{Z}$ אזי $z^4 = 16e^{-i\frac{\pi}{3} + 2i\pi k}$ ולכן $z = 2e^{-i\frac{\pi}{12} + i\frac{\pi k}{2}}$

הערכים $k = 0, 1, 2, 3$ קובעים ארבעה פתרונות שונים. כדי לקבל תשובה סופית,

נחזור לצורה קרטזית:

$$k = 0 \quad z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{12}} = 2 \cos \frac{\pi}{12} - 2i \sin \frac{\pi}{12}$$

$$k = 1 \quad z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{12} + i\frac{\pi}{2}} = 2 \cos \frac{\pi}{6} + 2i \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - i$$

$$k = 2 \quad z_3 = 2e^{-i\frac{\pi}{12} + i\pi} = 2 \cos \frac{11\pi}{12} + 2i \sin \frac{11\pi}{12}$$

$$k = 3 \quad z_4 = 2e^{-i\frac{\pi}{12} + i\frac{3\pi}{2}} = 2 \cos \frac{2\pi}{3} + 2i \sin \frac{2\pi}{3} = -1 + i\sqrt{3}$$

5. פתור את המשוואה $iz^4 = 8\bar{z}$.

פתרון:

1. נבדד את הנעלם z : $z^4\bar{z}^{-1} = -8i$.

6. פתור את המשוואה $z^3 - (1 + 2i)z^2 + (-5 + 3i)z + 6 + 2i = 0$

כאשר ידוע שיש לה שורש ממשי.

תשובה: $z_3 = -2 + i, z_2 = 1 + i, z_1 = 2$

פתרון:

(א) נמצא את השורש הממשי. ננסה להציב כמה ערכים שלמים:

$z = 0$	$6 + 2i$
$z = 1$	$1 + 7i$
$z = -1$	$9 - 3i$
$z = 2$	0

אנחנו רואים ש- $z_1 = 2$ הוא שורש. לכן הפולינום

$$z^3 - (1 + 2i)z^2 + (-5 + 3i)z + 6 + 2i \text{ מתחלק בבינום } z - 2.$$

(ב) נחלק את הפולינום $z^3 - (1 + 2i)z^2 + (-5 + 3i)z + 6 + 2i$ ב- $z - 2$:

$z^3 - (1 + 2i)z^2 + (-5 + 3i)z + 6 + 2i$	$z - 2$
$z^3 - 2z^2$	$z^2 + (1 - 2i)z - (3 + i)$
$(1 - 2i)z^2 + (-5 + 3i)z + 6 + 2i$	
-	
$(1 - 2i)z^2 - (2 - 4i)z$	
$-(3 + i)z + 6 + 2i$	
-	
$-(3 + i)z + 6 + 2i$	
0	

לכן כדי למצוא את שאר הפתרונות למשוואה, צריך לפתור את המשוואה

$$z^2 + (1 - 2i)z - (3 + i) = 0$$
 הרבועית

(ג) נמצא פתרון למשוואה הרבועית $z^2 + (1 - 2i)z - (3 + i) = 0$:

$$z_{2,3} = \frac{-(1 - 2i) + w}{2}$$

כאשר w פתרון למשוואה $w^2 = (1 - 2i)^2 + 4(3 + i) = 1 - 4 - 4i + 12 + 4i = 9$

ז"א $w = \pm 3$. לכן

$$z_{2,3} = \frac{-(1 - 2i) \pm 3}{2} = \frac{-(1 - 2i) \pm 3}{2} = \begin{bmatrix} 1 + i \\ -2 + i \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = 2 \\ z_2 = 1 + i \\ z_3 = -2 + i \end{array} \right. \quad \text{(ד) סופית, למשוואה יש שלוש פתרונות:}$$

(ה) נבדוק את התשובות:

$$\begin{aligned}
 (z-2)(z-1-i)(z+2-i) &= [z^2 - (3+i)z + 2+2i](z+2-i) = \\
 &= z^3 + z^2(2-i) - (3+i)z^2 - (3+i)(2-i)z + (2+2i)z + (2+2i)(2-i) = \\
 &= z^3 + (-1-2i)z^2 - (7-i)z + (2+2i)z + 6+2i = \\
 &= z^3 + (-1-2i)z^2 + (-5+3i)z + 6+2i
 \end{aligned}$$

2. נרשום שתי המעלים z וגם מספרים קבועים בצורה כוטבית:

$$z = re^{i\theta}$$

$$\bar{z} = re^{-i\theta}$$

$$\bar{z}^{-1} = r^{-1}e^{i\theta}$$

$$z^4\bar{z}^{-1} = r^4e^{4i\theta}r^{-1}e^{i\theta} = r^3e^{5i\theta}$$

$$-8i = 8e^{-i\frac{\pi}{2}} = 8e^{-i\frac{\pi}{2}+2i\pi k}$$

בגלל ש $e^{2i\pi k} = 1$ עבור כל מספר שלם k . לכן המשוואה מקבלת את הצורה

$$r^3e^{5i\theta} = 8e^{-i\frac{\pi}{2}+2i\pi k}$$

מכאן $r = 2$.

3. נמצא את θ :

$$e^{5i\theta} = e^{-i\frac{\pi}{2} + 2i\pi k}$$

$$5\theta = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$5\theta = \frac{4k-1}{2}\pi$$

$$\theta = \frac{4k-1}{10}\pi \quad k = 0, \dots, 4$$

לכן הערכים השונים של z הם

$$z_1 = 2e^{-\frac{9\pi i}{10}}$$

$$z_2 = 2e^{-\frac{5\pi i}{10}} = 2e^{-\frac{\pi i}{2}} = -2i$$

$$z_3 = 2e^{-\frac{\pi i}{10}}$$

$$z_4 = 2e^{\frac{3\pi i}{10}}$$

$$z_5 = 2e^{\frac{7\pi i}{10}}$$

כאן בחרנו הערכים $k = -2, -1, 0, 1, 2$ שנותנים אותם מספרים z בסדר אחר.

פרק 2

פונקציות אלמנטריות

משוואות טריגונומטריות

7. פתור את המשוואה $\cos z = 2i$.

תשובה: $z = -\frac{(4k-1)}{2}\pi + i \ln(\sqrt{2} \pm 1)$ מספר שלם k .

פתרון:

1. לפי ההגדרה, $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. נסמן $w := e^{iz}$, אזי צריך למצוא פתרון למשוואה $\frac{w + w^{-1}}{2} = 2i$ או $w^2 - 2iw + 1 = 0$.

2. נמצא את הפתרון של המשוואה הרבועית:

$$w_{1,2} = \frac{2i \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4}}{2} = i \pm \sqrt{(-i)^2 - 1} = i \pm \sqrt{-1 - 1} = (1 \pm \sqrt{2})i$$

לכן $e^{iz} = (1 \pm \sqrt{2})i$ וז"א $iz = \ln[(1 \pm \sqrt{2})i]$ או $z = -i \ln[(1 \pm \sqrt{2})i]$

3. נחשב את הלוגריתם. המספר $(1 \pm \sqrt{2})i$ מדומה טהור, לכן

$$\arg[(1 \pm \sqrt{2})i] = \frac{\pi}{2} \quad \text{ו-} \quad |(1 \pm \sqrt{2})i| = |1 \pm \sqrt{2}| = \sqrt{2} \pm 1. \quad \text{מכאן}$$

$$\ln[(1 \pm \sqrt{2})i] = \ln(\sqrt{2} \pm 1) + \frac{\pi}{2}i + 2\pi ki \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

4. סופית,

$$z = i \left[\ln(\sqrt{2} \pm 1) + \frac{\pi}{2}i + 2\pi ki \right] = -\frac{\pi}{2} - 2\pi k + i \ln(\sqrt{2} \pm 1)$$

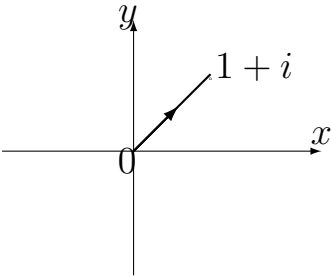
אפשר לכתוב את הביטוי הזה קצת אחרת, אם להציב בתוכו את $-k$ במקום k :

$$z = -\frac{(4k-1)}{2}\pi + i \ln(\sqrt{2} \pm 1) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

פרק 3

אינטגרל

כאינטגרל מסילתי של פונקציה של x, y $\int f(z) dz$



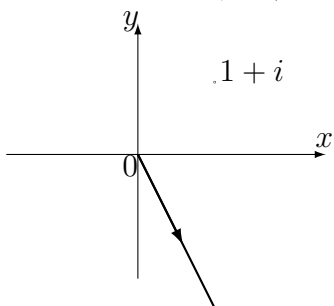
8. חשב את האינטגרל $\int_C z^2 dz$ כאשר C כמו בשרטוט:

[noitulos eht nwod etirw dna erutcip eht tidE]

9. חשב את האינטגרל $\int_C z^2 dz$ כאשר C קטע של הישר בין נקודת

הראשית ובין הנקודה $1 - 2i$.

[The following text is a mirror image of the text above it, likely a scanning artifact.]



טורי Taylor

10. ידוע שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-1)$ הוא פתוח Taylor של הפונקציה

$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$. ללא חישוב את המקדמים c_n , מצא את הרדיוס ההתכנסות של הטור.

תשובה: $R = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

פתרון:

1. לפי משפט של N. H. Abel, תחום ההתכנסות טור Taylor הוא עיגול שמרכזו ברזו של הטור, ורדיוס העיגול שווה למרחק בין המרכז לנקודה סינגולרית קרובה ביותר עליו.

2. הטור הוא סכום של חזקות של $z-1$ לכן המרכז שלו $a=1$.

3. הנקודות הסינגולריות של $f(z)$ הן פתרונות למשוואה $z^4 + 1 = 0$. נמצא את כל הפתרונות.

$$z^4 = -1$$

$$z^4 = e^{i\pi+2\pi ki} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}+\pi ki} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

ע"י ההצבה $k = 0$ מקבלים את השורש $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ ההצבות
 $z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}, z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ נותנות את שאר השורשים:
 $z_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$

4. נמצא את המרחקים בין הנקודה a ובין הנקודות z_1, z_2, z_3, z_4 :

$$|z_1 - a| = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} - 1 \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} = \sqrt{\frac{(1 - \sqrt{2})^2}{2} + \frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 - 2\sqrt{2} + 2}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$|z_2 - a| = \left| -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} - 1 \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} = \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{2})^2}{2} + \frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{2} + 2}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

משיקולים סמטריים, ברור ש- $|z_3 - a| = |z_2 - a|$ ו- $|z_4 - a| = |z_1 - a|$.

5. בין המספרים $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ ו- $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, הראשון הוא יותר קטן. לכן רדיוס
ההתכנסות של הטור שווה $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Laurent טורי

11. רשום טור Laurent בחזקות של $z - 1$ עבור פונקציה

$$f(z) = \frac{3z - 8}{(z - 2)(z - 4)} \quad \text{בטבעת המכילה נקודה } z = 3.$$

פתרון:

1. לפונקציה $f(z)$ יש שתי נקודות סינגולריות, קטבים פשוטים $z_1 = 2$ ו- $z_2 = 4$. כדי

לרשום טור חזקות של $z - 1$, נקח את המעגלים עם $z = 1$ כמרכז, העוברים דרך

הנקודות האלו: $|z - 1| = 1$ ו- $|z - 1| = 3$. הנקודה $z = 3$ נמצאת בטבעת

$$1 < |z| < 3,$$

לכן נפתח את $f(z)$ בטבעת הזאת.

2. נסמן $t := z - 1$ ופתח את הפונקציה

$$\frac{3z - 8}{(z - 2)(z - 4)} = \frac{3(t + 1) - 8}{[(t + 1) - 2][(t + 1) - 4]} = \frac{3t - 5}{(t - 1)(t - 3)}$$

בטבעת $1 < |t| < 3$ לטור חזקות של t . כשלב ראשון, נציג את הביטוי האחרון

כסכום של שברים פשוטים.

$$\frac{A}{t - 1} + \frac{B}{t - 3} = \frac{3t - 5}{(t - 1)(t - 3)}$$

$$\frac{A(t - 3) + B(t - 1)}{(t - 1)(t - 3)} = \frac{3t - 5}{(t - 1)(t - 3)}$$

$$A(t - 3) + B(t - 1) = 3t - 5$$

זה מביא למשוואות עבור נעלמים A ו- B :

$$t : \quad A + B = 3$$

$$1 : \quad 3A + B = 5$$

$$A = 1 \quad B = 2$$

לכן

$$\frac{3t-5}{(t-1)(t-3)} = \frac{1}{t-1} + \frac{2}{t-3}$$

3. נמצא את הפתוח של הפונקציה $\frac{1}{t-1}$ בטבעת. בתחום $|t| > 1$ טור החזקות של t

מתבדר, וטור החזקות של $w := \frac{1}{z}$ מתכנס, לכן, לפי נוסחה של טור ההנדסי,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t-1} &= \frac{1}{\frac{1}{w}-1} = \frac{w}{1-w} = w \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} w^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (t^{-1})^n = \sum_{n=1}^{\infty} t^{-n} = \sum_{-\infty}^{-1} t^n = \sum_{-\infty}^{-1} (z-1)^n \end{aligned}$$

4. נמצא את הפתוח של הפונקציה $\frac{2}{t-3}$ בטבעת. בתחום $|t| < 2$ טור החזקות של t

מתכנס, לכן, לפי נוסחה של טור ההנדסי,

$$\frac{2}{t-3} = -\frac{2}{3-t} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} = -\frac{2}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{3}\right)^n =$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n}\right)^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{3^{n+1}} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{3^{n+1}} (z-1)^n$$

5. סופית,

$$\frac{3z-8}{(z-2)(z-4)} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{3^{n+1}} (z-1)^n$$

בטבעת $1 < |z| < 3$.

הערה: הסכום $\sum_{n=-\infty}^{-1} (z-1)^n$ הוא החלק העקרי של הפיתוח.

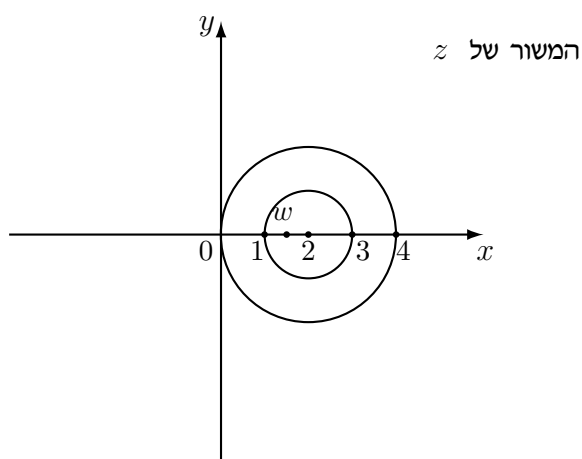
12. רשום טור Laurent בחזקות של $z - 2$ עבור פונקציה

$$f(z) = \frac{3(z-2)}{(z-1)(z-4)}, \quad w = \frac{3}{2}$$

בטבעת המכילה נקודה

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n - \frac{1}{2^n} \right) (z-2)^n \quad \text{תשובה:}$$

פתרון:



1. המרכז של הטור נמצא בנקודה $a = 2$, ובנקודות $z_1 = 1$ ו- $z_2 = 4$ לפונקציה

$f(z)$ יש סינגולריות. הנקודה w נמצאת ב"טבעת" $|z-2| < 1$, לכן נפתח את $f(z)$

בעגול הזה.

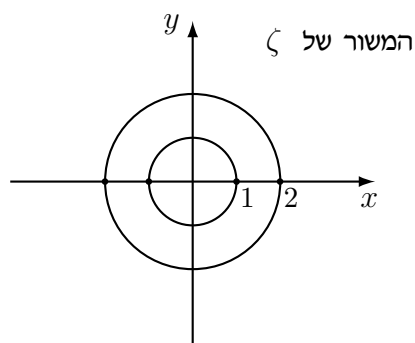
2. כדי להקל את החישובים הבאים, נעבור למשתנה $z - 2$:

$$\zeta := z - 2$$

קודם נרשום את $f(z)$ כפונקציה של ζ :

$$\varphi(\zeta) = f(\zeta + 2) = \frac{3\zeta}{(\zeta + 1)(\zeta - 2)}$$

ונמצא את הפתוח של הפונקציה $\varphi(\zeta)$ לטור חזקות של ζ בעיגול $|\zeta| < 1$.



3. נחלק את $\varphi(\zeta)$ לסכום של שברים יותר פשוטים:

$$\frac{3\zeta}{(\zeta + 1)(\zeta - 2)} = \frac{A}{\zeta - 2} + \frac{B}{\zeta + 1}$$

$$\frac{A(\zeta + 1) + B(\zeta - 2)}{(\zeta + 1)(\zeta - 2)} = \frac{3\zeta}{(\zeta + 1)(\zeta - 2)}$$

הגענו למערכת המשוואות
$$\begin{cases} A + B = 3 \\ A - 2B = 0 \end{cases}$$
 הפתרון הוא $A = 2, B = 1$. נבדוק שהפתרון שקבלנו נכון:

$$\frac{2}{\zeta - 2} + \frac{1}{\zeta + 1} = \frac{2(\zeta + 1) + (\zeta - 2)}{(\zeta + 1)(\zeta - 2)} = \frac{3\zeta}{(\zeta + 1)(\zeta - 2)}.$$

4. בהמשך נשתמש בנוסחה $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$, תחום ההתכנסות של הטור $|q| < 1$.

5. נפתח את הפונקציה $\frac{1}{\zeta+1}$ בעגול $|\zeta| < 1$:

$$\frac{1}{\zeta+1} = \frac{1}{1+\zeta} = \frac{1}{1-(-\zeta)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\zeta)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta^n$$

(כאן $q = -\zeta$).

6. נפתח את הפונקציה $\frac{1}{\zeta-2}$ בעגול $|\zeta| < 1$:

$$\frac{1}{\zeta-2} = -\frac{1}{2-\zeta} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{\zeta}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{2}\right)^n = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \frac{\zeta^n}{2^{n+1}}$$

(כאן $q = \frac{\zeta}{2}$).

אזי

$$\frac{2}{\zeta-2} + \frac{1}{\zeta+1} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \frac{\zeta^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \frac{\zeta^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n - \frac{1}{2^n} \right) \zeta^n$$

7. נחזור למשתנה z :

$$\frac{3(z-2)}{(z-1)(z-4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n - \frac{1}{2^n} \right) (z-2)^n$$

8. הערה: הפונקציה $f(z)$ אנליטית בתחום פשוט קשור $|z-2| < 1$, לכן קבלנו טור

חזקות ללא חלק עקרי, ז"א טור Taylor.

פונקציה אנליטית $f(z)$ **כאשר** $\int f(z) dz$