

תרגילים
במשוואות דיפרנציאליות רגילות
להנדסה

ודים זאב אוסטפנקו
ostap@math.biu.ac.il
<http://grE8248.org>

תמוז תש"פ

תוכן עניינים

I מד"ר-1 5

1 עניינים כלליים 7

1.1 פתרון של למשוואה דיפרנציאלית 7

1.2 ענייני קיום ויחידות של פתרונות 14

2 כמה שיטות לפתרון מד"ר-1 27

2.1 משוואות ניתנות להפרדת משתנים 28

2.2 מד"ר-1 עם פונקציה הומוגנית באגף הימני 43

2.3 משוואות לינאריות 53

2.4 משוואות Bernoulli 65

II מערכות מד"ר-1 73

3 מטריצה יסודית והפתרון הכללי למערכת של מד"ר-1 75

3.1 משוואות הומוגניות 76

3.2 משוואות לא הומוגניות 87

105 III שיטות נומריות לפתרון מד"ר

107 4 שימוש בטורים חזקות

109 5 שיטת Euler

IV שימוש בהתמרת Laplace

111 (חשבון אופרציונלי)

חלק I

מד"ר-1

פרק 1

עניינים כלליים

1.1 פתרון של למשוואה דיפרנציאלית

1. ע"י הצבה, בדוק שהפונקציה $y(x) = Cx^3$ היא פתרון של המשוואה

$$3y - xy' = 0 \quad C \text{ הקבוע של ערך}$$

פתרון:

$$y = Cx^3$$

$$y' = 3Cx^2$$

$$xy' = 3Cx^3$$

$$xy' = 3y$$

$$3y - xy' = 0.$$

2. ע"י הצבה, בדוק שהפונקציה $y(x) = \sin x$ היא פתרון של המשוואה

$$y'' + y = 0 \text{ הנתונה לכל ערך של הקבוע } C$$

פתרון:

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$y'' = -\sin x$$

$$(-\sin x) + \sin x \equiv 0$$

$$y'' + y = 0.$$

3. ע"י הצבה, בדוק שהפונקציה

$$y(x) = \frac{\sin x}{x}$$

היא פתרון של המשוואה

$$xy' + y = \cos x$$

הנתונה לכל ערך של הקבוע C

פתרון:

$$xy' + y = x \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)' + \frac{\sin x}{x} = x \cdot \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} + \frac{\sin x}{x} =$$

$$= \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x} + \frac{\sin x}{x} = \frac{x \cdot \cos x}{x} = \cos x.$$

סיכום: $xy' + y = \cos x$.

4. בדוק שעבור כל C ממשי הפונקציה $y(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + Ce^{-x^2}$

היא פתרון למשוואה $y' + 2xy = 1$.

פתרון: האינטגרל $\int_0^x e^{t^2} dt$ תלוי בערך של x , במילים אחרות הוא מגדיר פונקציה של x . לפי משפט מתמטי (ידוע תחת השם "המשפט העקרי של חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי"), הנגזרת של הפונקציה הזאת ניתן לחשב בקלות ע"י הנוסחה

$$\left(\int_0^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

כדי למצוא את הנגזרת של הפונקציה $y(x)$, אנחנו נצטרך בכלל של גזירת כפל של שתי פונקציות (כלל Leibniz):

$$(g(x)h(x))' = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

נמצא עם שמוש בכללים הנזכרים את הנגזרת של הפונקציה הנתונה:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \left(e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + C e^{-x^2} \right)' = \\
&= \left(e^{-x^2} \right)' \int_0^x e^{t^2} dt + e^{-x^2} \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)' + \left(C e^{-x^2} \right)' = \\
&= -2x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + e^{-x^2} e^{x^2} - 2C x e^{-x^2} = \\
&= -2x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + 1 - 2C x e^{-x^2}
\end{aligned}$$

כעת, נציב את הפונקציה $y(x)$ וגם את הביטוי עבור $y'(x)$ שקיבלנו בתוך הביטוי

$$y'(x) + 2xy(x) = 1$$

שהוא האגף השמאל של המשוואה

$$\begin{aligned}
y'(x) + 2xy(x) &= -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + 1 - 2Cxe^{-x^2} + x \left(e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + Ce^{-x^2} \right) = \\
&= -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + 1 - 2Cxe^{-x^2} + xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + Cxe^{-x^2} = \\
&= 1
\end{aligned}$$

לכן הפונקציה $y(x)$ מקיימת את התנאי $y'(x) + 2xy(x) \equiv 1$ (הסימן $\equiv$ אומר ש-
 $y'(x) + 2xy(x)$ שווה ל-1 עבור כל ערך של x), ז"א היא פתרון למשוואה דיפרנציאלית
 $y' + 2xy = 1$.

1.2 ענייני קיום ויחידות של פתרונות

משפט 1) Peano נניח שהפונקציה של שני משתנים $f(x, y)$ רציפה בתחום D במשור

(x, y) , ונניח גם שהנקודה (x_0, y_0) נמצאת בתוך התחום D . אזי דרך הנקודה (x_0, y_0)

עובר לפחות קו אינטגרלי אחד של מד"ר $y' = f(x, y)$.

$$\text{יש לפחות} \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{במילים אחרות, בתנאים של המשפט, לבעיית ההתחלה}$$

פתרון אחד.

משפט 2) Picard נניח שהפונקציות $f(x, y)$ ו- $f'_y(x, y)$ רציפות בתחום D במשור

(x, y) , ונניח גם שהנקודה (x_0, y_0) נמצאת בתוך התחום D . אזי דרך הנקודה (x_0, y_0)

עובר בדידוק קו אינטגרלי רציף אחד של מד"ר $y' = f(x, y)$.

$$\text{יש בדידוק} \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{במילים אחרות, בתנאים של המשפט, לבעיית ההתחלה}$$

פתרון רציף אחד.

5. קבע האם ניתן להשתמש במשפט Peano כדי להבטיח קיום פתרון

לבעית ההתחלה הנתונה:

$$\begin{cases} (y-x)y' = y \ln x \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

פתרון: נרשום את המשוואה בצורה נורמלית: $y' = \frac{y \ln x}{y-x}$. הפונקציה

$f(x, y) = \frac{y \ln x}{y-x}$ רציפה סביב הנקודה $(1, 2)$, לכן, לפי משפט Peano, לבעית

ההתחלה $\begin{cases} (y-x)y' = y \ln x \\ y(1) = 2 \end{cases}$ יש לפחות פתרון אחד.

6. קבע האם ניתן להשתמש במשפט Peano כדי להבטיח קיום פתרון

לבעית ההתחלה הנתונה:

$$\begin{cases} (y-x)y' = y \ln x \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

פתרון: בנקודה $(2, 2)$ הפונקציה $f(x, y)$ אינה רציפה. לכן, משפט Peano, לא אומר

שום דבר על קיום של פתרון לבעית ההתחלה $\begin{cases} (y-x)y' = y \ln x \\ y(2) = 2 \end{cases}$. ז"א יכול להיות שפתרונות קיימים, וגם יכול להיות שלא קיים אף פתרון אחד.

$$7. \quad \text{נגדיר שתי פונקציות: } y_1(x) := (x-1)^3 \text{ ו- } y_2(x) := \begin{cases} (x-1)^3, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$$

$$\cdot \begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{בדוק ששתיהן פתרונות לבעית ההתחלה}$$

פתרון: ע"י ההצבה מגיים שהפונקציה $y_1(x)$ מקיימת את המשוואה. בנוסף, $y_1(1) = 0$

$(1-1)^3 = 0$, לכן $y_1(x)$ היא פתרון של ביעת ההתחלה הנתונה.

כדי לבדוק שהפונקציה $y_2(x)$ גם מקיימת את המשוואה, צריך לבדוק שהיא גזירה

עבור $x = 1$. הנגזרת השמאלית של $y_2(x)$ שווה ל- $0' = 0$, הנגזרת הימנית שווה ל-

$y_2'(1) = 0$ ו- $x = 1$, לכן $y_2(x)$ גזירה בנקודה $x = 1$, $((x-1)^3)'|_{x=1} = 3(x-1)^2|_{x=1} = 0$

ועתה, באור ש- $y_2^{\frac{2}{3}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{2}{3}(x-1)^2 & x > 1 \end{cases}$ רואים שגם $y_2(x)$ היא פתרון של אותה בעית ההתחלה.

הסיבה לכך שהפונקציה $f_y'(x, y) = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ אינה מוגדרת בנקודה $(1, 0)$ (ובכלל בציר

x), לכן ביעת ההתחלה אינה מקיימת תנאי משפט Picard.

$$8. \quad \text{מצא את כל הפתרונות של בעיית ההתחלה} \quad \begin{cases} y' = y(y-1) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{ללא}$$

חישובים.

$$\text{תשובה: } y(x) \equiv 1$$

פתרון: הפונקציות $f(x, y) = y(y-1)$ ו- $f'_y(x, y) = 2y-1$ רציפות בכל המשור $\mathbb{R}^2$. לפי משפט Picard, דרך כל נקודה (x_0, y_0) עובר קו אינטגרלי של המשוואה $y' = y(y-1)$ אחד בדיוק. בפרט, דרך הנקודה $(0, 1)$ עובר קו אינטגרלי אחד ויחיד. מצד שני, למשוואה $y' = y(y-1)$ יש פתרון שווי משקל $y(x) \equiv 1$. הגרף של הפתרון הזה עובר דרך אותה נקודה $(0, 1)$, לכן הפונקציה $y(x) \equiv 1$ היא הפתרון היחיד של בעיית ההתחלה הנתונה.

9. פתור את בעיית ההתחלה . האם הפתרון יחיד?

$$\begin{cases} y^{\frac{2}{3}} y' = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

תשובה: $y(x) = \sqrt[5]{\frac{125}{216}} x^6$. המשפט קיום ויחידות של Picard לא נותן מידע האם יש עוד פתרונות.

פתרון:

1. הצורה הנורמלית של המשוואה היא $y' = \frac{x}{y^{\frac{2}{3}}}$. תנאי ההתחלה $y(0) = 0$ מתאימה לנקודה $(0, 0)$ שהיא לא שייכת לתחום ההגדרה של האגף הימני $f(x, y) = \frac{x}{y^{\frac{2}{3}}}$ של המשוואה. לכן את משפט Picard על קיום ויחידות של פתרון פרטי לבעיית התחלה (ואפילו את משפט Peano על קיום בלבד) אי אפשר להשתמש כאן, ואנחנו לא יכולים לדעת מראש האם פתרון קיים ואם קיים, האם הוא יחיד, וכמה פתרונות יש עוד.

2. למרות כל זאת, אנחנו יכולים לנסות למצוא פתרון (אם נצליח למצוא פתרון כלשהו, זה לא יגיד לנו שום דבר על היחידות).

זאת משוואה נתינה להפרדת המשתנים, לכן נשתמש בנוסחת I. Barrow:

$$y^{\frac{2}{3}} y' = x$$

$$\int y^{\frac{2}{3}} dy = \int x dx$$

$$\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$y^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{6} x^2 + C$$

$$y(x) = \left(\frac{5}{6} x^2 + C \right)^{\frac{3}{5}}$$

מצא את הערך של הקבוע C כדי לקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = 0$:

$$y(0) = 0 = \left(\frac{5}{6} \cdot 0^2 + C \right)^{\frac{3}{5}}$$

$$0 = C^{\frac{3}{5}}$$

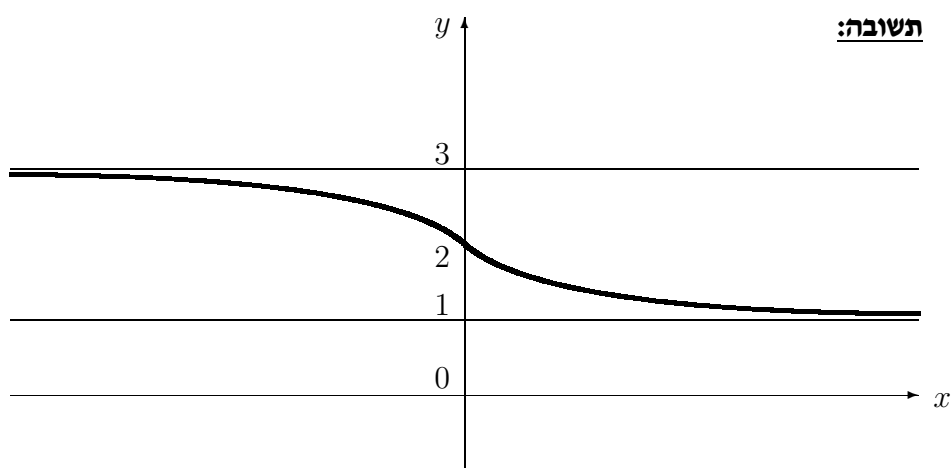
$$C = 0$$

$$y(x) = \left(\frac{5}{6} x^2 \right)^{\frac{3}{5}} = \left(\frac{5}{6} \right)^{\frac{3}{5}} x^{\frac{6}{5}}$$

לכן הפתרון הפרטי הוא $x^{\frac{6}{5}}$

$$\begin{cases} y' = y^2 - 4y + 3 \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad \text{10. שרטט את הגרף של פתרון } y(x) \text{ לבעיית ההתחלה}$$

ומצא את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$.



$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 1$$

פתרון:

1. בגלל ש- $y^2 - 4y + 3 = (y - 3)(y - 1)$, נרשום את המשוואה בצורה

$$y' = (y - 3)(y - 1)$$

2. לפי המשוואה $y' = (y - 3)(y - 1)$ הנגזרת של פונקצית הנעלם $y(x)$ מתאפסת

כאשר $y(a) = 1$ עבור a כלשהו וגם כאשר $y(b) = 3$ עבור b כלשהו. לכן למשוואה

יש שני פתרונות "שווי משקל": $y(x) \equiv 1$ ו- $y(x) \equiv 3$.

3. המשוואה $y' = (y-3)(y-1)$ מקיימת תנאי משפט הקיום והיחידות של Picard

בגלל שגם הפונקציה של שני משתנים $f(x, y) := (y-3)(y-1)y^2 - 4y + 3$ וגם

הפונקציה של שני משתנים $f'_y(x, y) := 2y - 4$ רציפות בכל המישור של המשתנים

x, y . מסקנה: שני קווים אינטגרליים אינם יכולים לחתוך.

בפרט, אף קו אינטגרלי של המשוואה $y' = (y-3)(y-1)$ לא יכול לחתוך את

הקווים $y = 1$ ו- $y = 3$, בגלל שהקווים הללו הם גם קווים אינטגרליים.

4. המשוואה $y' = (y-3)(y-1)$ שבכל הרצועה $1 < y < 3$ כל פתרון $y(x)$ למשוואה

מקיים תנאי $y' = (2-3)(2-1) > 0$. לכן עבור כל $1 < y_0 < 3$ ואבור

כל x_0 הפתרון הפרטי (היחיד!) של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = (y-3)(y-1) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$
הוא

פונקציה עולה מונוטונית (ממש). $y = 3$ dna $y = 1$ targetni osla era hcihw

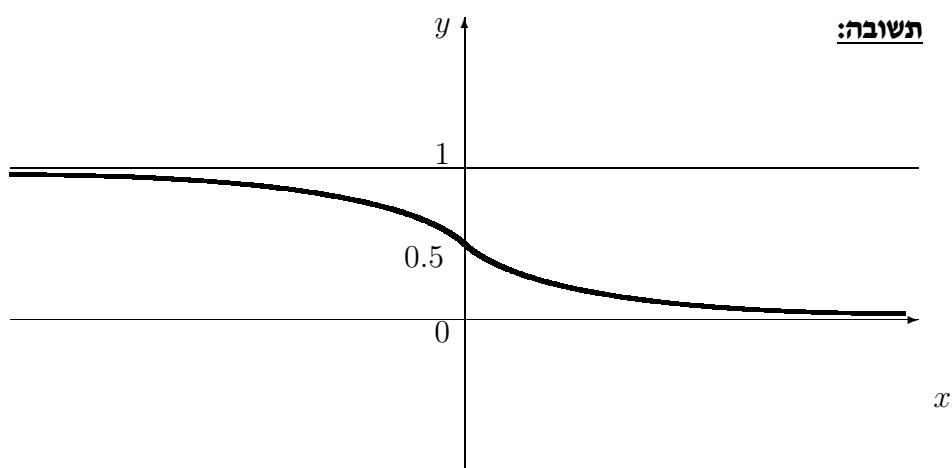
.sevr uc

5. הגרף של $y(x)$ עולה מונוטונית, ואינו יכול לעבור מעל הקו $y = 3$, לכן הקו $y = 3$

הוא אסימפטוטה של $y(x)$ עבור $x \rightarrow \infty$. מסקנה: $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 3$.

$$\begin{cases} y' = y^3 - y \\ y(1) = 0.5 \end{cases} \quad 11. \quad \text{שרטט את הגרף של פתרון } y(x) \text{ לבעיית ההתחלה}$$

ותסביר למה הפתרון $y(x)$ הוא פונקציה חסומה.



פתרון:

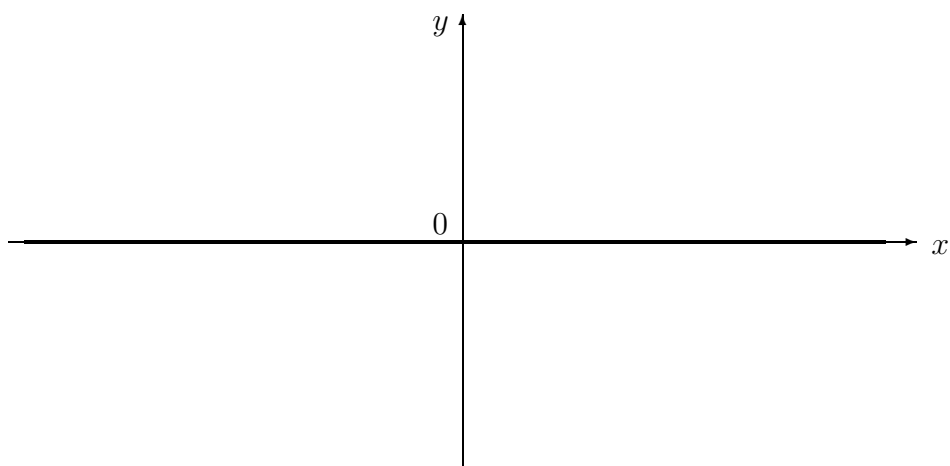
1. הפונקציות $f(x, y) := y^3 - 1$ ו- $f'_y(x, y) = 3y^2$ רציפות בכל המשור $\mathbb{R}^2$ של המשתנים (x, y) , לכן המשוואה מקיימת תנאי משפט Picard. לכן הקו האינטגרלי העובר דרך הנקודה $(1, 0.5)$ אינו יכול לחתוך את הישרים $y = 0$ ו- $y = 1$ שהם גם קווים אינטגרליים. מכיוון ש- $y'(1) = 0.5^3 - 0.5 < 0$ הפתרון $y(x)$ של בעיית ההתחלה שלנו הוא פונקציה יורדת מונוטונית.

2. הקו האינטגרלי העובר דרך הנקודה $(1, 0.5)$ אינו יכול לחתוך את הקווים האינטגרליים

שווי המשקל $y = 0$ ו- $y = 1$. זה אומר שהפתרון $y(x)$ של בעיית ההתחלה שלנו מקיים $0 < y(x) < 1$, ז"א הוא פונקציה חסומה.

$$\begin{cases} y' = 4y - y^3 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{12. שרטט את הגרף של פתרון } y(x) \text{ לבעיית ההתחלה}$$

ותסביר למה הפתרון $y(x)$ הוא פונקציה חסומה.



פתרון:

1. הקו האינטגרלי העובר דרך נקודת הראשית $(0, 0)$ הוא הציר x . זה הגרף של

$$y(x) \equiv 0$$

2. המשוואה $y' = 4y - y^3$ מקיימת תנאי המשפט Picard בכל נקודות של המשור

$\mathbb{R}^2$ של המשתנים (x, y) , בגלל שהפונקציות של שני משתנים $f(x, y) = 4y - y^3$ ו-

$$f'_y(x, y) = 4 - 3y^2$$

3. מסקנה: דרך בנקודה $(0, 0)$ עובר קו אינטגרלי יחיד, וזה הקו הישר הנ"ל $y = 0$,

לכן $y(x) \equiv 0$ הוא הפתרון היחיד של בעיית ההתחלה שלנו.

פרק 2

כמה שיטות לפתרון מד"ר-1

2.1 משוואות ניתנות להפרדת משתנים

$$13. \text{ מצא פתרון לבעיית ההתחלה } \cdot \begin{cases} y' = (x + x^2)e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

תשובה: $y(x) = (x^2 - x + 1)e^x - 1$ פתרון:

1. פתרון למשוואה שלנו

$$y(x) = \int (x + x^2)e^x dx$$

את האינטגרל

$$y(x) = \int xe^x dx$$

נחשב ע"י אינטגרציה בחלקים:

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx$$

במקרה שלנו, $u'(x) = e^x$, $v(x) = x$ לכן $u(x) = e^x$, $v'(x) = 1$ ולכן

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x - 1)e^x + C$$

$$y(x) = \int x^2 e^x dx$$

גם כאן נסמן $u'(x) = e^x$, $v(x) = x^2$ לכן $u(x) = e^x$, $v'(x) = 2x$ ולכן

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) = \\ &= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + C) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x + C\end{aligned}$$

סופית,

$$\begin{aligned}y(x) &= \int x e^x dx + \int x^2 e^x dx = (x - 1)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x + C = \\ &= (x^2 - x + 1)e^x + C\end{aligned}$$

2. בדיקת התשובה:

$$\begin{aligned}y' &= ((x^2 - x + 1)e^x + C)' = ((x^2 - x + 1)e^x)' = ((x^2 - x + 1)e^x)' = \\ &= (x^2 - x + 1)' e^x + (x^2 - x + 1)(e^x)' = (2x - 1)e^x + (x^2 - x + 1)e^x = \\ &= (2x - 1 + x^2 - x + 1)e^x = (x + x^2)e^x\end{aligned}$$

לכן המשחה של פונקציות $y(x) = (x^2 - x + 1)e^x + C$ היא הפתרון הכללי למשוואה

$$y' = (x + x^2)e^x$$

$$3. \text{ נמצא את הפתרון הפרטי לבעיית ההתחלה} \quad : \begin{cases} y' = (x + x^2)e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$0 = y(0) = (0^2 - 0 + 1)e^0 + C = 1 + C$$

לכן $1 + C = 0$ ז"א $C = -1$. התשובה הסופית:

$$y(x) = (x^2 - x + 1)e^x - 1$$

14. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $y' = y$. בנוסף לכך, מצא גם

את הפתרון הפרטי המתאים לתנאי ההתחלה $y(-2) = 4$.

תשובה: $y(x) = Ce^x, y(x) = 4e^{x+2}$

פתרון: זאת משוואת הפרדת המשתנים, לכן נשתמש בנוסחת I. Barrow:

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln |y| = x + C$$

$$|y| = Ce^x \quad C > 0$$

$$y = Ce^x \quad C \neq 0$$

במשך חיפוש הפתרונות, היינו מוכרחים לחלק ב- y , לכן צריך לבדוק, האם פונקצית אפס,

$y(x) \equiv 0$ היא פתרון. כדי לבדוק את העניין, צריך להציב את $y(x) \equiv 0$ במשוואה. אכן

$y'(x) \equiv 0$ בגלל ש- $y(x)$ פונקציה קבועה. אנו רואים שזה גם פתרון. הוא נכנס למשפחה

$y(x) = Ce^x$ עבור $C = 0$. סופית, הפתרון הכללי של המשוואה הוא משפחה של פונקציות

$y(x) = Ce^x$ המוגדרת עבור כל ערך של הפרמטר C .

נמצא את הפתרון הפרטי לביעת ההתחלה $\begin{cases} y' = y \\ y(-2) = 4 \end{cases}$. בשביל זה, נציב את

$x = -2$ בפונקציה $y(x) = Ce^x$: $y(-2) = Ce^{-2}$. זה אמור להיות שווה ל-4, שנותן

תנאי על הקבוע C : $Ce^{-2} = 4$, לכן $C = 4e^2$.

15. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $x^2 y' + y = 0$. בנוסף לכך,

מצא גם את הפתרון הפרטי המתאים לתנאי ההתחלה $y(-2) = 4$.

תשובה: $y(x) = Ce^{\frac{1}{x}}$ $y(x) = 4e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{x}}$

פתרון: נרשום את המשוואה בצורה נורמלית: $y' = -\frac{y}{x^2}$

נרשום את המשוואה בצורה:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2} \quad \left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} : \text{הסבר} \right)$$

זאת משוואה אם הפרדת המשתנים, לכן נשתמש בנוסחת Barrow:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\ln |y| = - \int x^{-2} dx$$

$$\ln |y| = x^{-1} + C$$

$$\ln |y| = \frac{1}{x} + C$$

$$|y| = Ce^{\frac{1}{x}} \quad C > 0$$

$$y = Ce^{\frac{1}{x}} \quad C \neq 0$$

בגלל האינטגרל $\int \frac{dy}{y}$, נבדוק ע"י ההצבה את הפתרון הקבוע $y(x) \equiv 0$: $x^2 \cdot 0 = 0$, לכן,

$C = 0$ גם נותן פתרון למשוואה. לכן הפתרון הכללי למשוואה הוא משפחה חד־פרמטרית

$$y(x) = Ce^{\frac{1}{x}}$$

מצא את הפתרון הפרטי המתאים לתנאי ההתחלה $y(-2) = 4$: $y(-2) = Ce^{-\frac{1}{2}} = 4$

לכן $C = 4e^{\frac{1}{2}}$.

16. מצא את הפתרון הכללי למשוואה $yy' + x = 0$.

מצא גם את הפתרון הפרטי המתאים לתנאי ההתחלה $y(-2) = 4$.

תשובה: הפתרון הכללי $x^2 + y^2 = C$, $C \geq 0$. הפתרון הפרטי לבעיית ההתחלה

$$y(x) = \sqrt{20 - x^2}$$

פתרון:

1. נקבה סוג של המשוואה: הצורה הנורמלית של המשוואה, $y' = -\frac{x}{y}$, מוראה

שהמשוואה מקבלת הפרדת משתנים, כי $-\frac{x}{y} = \frac{1}{y} \cdot (-x)$.

2. נמצא את הפתרון הכללי למשוואה: בשביל זה, נרשום את המשוואה בצורה

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

פורמלית, ניתן לכתוב

$$y \, dy = -x \, dx$$

לכן נשתמש בנוסחה של I. Barrow:

$$\int y \, dy = - \int x \, dx$$

נחשב את שני האינטגרלים:

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C$$

$$y^2 + x^2 = 2C$$

$$y^2 + x^2 = C$$

הנוסחה $x^2 + y^2 = C$ מגדירה את הפתרון כפונקציה סתומה עבור כל $C \geq 0$.

3. נמצא את הערך של הקבוע C עבור תנאי ההתחלה הנתון:

$$\begin{cases} yy' + x = 0 \\ y(-2) = 4 \end{cases} \quad \text{לכן הפתרון הפרטי לבעיית ההתחלה} \quad C = 4^2 + (-2)^2 = 20$$

הוא $x^2 + y^2 = 20$. בגלל ש- $y(-2) = 4 > 0$, את הפתרון ניתן לרשום בצורה

$$y(x) = \sqrt{20 - x^2} \quad \text{מפורשת:}$$

4. בדיקת התשובה:

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{20 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{20 - x^2}}$$

$$y(x)y'(x) + x = \sqrt{20 - x^2} \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{20 - x^2}}\right) + x = -x + x = 0$$

לכל x שבתחום ההגדרה של $y(x)$.

17. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $(x+1)y' + xy = 0$.

פתרון:

1. נקבה סוג של המשוואה: נרשום את המשוואה בצורה נורמלית:

$$y' = -\frac{xy}{x+1}$$

$$y' = \left(-\frac{x}{x+1}\right) \cdot y$$

לכן המשוואה שלנו היא משוואה נתינה להפרדת המשתנים:

$$y' = g(x)h(y) \quad g(x) = \left(-\frac{x}{x+1}\right) \quad h(y) = y$$

2. נמצא את הפתרון הכללי למשוואה:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x) dx$$

$$\frac{dy}{y} = \left(-\frac{x}{x+1}\right) dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{x}{x+1} dx$$

הערה חשובה: בגלל שבאינטגרל השמאלי y נמצא במכנה, חובה לבדוק את הפונקציה $y(x) \equiv 0$ האם היא גם פתרון.

$$(x+1) \cdot 0 + x \cdot 0 = 0$$

עבור כל x , לכן הפונקציה הקבועה $y(x) \equiv 0$ גם פתרון.

נחזור לנוסחה $\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{x}{x+1} dx$

$$\int \frac{dy}{y} = \ln |y| + C$$

$$-\frac{x}{x+1} = -\frac{x+1-1}{x+1} = -\frac{x+1}{x+1} - \frac{-1}{x+1} = \frac{1}{x+1} - 1$$

$$-\int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{1}{x+1} dx - \int dx = \ln |x+1| - x + C$$

בחישובים הבאים נשתמש בכמה תכונות של לוגאריתם:

$$\ln(AB) = \ln A + \ln B \quad (\text{א})$$

$$\ln A = \ln B \Rightarrow A = B \quad (\text{ב})$$

$$-x = \ln(e^{-x}) \quad (\text{ג})$$

ובכן:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{x}{x+1} dx$$

$$\ln |y| = \ln |x+1| - x + C$$

$$\ln |y| = \ln |x+1| + \ln(e^{-x}) + \ln(e^C)$$

$$\ln |y| = \ln |e^C(x+1)e^{-x}|$$

$$|y| = |e^C(x+1)e^{-x}|$$

$$y = \pm e^C(x+1)e^{-x}$$

מסקנה: $y(x) = C_1(x+1)e^{-x}$ כאשר $C_1 = \pm e^C$ לכן $C_1 \neq 0$. אבל קבענו קודם ש- $C_1 = 0$ גם נותן פתרון (את הפונקציה $y(x) \equiv 0$). לכן כל ערל של C_1 נותן פתרון. סופית, אנחנו להשתמש את הסמן C במקום C_1 :

$$y(x) = C(x+1)e^{-x}$$

3. נבדוק את הפתרון: נציב את הביטוי $y(x) = C_1(x+1)e^{-x}$ בנשוואה

$$:(x+1)y' + xy = 0$$

$$y(x) = C(x+1)e^{-x}$$

$$y'(x) = C((x+1)e^{-x})' = C((x+1))' e^{-x} + C(x+1)(e^{-x})' =$$

$$= Ce^{-x} - C(x+1)e^{-x} = -Cxe^{-x}$$

הצבה במשוואה:

$$(x+1)y'(x) + xy(x) = 0$$

$$(x+1)(-Cxe^{-x}) + xC(x+1)e^{-x}$$

$$-Cx(x+1)e^{-x} + xC(x+1)e^{-x} \equiv 0$$

18. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $(y+1)xy' - (x-1)y = 0$.

בנוסף לכך, מצא גם את הפתרון הפרטי המתאים לתנאי ההתחלה $y(-2) =$

4.

תשובה: $xy = Ce^{x-y}$

פתרון: נרשום את המשוואה בצורה נורמלית: $y' = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{y}{y+1}$. זאת המשוואה

הנתונה להפרדת המשתנים: $y' = g(x)h(y)$. ע"י שמוש בנוסחה $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx$,

נקבל $\int \left(1 + \frac{1}{y}\right) dy = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$, $\ln|y| + \ln|x| = y + \ln|y| = x - \ln|x| + C$,

$\ln|xy| = x - y + C$, $|xy| = Ce^{x-y}$, $C > 0$, $xy = Ce^{x-y}$, $C \neq 0$. ועתה נבדוק

האם הערך $C = 0$ גם נותן פתרון. זה ככה, כי למשוואה האלגברית $xy = 0$ יש שני

פתרונות: $x = 0$ ו- $y = 0$. ברור ששני הישרים הם קווים אינטגרליים. לכן הפתרון הכללי

הוא $xy = Ce^{x-y}$ כאשר כל ערך של הקבוע C מותר. הפתרון הזה הוא פונקציה סתומה.

כדי לקבל את הפתרון הפרטי, נציב $x = -2$, $y = 4$ בפתרון הכללי ונקבל $C = -8e^6$,

לכן הפתרון הפרטי הוא $xy = -8e^{x-y+6}$.

19. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $y - xy' = 1 + x^2y'$ בנוסף

לכך, מצא גם את הפתרון הפרטי המתאים לתנאי ההתחלה $y(-2) = 4$.

תשובה: $y(x) = 1 + \frac{2x}{3(1+x)}, y(x) = 1 + \frac{Cx}{1+x} \quad (C \in \mathbb{R})$

פתרון: הצורה הנורמלית של המשוואה היא $y' = \frac{y-1}{x(x+1)}$ זאת משוואה עם

הפרדת משתנים. לפי נוסחת Barrow,

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y-1} &= \int \frac{dx}{x(x+1)} \\ \ln|y-1| &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} \\ \ln|y-1| &= \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C \end{aligned}$$

לכן $|y-1| = C \cdot \left| \frac{x}{x+1} \right|, (C > 0), y-1 = C \cdot \frac{x}{x+1}, (C \neq 0)$. פתרון בצורה

מפורשת: $y(x) = 1 + \frac{Cx}{1+x}$

קל לבדוק שהערך המיוחד $C = 0$ גם נותן פתרון.

2.2 מד"ר-1 עם פונקציה הומוגנית באגף הימני

$$\begin{cases} (y+x)y' + y - x = 0 \\ y(-2) = 4 \end{cases} \quad \text{20. מצא את הפתרון לבעיית ההתחלה}$$

תשובה: הפתרון הכללי: $y^2 + 2xy - x^2 = C$ ($C \neq 0$), הפתרון הפרטי עבור תנאי

$$y(-2) = 4: y^2 + 2xy - x^2 = 4$$

פתרון:

1. הצורה הנורמלית של המשוואה היא $y' = \frac{x-y}{x+y}$. זאת משוואה עם פונקציה

הומוגנית באגף הימני לכן נבצע את ההצבה $y(x) = x \cdot u(x)$:

$$xu' + u = \frac{x - xu}{x + xu}$$

$$xu' = \frac{1-u}{1+u} - u$$

$$u' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1-2u-u^2}{1+u}$$

קבלנו משוואה עם הפרדת המשתנים. לפי נוסחת Barrow,

$$\int \frac{u+1}{u^2+2u-1} du = - \int \frac{dx}{x}.$$

נחשב את האינטגרל השמאלי ע"י ההצבה $t := u^2 + 2u - 1$

$$\int \frac{u+1}{u^2+2u-1} du = \left\| \begin{array}{l} t := u^2 + 2u - 1 \\ dt = 2(u+1) dx \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |u^2 + 2u - 1| + C$$

לכן הפתרון למשוואת העזר הוא

$$\ln |u^2 + 2u - 1| = \ln \left| \frac{1}{x^2} \right| + C$$

$$\ln |u^2 + 2u - 1| = \ln \left| \frac{C}{x^2} \right| \quad (C \neq 0)$$

$$u^2 + 2u - 1 = \frac{C}{x^2} \quad (C \neq 0)$$

$$x^2 u^2 + 2x^2 u - x^2 = C \quad (C \neq 0)$$

נבדוק את הערך המיוחד $C = 0$. כדי לעשות את זה, נגזור את הביטוי

$$y^2 + 2xy - x^2 = 0 \quad (\text{נזכור ש-} y \text{ הוא פונקציה סתומה של } x):$$

$$2yy' + 2y + 2xy' - 2x = 0$$

הסתומה הזאת היא גם פתרון למשוואה.

2. כדי למצוא את הפטרון הפרטי, נציב $x = -2, y = 4$ בפתרון הכללי:

$$4^2 + 2(-2)4 - (-2)^2 = C \quad \text{לכן } C = 4.$$

21. מצה את הפתרון הכללי למשוואה $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$.

תשובה: $y(x) = x \sin(\ln |Cx|)$ ($C \neq 0$).

פתרון:

1. נרשום את המשוואה בצורה נורמלית:

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}.$$

זאת משוואה עם פונקציה הומוגנית באגף הימני, לכן נבצע את ההצבה $y = xu$:

$$u + xu' = \sqrt{1 - u^2} + u$$

$$xu' = \sqrt{1 - u^2}$$

$$u' = \frac{\sqrt{1 - u^2}}{x}.$$

2. הגענו למשוואה עם הפרדת משתנים. נרשום עברה את הנוסחת I. Barrow:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\arcsin u = \ln |Cx| \quad (C \neq 0)$$

$$u = \sin(\ln |Cx|) \quad (C \neq 0)$$

3. חוזרים לפונקצית הנעלם $y(x)$, ז"א לפתרון של המשוואה המקורית:

$$y(x) = xu(x) = x \sin(\ln |Cx|) \quad (C \neq 0)$$

* * *

בדיקת התשובה בעזרת התוכנה MAXIMA:

```
define(y(x),x*sin(log(C*x)));
define(ypr(x),diff(y(x),x));
fullratsimp(x*ypr(x)-y(x)-sqrt(x^2-(y(x))^2));
```

22. מצא את הפתרון הכללי למשוואה $y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$

תשובה: $x = y\sqrt{-2\ln|Cy|}$

פתרון: זאת משוואה בצורה נורמלית עם פונקציה הומוגנית באגף הימני, לכן נבצע

את ההצבה $y = xu$:

$$u + xu' = \frac{u}{1 - u^2}$$

$$xu' = \frac{u^3}{1 - u^2}$$

הגענו למשוואה עם הפרדת המשתנים. נרשום עבורה את הנוסחה של I. Barrow:

$$\int \frac{1-u^2}{u^3} du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{u^3} - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + C$$

$$C + \frac{1}{2u^2} + \ln|u| = -\ln|x|$$

$$C + \frac{x^2}{2y^2} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\ln|x|$$

$$C + \frac{x^2}{2y^2} + \ln|y| - \ln|x| = -\ln|x|$$

רואים שאי אפשר לרשום את y כפונקציה מפורשת של x , אבל ניתן לבדד את x :

$$\frac{x^2}{2y^2} = C - \ln|y|$$

$$x^2 = 2y^2 (C - \ln|y|)$$

$$x = \pm|y|\sqrt{C - 2\ln|y|}.$$

$$y^2 + x^2 y' = x y y' \quad 1$$

$$(x^2 - y x^2) y' + y^2 + x y^2 = 0 \quad 2$$

$$\ln \left| \frac{y}{x} \right| - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = C \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

$$e^y (1 + x^2) y' - 2x (1 + e^y) = 0 \quad 3$$

$$y(x) = \ln [C(x^2 + 1) - 1] \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

$$x y' + x + y = 0 \quad 4$$

$$y(x) = \frac{C - x^2}{2x} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: 1. הצורה הנורמלית, $y' = -1 - \frac{y}{x}$, מוראה שזאת משוואה עם פונקציה

הומוגנית באגף הימני, לכן נבצע את ההצבה $y(x) = x u(x)$:

$$x y' + x - y = 0 \quad 5$$

$$y(x) = x \ln \frac{C}{x} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

$$y^2 + x^2 y' = xy y' \quad 6.$$

$$y(x) = C e^{\frac{y}{x}} \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

פתרון: נרשום את המשווה בצורה נורמלית:

$$y' = \frac{y^2}{xy - x^2}.$$

רואים שזאת מד"ר-1 עם פונקציה הומוגנית האגף הימני, לכן נבצע את ההצבה

$$y(x) = xu(x)$$

$$(x^2 + y^2)y' = 2xy \quad 7.$$

$$y^2 - x^2 = C y \quad \underline{\text{תשובה:}}$$

2.3 משוואות לינאריות

$$23. \quad \begin{cases} xy' - y = x^2 e^x \\ y(1) = e \end{cases} \quad \text{מצא את הפתרון הפרטי של בעיית ההתחלה}$$

תשובה: $y(x) = xe^x$

פתרון:

1. נקבה סוג של המשוואה:

זאת משוואה לינארית, לכן $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ כאשר $y_h(x)$ הפתרון הכללי
למשוואה ההומוגנית המתאימה $xy' - y = 0$, ו- $y_p(x)$ פתרון פרטי (פתרון כלשהוא)
למשוואה הנתונה: $xy' - y = x^2 e^x$

2. נמצא את הפתרון הכללי $y_h(x)$ למשוואה ההומוגנית $xy' - y = 0$

משוואה עם הפרדת משתנים:

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \qquad y \neq 0$$

חייבים לבדוק את הפונקציה הקבועה, $y(x) \equiv 0$ האם היא פתרון:

$$y(x) \equiv 0$$

$$y'(x) \equiv 0$$

$$xy' - y = 0$$

$$x \cdot 0 - 0 = 0$$

מסקנה: $y(x) \equiv 0$ גם פתרון.

$$\ln |y| = \ln |x| + C_1$$

$$\ln |y| = \ln |e^{C_1} x|$$

נסמן $e^{C_1} =: C_2$ אזי $C_2 > 0$.

$$\ln |y| = \ln |C_2 x| \quad C_2 > 0$$

$$|y| = |C_2 x| \quad C_2 > 0$$

$$y = \pm C_2 x \quad C_2 > 0$$

$$y = Cx \quad C \neq 0$$

בדקנו אבל שהפונקציה $y(x) \equiv 0$ גם פתרון, לכן הפתרון הכללי הוא $y_h(x) = Cx$ בלי הגבלות ל- C .

3. נמצא את פתרון פרטי $y_p(x)$ למשוואה $xy' - y = x^2 e^x$

נחפש את $y_p(x)$ בצורה $y_p(x) := \mu(x)x$ כאשר $\mu(x)$ פונקציה לא ידועה. כדי למצוא את הפונקציה $\mu(x)$, נמצא משוואה דיפרנציאלית בשבילה:

$$xy' - y = x^2 e^x$$

$$y = \mu x$$

$$y' = (\mu x)' = \mu' x + \mu \cdot (x)' = \mu' x + \mu$$

$$x(\mu' x + \mu) - \mu x = x^2 e^x$$

$$x^2 \mu' + \mu x - \mu x = x^2 e^x$$

$$x^2 \mu' = x^2 e^x$$

$$\mu' = e^x$$

מספיק פתרון אחד, לכן $\mu(x) = e^x$ לכן

$$y_p(x) = x e^x.$$

4. נרשום את הפתרון הכללי y למשוואה הנתונה:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$y(x) = Cx + x e^x = (e^x + C)x$$

5. נבדוק את הפתרון:

6. נמצא את הפתרון לבעיית ההתחלה:

$$y(x) = (e^x + C)x$$

$$y(1) = e$$

$$e + C = e$$

$$C = 0$$

לכן הפתרון לבעיית ההתחלה הוא

$$y(x) = xe^x$$

24. מצא את הפתרון הכללי למשוואה $y' - 2xy + 2x^3 = 0$

תשובה: $y(x) = Ce^{x^2} + x^2 + 1$

פתרון:

1. משוואה לינארית, לכן הפתרון יהיה בצורה $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ כאשר $y_h(x)$ הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית $y' = 2xy$ ו- $y_p(x)$ פתרון פרטי כלשהו של המשוואה הנתונה.

2. הפתרון הכללי $y_h(x)$: למשוואה $y' = 2xy$ נתון ע"י נוסחת Barrow:

$$\int \frac{dy}{y} = 2 \int x \, dx$$

$$\ln |y| = x^2 + C$$

$$|y| = Ce^{x^2} \quad C > 0$$

$$y = Ce^{x^2} \quad C \neq 0$$

שהיות של y במחנה של האינטגרל הראשון אומרת שצריך לבדוק האם לא איבדנו בדרך את הפתרון הקבוע $y(x) \equiv 0$. ההצבה של הפונקציה הזאת במשוואה $y' = 2xy$ מביאה לזהות, לכן $C = 0$ ב- $y = Ce^{x^2}$ גם נותנת פתרון. בסיכום, הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית נתון ע"י הנוסחה $y_p(x) = Ce^{x^2}$ כאשר כל

ערכים של הקבועה C מותרים.

3. את הפתרון הפרטי של המשוואה הנתונה נחפש בצורה $y_p(x) = c(x)e^{x^2}$ כאשר

$c(x)$ פונקציה לא ידועה. כדי למצוא את $c(x)$, נציב את הביטוי עבור $y_p(x)$

במשוואה:

$$c'e^{x^2} + c \cdot 2xe^{x^2} - 2ce^{x^2} + 2x^3 = 0$$

$$c'e^{x^2} + 2x^3 = 0$$

$$c' = -2x^3e^{-x^2}$$

$$c(x) = -2 \int x^3 e^{-x^2} dx$$

לכן נשאר לנו לחשב את האינטגרל $-2 \int x^3 e^{-x^2} dx$. נבצע את האינטגרציה בחלקים.

$$f(x) := x^2 \quad g'(x) := -2xe^{-x^2}$$

$$f'(x) = 2x \quad g(x) \in \int (-2xe^{-x^2}) dx$$

$$f'(x) = 2x \quad g(x) = e^{-x^2}$$

$$\begin{aligned} \int f(x)g'(x) dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx = \\ &= x^2 e^{-x^2} - 2 \int x e^{-x^2} dx = (x^2 + 1)e^{-x^2} \end{aligned}$$

$$y_p(x) = c(x)e^{x^2} = (x^2 + 1)e^{-x^2}e^{x^2} = x^2 + 1 \quad \text{לכן}$$

4. $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{x^2} + x^2 + 1$ וכל ערך של C נותן פתרון פרטי.

25. מצא את הפתרון הכללי למשוואה $y' + \frac{1-2x}{x^2} y - 1 = 0$

תשובה: $y(x) = x^2 \left(1 + Ce^{\frac{1}{x}}\right)$

פתרון: זאת משוואה לינארית. נרשום אותה בצורה נורמלית:

$$y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1.$$

1. נמצא את הפתרון הכללי $y_h(x)$ של המשוואה ההומוגנית מתאימה

$$y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 0 :$$

$$y' = \frac{2x-1}{x^2} y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x-1}{x^2} dx$$

חשוב : ראינו פונקצית הנעלם y בתוך האינטגרל במכנה, לכן חייבים בסוף לבדוק

את הפתרון $y(x) \equiv 0$!

$$\ln |y| = 2 \ln |x| - \int x^{-2} + C$$

$$\ln |y| = \ln (x^2) + \frac{1}{x} + C$$

$$\ln |y| - \ln (x^2) = \frac{1}{x} + C$$

$$\ln \left| \frac{y}{x^2} \right| = \frac{1}{x} + C$$

$$\left| \frac{y}{x^2} \right| = C e^{\frac{1}{x}} \quad (C > 0)$$

$$\frac{y}{x^2} = C e^{\frac{1}{x}} \quad (C \neq 0)$$

לכן

$$y_h(x) = C x^2 e^{\frac{1}{x}} \quad (C \neq 0).$$

2. נבדוק ע"י הצבה שהפונקציה הקבועה $y(x) \equiv 0$ גם פתרון למשוואה ההומוגנית

המתאימה:

$$y(x) \equiv 0$$

$$y'(x) \equiv 0$$

$$y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 0 + \frac{1-2x}{x^2} 0 = 0$$

לכן זה פתרון, והפונציות

$$y_h(x) = Cx^2 e^{\frac{1}{x}}$$

הן פתרונות של המשוואה ההומוגנית המתאימה עבור כל מספר ממשי C .

3. נמצא פתרון פרטי $y_p(x)$: נחפש אותו בצורה

$$y_p(x) = c(x)x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

כאשר $c(x)$ פונקציה לא ידועה. כדי למצוא אותה, נציב את $y_p(x)$ במשוואה

המקורית (הלא הומוגנית):

$$y(x) = c(x)x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

$$y'(x) = c'x^2 e^{\frac{1}{x}} + c(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$$

$$c'x^2 e^{\frac{1}{x}} + c(2x-1)e^{\frac{1}{x}} + \frac{1-2x}{x^2} c x^2 e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$c'x^2 e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$c' = x^{-2} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$c \in \int x^{-2} e^{-\frac{1}{x}} dx$$

$$c(x) = e^{-\frac{1}{x}}$$

לכן

$$y_p(x) = c(x)x^2 e^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}} x^2 e^{\frac{1}{x}} = x^2.$$

4. סופית,

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

2.4 משוואות Bernoulli

26. מצא את הפתרון הכללי למשוואה $y' + 2y = y^2 e^x$

תשובה: $y(x) = \frac{1}{e^x + C e^{2x}}$ או $y(x) \equiv 0$

פתרון:

1. זאת משוואת Bernoulli, לכן מבצעים את ההצבה $z(x) := y^{-1}(x)$

$$y = z^{-1}$$

$$y' = -\frac{z'}{z^2}$$

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{z} = \frac{e^x}{z^2}$$

$$-z' + 2z = e^x$$

$$z' - 2z = -e^x$$

קיבלנו משוואה ליניארית. נשים לב על זה שלמשוואה הנתונה יש הפתרון הטריוויאלי

$$y(x) \equiv 0$$

2. נמצא את הפתרון הכללי לצשוואה ההומוגנית המתאימה $z' - 2z = 0$

$$z(x) = \exp\left(2 \int dx\right) = \exp(2x + C) = D e^{2x}.$$

3. נמצא פתרון פרטי כלשהו $z_p(x)$ למשוואה $z' - 2z = -e^x$. נחפש את הפתרון בצורה $z_p(x) = \mu(x)e^{2x}$ כאשר $\mu(x)$ פונקציה לא ידועה (גורם האינטגרציה). כדי לרשום משוואה דיפרנציאלית עבור $\mu(x)$, נציב את $z_p(x) = \mu(x)e^{2x}$ במשוואה

$$z' - 2z = -e^x$$

$$\begin{aligned}(\mu e^{2x})' - 2\mu e^{2x} &= -e^x \\ \mu' e^{2x} + 2\mu e^{2x} - 2\mu e^{2x} &= -e^x \\ \mu' e^{2x} &= -e^x \\ \mu' &= -e^{-x}\end{aligned}$$

הערה : כאן השתמשנו בשתי עובדות:

(א) $(fg)' = f'g + fg'$, לכן $(\mu e^{2x})' - 2\mu e^{2x} = \mu' e^{2x} + 2\mu e^{2x} - 2\mu e^{2x}$.

(ב) $e^{ax} e^{bx} = e^{ax+bx}$, לכן $\frac{e^x}{e^{2x}} = e^x e^{-2x} = e^{x-2x} = e^{-x}$.

הפתרון הכללי למשוואה $\mu' = -e^{-x}$ הוא האינטגרל הלא מסוים

$$\mu(x) = - \int e^{-x} dx = e^{-x} + C.$$

אנחנו צריכים פתרון פרטי אחד, הבחירה טבעית ביותר היא $C = 0$, לכן

$$z_p(x) = e^{-x} e^{2x} = e^x$$

ואז

$$z(x) = z_h(x) + z_p(x) = De^{2x} + e^x.$$

4. נחזור למשוואה המקורית:

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{Ce^{2x} + e^x}.$$

5. נבדוק את הפתרון שקבלנו:

נקבע האם הערך $C = 0$ גם נותן פתרון:

$$C = 0 \Rightarrow z(x) = e^{-x}$$

$$y' + 2y = y^2 e^x$$

$$(e^{-x})' + 2e^{-x} = -e^{-x} + 2e^{-x} = e^{-x}$$

$$(e^{-x})^2 e^x = e^{-2x} e^x = e^{-x}$$

$$e^{-x} = e^{-x},$$

לכן $C = 0$ גם נותן פתרון.

27. מצא את הפתרון הכללי למשוואה $(x+1)(y' + 2y^2) + y = 0$

תשובה: $y(x) \equiv 0$ או $y(x) = \frac{1}{(x+1)(2 \ln|x+1|+C)}$

פתרון: זאת משוואת Bernoulli לכן נציב $z = \frac{1}{y}$: $z' = -\frac{y'}{y^2}$, $z' - \frac{z}{x+1} = 2$

קבלנו משוואה לינארית, הפתרון הוא סכום $z = z_h + z_p$. הפונקציה $z_h(x)$ מקיימת את

המשוואה $z' = \frac{z}{x+1}$ לכן $z' = \frac{z}{x+1}$ $z_h(x) = C \cdot (x+1)$ את הפונקציה $z_p(x)$ נחפש בצורה

$$z_h(x) = (x+1)c(x) : c' = \frac{2}{x+1} \text{ לכן}$$

$$c(x) = 2 \ln|x+1| + C$$

28. מצא את הפתרון הכללי למשוואה $3y - 2y' = y^4 e^{3x}$

פתרון:

1. בשלבים מסוימים נצטרך לחקק בחזקות של y , לכן חשוב לזכור ש- הפונקציה הקועה

$$y(x) \equiv 0 \text{ היא פתרון (פרטי) של המשוואה הנתונה.}$$

2. זה משוואת Bernoulli, לכן נבצע את ההחלפה $z = y^{-3}$ כדי לקבל משוואה

$$\text{לינארית: } z' = -3y'y^{-4}. \text{ נחלק את שני צדדי המשוואה ב- } y^4:$$

$$3y^{-3} - 2y'y^{-4} = e^{3x}$$

העת יכולים לעבור לפונקצית נעלם החדשה z ע"י כללים

$$y^{-3} \rightsquigarrow z$$

$$y'y^{-4} \rightsquigarrow z'$$

$$3y^{-3} - 2y'y^{-4} = e^{3x} \rightsquigarrow 3z - 2z' = e^{3x}$$

קיבלנו משוואה לינארית עבור פונקצית הנעלם החדשה $z(x)$:

$$2z' - 3z = -e^{3x}$$

3. כדי לפתור את המשוואה הלינארית $2z' - 3z = -e^{3x}$ צריך קודם לפתוח את

המשוואה ההומוגנית המתאימה $2z' - 3z = 0$, או, בצורה נורמלית, $z' - \frac{3}{2}z = 0$.

הפתרון הכללי של המשוואה הזאת (שהיא משוואה נתינה להפרדת משתנים) נתונה

ע"י הנוסחה

$$z(x) = \exp\left(\int \frac{3}{2} dx\right) = De^{\frac{3}{2}x}$$

4. כדי לקבל פתרון פרטי $z_p(x)$ למשוואה $2z' - 3z = -e^{3x}$, נקח פתרון פרטי כלשהו

למשוואה ההומוגנית המתאימה $z' - \frac{3}{2}z = 0$, לדוגמה, את הפתרון $e^{\frac{3}{2}x}$ (עבור

$D = 0$), ונכפיל אותו ב"גורם אינטגרציה" $\mu(x)$:

$$z_p(x) = \mu(x)e^{\frac{3}{2}x}.$$

גורם האינטגרציה $\mu(x)$ היא פונקציה לא ידועה שמקיימת משוואה דיפרנציאלית

מסויימת. נמצא את המשוואה הזאת ע"י הצבה של הפונקציה $z_p(x)$ במשוואה

$$2z' - 3z = -e^{3x}$$

$$2z' - 3z = -e^{3x}$$

$$2\left(\mu(x)e^{\frac{3}{2}x}\right)' - 3\mu(x)e^{\frac{3}{2}x} = -e^{3x}$$

$$2\mu'(x)e^{\frac{3}{2}x} + 2\mu(x)\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x} - 3\mu(x)e^{\frac{3}{2}x} = -e^{3x}$$

$$2\mu'(x)e^{\frac{3}{2}x} = -e^{3x}$$

$$\mu'(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}x}$$

הערה : כאן השתמשנו בשתי עובדות:

$$(f g)' = f' g + f g' \text{ , לכן } (\mu(x) e^{\frac{3}{2}x})' = \mu'(x) e^{\frac{3}{2}x} + \mu(x) \frac{3}{2} e^{\frac{3}{2}x} \quad (\text{א})$$

$$e^{ax} e^{bx} = e^{ax+bx} \text{ , לכן } e^{-\frac{3}{2}x} e^{3x} = e^{\frac{3}{2}x} \cdot \frac{1}{e^{\frac{3}{2}x}} \quad (\text{ב})$$

קבלנו משוואה עבור הפונקציה $\mu(x)$:

$$\mu'(x) = -\frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}x},$$

הפתרון הוא

$$\mu(x) = -\frac{1}{2} \int e^{\frac{3}{2}x} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}x} + C = -\frac{1}{3} e^{\frac{3}{2}x} + C.$$

כל פתרון פרטי מתאים, הבחירה פשוטה ביותר היא $C = 0$, אז $\mu(x) = -\frac{1}{3} e^{\frac{3}{2}x}$

מסקנה:

$$z_p(x) = -\frac{1}{3} e^{\frac{3}{2}x} e^{\frac{3}{2}x} = -\frac{1}{3} e^{3x}.$$

5. נרשום את הפתרון הכללי של המשוואה הלינארית $2z' - 3z = -e^{3x}$:

$$z(x) = D e^{\frac{3}{2}x} + z_p(x) = D e^{\frac{3}{2}x} - \frac{1}{3} e^{3x}.$$

6. נרשום את הפתרון הכללי למשוואה המקורית $3y - 2y' = y^4 e^{3x}$:

$$y(x) = [z(x)]^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\left(D e^{\frac{3}{2}x} - \frac{1}{3} e^{3x}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

חלק II

מערכות מד"ר-1

פרק 3

מטריצה יסודית והפתרון הכללי למערכת

של מד"ר-1

3.1 משוואות הומוגניות

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases} \quad \text{29. מצא את הפתרון הכללי למשוואה}$$

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ y_2(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{cases} \quad \text{תשובה:}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{פתרון: המשוואה היא משוואה לינארית, } y' = Ay \text{ עם}$$

המשוואה האופיינית של המטריצה A ,

הם $\lambda^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A) = 0$, היא $\lambda^2 + 1 = 0$, לכן הערכים העצמיים הם

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \lambda = \lambda_1 = i, \lambda_2 = \bar{\lambda} = -i. \text{ הוקטור העצמי המתאים ל-}\lambda:$$

$$z(x) = e^{ix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ix} \\ ie^{ix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x + i \sin x \\ i \cos x - \sin x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x + i \sin x \\ -\sin x + i \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

לכן המערכת היסודית של פתרונות

$$s_1(x) = \Re z(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} \quad s_2(x) = \Im z(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = C_1 s_1(x) + C_2 s_2(x) = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

והמטריצה היסודית של המשוואה:

$$\Psi(x) = (s_1(x), s_2(x)) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי של המשוואה נתון ע"י הנוסחה

$$y(x) = \Psi(x)C = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{pmatrix}$$

או, בצורה מפורטת,

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ y_2(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_2 - 2y_1 \end{cases} \quad \text{30. מצא את הפתרון הכללי למערכת}$$

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1(\cos x - \sin x) + C_2(\cos x + \sin x) \\ y_2(x) = -2C_1 \cos x - 2C_2 \sin x \end{cases} \quad \text{תשובה:}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{פתרון: המשוואה היא משוואה לינארית, } y' = Ay \text{ עם}$$

המשוואה האופיינית של המטריצה A ,

הם $\lambda^2 - \text{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A) = 0$, היא $\lambda^2 + 1 = 0$, לכן הערכים העצמיים הם

$$u = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \bar{\lambda} = -i, \lambda = \lambda_1 = i \quad \text{הוקטור העצמי המתאים ל-}\lambda:$$

$$z(x) = e^{ix} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)e^{ix} \\ -2e^{ix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)(\cos x + i \sin x) \\ -2(\cos x + i \sin x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos x - \sin x) + i(\cos x + \sin x) \\ -2 \cos x - 2i \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x - \sin x \\ -2 \cos x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ -2 \sin x \end{pmatrix}$$

לכן המערכת היסודית של פתרונות

$$s_1(x) = \Re z(x) = \begin{pmatrix} \cos x - \sin x \\ -2 \cos x \end{pmatrix} \quad s_2(x) = \Im z(x) = \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ -2 \sin x \end{pmatrix}$$

והמטריצה היסודית של המשוואה:

$$\Psi(x) = (s_1(x), s_2(x)) = \begin{pmatrix} \cos x - \sin x & \cos x + \sin x \\ -2 \cos x & -2 \sin x \end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי של המשוואה נתון ע"י הנוסחה

$$\begin{aligned} y(x) = \Psi(x)C &= \begin{pmatrix} \cos x - \sin x & \cos x + \sin x \\ -2 \cos x & -2 \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} C_1(\cos x - \sin x) + C_2(\cos x + \sin x) \\ -2C_1 \cos x - 2C_2 \sin x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

או, בצורה מפורטת,

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1(\cos x - \sin x) + C_2(\cos x + \sin x) \\ y_2(x) = -2C_1 \cos x - 2C_2 \sin x \end{cases}$$

31. רשום את המד"ר-2 $y'' - 5y' + 4y = 0$ כמערכת $y' = Ay$ של שתי

משוואות מסדר 1 ומצא את המטריצה היסודית ואת הפתרון הכללי.

פתרון:

1. נגדיר שתי פונקציות נעלם חדשות: $w_1 := y$ ו- $w_2 := y'$, אזי את המשוואה

$y'' - 5y' + 4y = 0$ ניתן לרשום בצורה $w_2' - 5w_2 + 4w_1 = 0$. יחד אם התנאי

$w_1' = w_2$ כל זה מגדיר מערכת בת שני מד"ר-1:

$$\begin{cases} w_1' = w_2 \\ w_2' = -4w_1 + 5w_2 \end{cases}.$$

2. נגדיר

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

אזי ניתן לרשון את המערכת בצורה

$$w' = Aw.$$

3. נמצא את הערכים העצמיים של המטריצה $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$. למשוואה האופיינית,

$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ יש שני שורשים שונים: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$. לכן ניתן למצוא

למטריצה A שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית.

עבור $\lambda_1 = 1$, וקטור $u = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ מקיים את התנאי $(A - I)u = 0$, או

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

. פתרון לא טריוויאלי, למשל, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, לכן $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

באופן דומה, עבור $\lambda_2 = 4$, פותרים את המשוואה האלגברית הלינארית

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

. כאן נקח את $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 1$ כפתרון (לא טריוויאלי). לכן

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4. המטריצה היסודית היא

$$\Psi(x) = (e^x u_1, e^{4x} u_2) = \begin{pmatrix} e^x & e^{4x} \\ e^x & 4e^{4x} \end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי הוא

$$\Psi(x)C = \begin{pmatrix} e^x & e^{4x} \\ e^x & 4e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^x + C_2 e^{4x} \\ C_1 e^x + 4C_2 e^{4x} \end{pmatrix}.$$

32. רשום את המד"ר-2 $y'' - 2y' + y = 0$ כמערכת $y' = Ay$ של שתי

משוואות מסדר 1 ומצא את המטריצה היסודית ואת הפתרון הכללי.

תשובה: $y(x) = (C_1 + C_2x)e^x$

פתרון:

1. נגדיר שתי פונקציות נעלם חדשות: $w_1 := y$ ו- $w_2 := y' = w_1'$ אזי את המשוואה

$y'' - 2y' + y = 0$ ניתן לרשום בצורה $w_2' - 2w_2 + w_1 = 0$. יחד אם התנאי

$w_1' = w_2$ כל זה מגדיר מערכת בת שני מד"ר-1:

$$\begin{cases} w_1' = w_2 \\ w_2' = -w_1 + 2w_2 \end{cases}.$$

2. נגדיר

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

אזי ניתן לרשון את המערכת בצורה

$$w' = Aw.$$

3. נמצא את הערכים העצמיים של המטריצה $w := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

למשוואה האופיינית, $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ יש שני שורשים שונים: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. נמצא

למטריצה A וקטורים עצמיים.

עבור $\lambda_1 = 1$, וקטור $u = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ מקיים את התנאי $(A - I)u = 0$, או

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

. פתרון לא טריוויאלי, למשל, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, לכן $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

אין למטריצה A עוד וקטור עצמי שאינו תלוי לינארית מהוקטור u_1 , לכן נמצא

ורטור מחזורי, ז"א וקטור u_2 שמקיים תנאי $(A - I)u_2 = u_1$. הרכבים β_2, β_1 של

הוקטור $u_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ מהווים פרון למערכת משוואות

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad R_2 - R_3 \rightarrow R_2$$

לכן, ה"מערכת" שלנו היא למעשה משוואה אחת:

$$-\beta_1 + \beta_2 = 1.$$

ניתן לקחת פתרון כלשהו, למשל $\beta_2 = 1, \beta_1 = 0$:

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. נשים לב על $AP = P(I+N)$ כאשר $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P := (u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ו $N := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. המטריצה היסודית היא

$$\Psi(x) = e^x P e^{Nx}.$$

נמצא את e^{Nx} :

$$e^{Nx} = I + xN + \frac{x^2}{2}N^2 + \dots = I + xN = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

לכן

$$\Psi(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי של המערכת מד"ר-1 הוא

$$\Psi(x)C = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^x + C_2 x e^x \\ C_1 e^x + C_2 (x+1)e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (C_1 + C_2 x)e^x \\ (C_1 + C_2 + C_2 x)e^x \end{pmatrix}.$$

6. לכן פתרו למד"ר-2 הנתון הוא $y(x) = w_1(x) = (C_1 + C_2x)e^x$

3.2 משואות לא הומוגניות

$$33. \text{ רשום את המערכת } \begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2 - e^{2x} \\ y_2' = -3y_1 + 2y_2 + 6e^{2x} \end{cases} \text{ בצורה}$$

$y' = Ay + b(x)$ ומצא את הפתרון הכללי.

$$\text{תשובה: } \begin{cases} y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 2e^{2x} \\ y_2(x) = 3C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 9e^{2x} \end{cases}$$

פתרון:

$$1. \text{ המשוואה היא משוואה לינארית, } y' = Ay + b(x) \text{ עם } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b(x) = \begin{pmatrix} -e^{2x} \\ 6e^{2x} \end{pmatrix} \quad \text{ו}$$

2. קודם נמצא את הפתרון למערכת ההומוגנית המתאימה:

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2 \\ y_2' = -3y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

$$\text{המשוואה היא משוואה לינארית, } y' = Ay \text{ עם } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

המשוואה האופיינית של המטריצה A , $\lambda^2 - \text{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A) = 0$, היא $\lambda^2 - 1 = 0$,

לכן הערכים העצמיים הם $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. הוקטורים העצמיים המתאימים:

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ , לכן הפתרון הכללי הוא}$$

$$y_h(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} u_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} u_2 = C_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נוח לרשום את הפתרון בצורה

$$y_h(x) = \Psi(x)C$$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 3e^x & e^{-x} \end{pmatrix} \text{ "מטריצה יסודית" ו- } C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \text{ עמודת הקבועים.}$$

אכן,

$$y_h(x) = \Psi(x)C = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 3e^x & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ 3C_1 e^x + C_2 e^{-x} \end{pmatrix}$$

או, בצורה יותר מפורטת,

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ y_2(x) = 3C_1 e^x + C_2 e^{-x} \end{cases}$$

3. נשתמש במטריצה היסודית

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 3e^x & e^{-x} \end{pmatrix}.$$

כדי למצוא הפתרון הכללי של המשוואה הלא הומוגנית $y' = Ay + b(x)$.

כדי להשתמש בנוסחה $y(x) = \Psi(x) \int \Psi^{-1}(x)b(x) dx$ צריך למצוא את המטריצה ההופכית $\Psi^{-1}(x)$. בשביל זה ניתן להשתמש בשיטת Gauss או שיטת Cramer, אבל למטריצה בגודל 2×2 יש נוסחה פשוטה:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

במקרה שלנו,

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 3e^x & e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$\det \Psi(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ 3e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = e^x e^{-x} - e^{-x} \cdot 3e^x = 1 - 3 = -2$$

לכן

$$\Psi^{-1}(x) = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} e^{-x} & -e^{-x} \\ -3e^x & e^x \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{-x} & e^{-x} \\ 3e^x & -e^x \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{-1}(x)b(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{-x} & e^{-x} \\ 3e^x & -e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{2x} \\ 6e^{2x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7e^x \\ -9e^{3x} \end{pmatrix}$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 3e^x & e^{-x} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \int \begin{pmatrix} 7e^x \\ -9e^{3x} \end{pmatrix} dx = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 3e^x & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \int e^x dx \\ -9 \int e^{3x} dx \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 3e^x & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7e^x + C_1 \\ -9 \cdot \frac{1}{3}e^{3x} + C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ 3e^x & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7e^x + C_1 \\ -3e^{3x} + C_2 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7e^{2x} + C_1e^x - 3e^{2x} + C_2e^{-x} \\ 21e^{2x} + 3C_1e^x - 3e^{2x} + C_2e^{-x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4e^{2x} + C_1e^x + C_2e^{-x} \\ 18e^{2x} + 3C_1e^x + C_2e^{-x} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2e^{2x} + C_1e^x + C_2e^{-x} \\ 9e^{2x} + 3C_1e^x + C_2e^{-x} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

לכן הפתרון הכללי למשוואה (=מערכת משוואות) $y' = Ay + b(x)$ הוא

$$y(x) = \begin{pmatrix} 2e^{2x} + C_1e^x + C_2e^{-x} \\ 9e^{2x} + 3C_1e^x + C_2e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + 2e^{2x} \\ y_2(x) = 3C_1e^x + C_2e^{-x} + 9e^{2x} \end{cases} \quad \text{או, בצורה מפורטת,}$$

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + 2e^{2x} \\ y_2(x) = 3C_1e^x + C_2e^{-x} + 9e^{2x} \end{cases} \quad \text{אזי הפתרון יקבל צורה}$$

* * *

בדיקת הפתרון ע"י התוכנה MAXIMA:

```
define(y1(x), C1*%e^x+C2*%e^(-x)+2*%e^(2*x));
define(y2(x), 3*C1*%e^x +C2*%e^(-x)+9*%e^(2*x));
define(ypr1(x), diff(y1(x), x));
define(ypr2(x), diff(y2(x), x));
fullratsimp(ypr1(x)+2*y1(x)-y2(x)+%e^(2*x));
fullratsimp(ypr2(x)+3*y1(x)-2*y2(x)-6*%e^(2*x));
```

$$\begin{cases} y_1' = -4y_1 - 2y_2 + \frac{2}{e^x - 1} \\ y_2' = 6y_1 + 3y_2 - \frac{3}{e^x - 1} \end{cases} \quad \text{34. מצא את הפתרון הכללי למערכת}$$

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 + 2e^{-x}(\ln |e^x - 1| + C_2) \\ y_2(x) = -2C_1 + -3e^{-x}(\ln |e^x - 1| + C_2) \end{cases} \quad \text{תשובה:}$$

פתרון:

$$1. \text{ זאת מערכת לינארית } y' = Ay + b(x) \text{ עבור } A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{ו- } b(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{e^x - 1} \\ -\frac{3}{e^x - 1} \end{pmatrix} \text{ כאשר } y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{תזכורת: וקטור עצמי } u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$Au = \lambda u$$

עבור מספר λ מסויים. תנאי חשוב: $u \neq 0$. חישוב ערכים עצמיים:

$$Au - \lambda u = 0$$

$$(A - \lambda I)u = 0$$

מטריצה סקלרית

$$\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

למערכת המשוואות האלגבריות יש פתרון $u \neq 0$ אם ורק אחת מהשוואות מיותרת.

אם $\det(A - \lambda I) = 0$ לכן ע"ע הוא פתרון למשוואה הזאת.

2. מצא את המטריצה היסודית של המערכת :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(א) הערכים העצמיים של המטריצה}$$

$$\text{לכן צריך למצוא} \quad \begin{vmatrix} -4 - \lambda & -2 \\ 6 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (-4 - \lambda)(3 - \lambda) + 12 = \lambda^2 + \lambda$$

פתרונות למשוואה $\lambda^2 + \lambda = 0$ הם $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$.

(ב) נמצא וקטורים עצמיים:

$$\text{עבור } \lambda_1 = -1:$$

$$(A + I)u_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -4+1 & -2 \\ 6 & 3+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

למעשה יש כאן רק משוואה אחת:

$$3a + 2b = 0$$

נגיד

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

עבור $\lambda_2 = 0$:

$$Au_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

למעשה יש כאן רק משוואה אחת:

$$2a + b = 0$$

נגיד

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

כעת ניתן לרשום את הפתרון הכללי $y_h(x)$ למשוואה ההומוגנית $y' = Ax$:

$$y_h(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} u_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} u_2 = C_1 e^{-x} u_1 + C_2 e^{0 \cdot x} u_2 = C_1 e^{-x} u_1 + C_2 u_2 =$$

$$= C_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 e^{-x} + C_2 \\ -3C_1 e^{-x} - 2C_2 \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{cases} y_{h1}(x) = 2C_1 e^{-x} + C_2 \\ y_{h2}(x) = -3C_1 e^{-x} - 2C_2 \end{cases}$$

נוח להשתמש במטריצה

$$\Psi(x) := (e^{-x} u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 2e^{-x} & 1 \\ -3e^{-x} & -2 \end{pmatrix}$$

שנקראת מטריצה יסודית של המשוואה $y' = Ay + b(x)$. ניתן לרשום את הפתרון

הכללי למשוואה ההומוגנית המתאימה $y' = Ay$ בעזרת מטריצה יסודית $\Psi(x)$:

$$y_h(x) = \Psi(x)C$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \text{ כאשר } C \text{ מסמן את העמודה}$$

3. כדי למצוא פתרון פרטי $y_p(x)$ למשוואה הלא הומוגנית $y' = Ay + b(x)$ נמצא את

המטריצה ההופכית $\Psi^{-1}(x)$ למטריצה $\Psi(x)$:

]Perepisat'! Change the order of columns!!!!!![

$$\det \Psi(x) = 1 \cdot (-3e^{-x}) - 2e^{-x} \cdot (-2) = e^{-x}$$

$$\Psi(x)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2e^{-x} \\ -2 & -3e^{-x} \end{pmatrix}^{-1} = e^x \begin{pmatrix} -3e^{-x} & -2e^{-x} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2e^x & e^x \end{pmatrix}$$

$$\Psi(x)^{-1}b(x) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2e^x & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{e^x-1} \\ -\frac{3}{e^x-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^x}{e^x-1} \end{pmatrix}$$

$$\int \Psi(x)^{-1}b(x) \, dx = \begin{pmatrix} C_1 \\ \int \frac{e^x \, dx}{e^x - 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \ln |e^x - 1| + C_2 \end{pmatrix}$$

$$y(x) = \Psi(x) \int \Psi(x)^{-1}b(x) \, dx = \begin{pmatrix} C_1 + 2e^{-x}(\ln |e^x - 1| + C_2) \\ -2C_1 + -3e^{-x}(\ln |e^x - 1| + C_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 + \frac{1}{\cos x} \end{cases} \quad .35$$

36. רשום את המד"ר-2 $y'' + y = 4 \sin x$ כמערכת $y' = Ay + b(x)$ של

שתי משוואות מסדר 1 ומצא את הפתרון הכללי.

פתרון:

1. נרשום את המערכת השקולה בת שתי מד"ר-1: נסמן $w_1 := y$, $w_2 := y'$. אזי

המשוואה הנתונה מקבלת הצורה $w_2' + w_1 = 4 \sin x$, ויחד עם השוויון $w_2 = w_1'$,

$$\text{זה נותן את המערכת הבאה: } \begin{cases} w_1' = w_2 \\ w_2' = -w_1 + 4 \sin x \end{cases}, \text{ או, בצורה מטריצית,}$$

$$w' = Aw + B(x) \text{ כאשר } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ו- } B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \sin x \end{pmatrix}.$$

2. נמצא מטריצה יסודית של המערכת:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \text{ הערכים העצמיים של המטריצה } A: \text{ המשוואה האופיינית היא } \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i, \text{ לכן } 1 = 0. \text{ נסמן } \lambda_1 = i \text{ אזי } \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -i.$$

$$\text{נמצא את וקטור עצמי } u \text{ עבור } \lambda = i: \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ מכאן,}$$

$$\alpha = 1, \beta = i, \text{ אז } \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

נמצא את $e^{ix}u$:

$$e^{ix}u = (\cos x + i \sin x) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x + i \sin x \\ i \cos x - \sin x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

$$s_2(x) := \operatorname{Im}(e^{ix}u) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, s_1(x) := \operatorname{Re}(e^{ix}u) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} \quad \text{לכן}$$

היא מערכת יסודית של פתרונות למשוואה ההומוגנית $w' = Aw$ ואז $\Psi(x) =$

$$.(s_1, s_2) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

3. נמצאת הפתרון הכללי למערכת $w' = Aw + b(x)$:

$$\det \Psi(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\Psi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{-1}(x)b(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \sin^2 x \\ 4 \sin x \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2 \cos(2x) \\ 2 \sin(2x) \end{pmatrix}$$

$$w(x) = \Psi(x) \int \Psi^{-1}b(x) \, dx = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 2 - 2 \cos(2x) \\ 2 \sin(2x) \end{pmatrix} dx =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int (2 - 2 \cos(2x)) \, dx \\ 2 \int \sin(2x) \, dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x - \sin(2x) + C_1 \\ -\cos(2x) + C_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x \cos x - \cos x \sin(2x) + C_1 \cos x - \sin x \cos(2x) + C_2 \sin x \\ -2x \sin x + \sin x \sin(2x) - C_1 \sin x - \cos x \cos(2x) + C_2 \cos x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x \cos^2 x - \sin x \cos^2 x + \sin^3 x \\ -C_1 \sin x + C_2 \cos x - 2x \sin x + 2 \sin^2 x \cos x - \cos^3 x + \cos x \sin^2 x \end{pmatrix}$$

37. רשום את המערכת

$$\text{בצורה} \begin{cases} y_1' &= y_1 + y_2 - \cos x \\ y_2' &= -y_2 - 2y_1 + \cos x + \sin x \end{cases}$$

$y' = Ay + b(x)$ ובעזרת המטריצה היסודית מצא את הפתרון הכללי למערכת.

תשובה:

$$\begin{cases} y_1 &= (C_1 - C_2) \sin x - (x + C_1 + C_2) \cos x \\ y_2 &= (x + 2C_1) \cos x + (x + 2C_2) \sin x \end{cases}$$

פתרון: המשוואה היא משוואה לינארית, $y' = Ay + b(x)$ עם $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$b(x) = \begin{pmatrix} -\cos x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix}$$

את המטריצה היסודית של המשוואה מצאנו קודם:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \cos x - \sin x & \cos x + \sin x \\ -2 \cos x & -2 \sin x \end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי של המשוואה נתון ע"י הנוסחה $y(x) = \Psi(x) \int \Psi^{-1}(x)g(x) dx$

$$\det \Psi(x) = -2 \sin x (\cos x - \sin x) + 2 \cos x (\cos x + \sin x) = 2$$

$$\Psi^{-1}(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \sin x & -(\cos x + \sin x) \\ 2 \cos x & \cos x - \sin x \end{pmatrix}.$$

$$\Psi^{-1}(x)b(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \sin x & -(\cos x + \sin x) \\ 2 \cos x & \cos x - \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \sin x \cos x - (\cos x + \sin x)(\cos x + \sin x) \\ -2 \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

לכן

$$y(x) = \begin{pmatrix} \cos x - \sin x & \cos x + \sin x \\ -2 \cos x & -2 \sin x \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} dx =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x - \sin x & \cos x + \sin x \\ -2 \cos x & -2 \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\int \frac{dx}{2} \\ -\int \frac{dx}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x - \sin x & \cos x + \sin x \\ -2 \cos x & -2 \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{x}{2} + C_1 \\ -\frac{x}{2} + C_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -(\frac{x}{2} + C_1)(\cos x - \sin x) - (\frac{x}{2} + C_2)(\cos x + \sin x) \\ (x + 2C_1) \cos x + (x + 2C_2) \sin x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (C_1 - C_2) \sin x - (x + C_1 + C_2) \cos x \\ (x + 2C_1) \cos x + (x + 2C_2) \sin x \end{pmatrix}.$$

חלק III

שיטות נומריות לפתרון מד"ר

פרק 4

שימוש בטורים חזקות

פרק 5

שיטת Euler

$$38. \quad \begin{cases} xy' = y \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad \text{וודה קיום ויחידות של הפתרון לבעיית ההתחלה הנתונה}$$

רשום את תהליך Euler עבור צעד h כללי. רשום את הביטוי ל- y_4 עבור $h = 0.5$. בנוסף, מצה את הפתרון המדויק (האנליטי) $y(x)$ וחשב את $y(3)$. חשב את השגיאה $|y_4 - y(3)|$.

פתרון: הפונקציות $f(x, y) = \frac{y}{x}$ ו- $f'_y(x, y) = \frac{1}{x}$ רציפות בנקודה $(1, 1)$ לכן לפי

משפט Picard פתרון קיים והוא יחיד.

$$y_m = y_{m-1} + h \cdot \frac{y_{m-1}}{1 + (m-1)h} = \frac{mh + 1}{(m-1)h + 1} \cdot y_{m-1}$$

לאחר ההצבה $h = 0.5$, נקבל $n = \frac{3-1}{0.5} = 4$

$$y_m = \frac{m+2}{m+1} \cdot y_{m-1} \quad \text{לכן } y_0 = 1, y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = 2, y_3 = \frac{5}{2}, y_4 = 3$$

הפתרון הפרטי המדויק הוא $y(x) = x$ לכן $y(3) = 3$.

חלק IV

שימוש בהתמרת Laplace

(חשבון אופרציונלי)

$$39. \quad \text{מצא את הפתרון לבעיית ההתחלה} \quad \cdot \begin{cases} \ddot{z} + \dot{z} = \eta t - 2 - \eta(t - 4) \\ z(0) = 1 \\ \dot{z}(0) = 0 \end{cases}$$

פתרון:

1. כדי לרשון את תמונה של המשוואה, אנחנו נצטרך בתמורות Laplace הבאות:

$$\ddot{f} \doteq \sigma^2 F(\sigma) - \sigma f(0) - \dot{f}(0)$$

$$\dot{f} \doteq \sigma F(\sigma) - f(0)$$

$$\eta(t - c) \doteq \frac{1}{\sigma} e^{-c\sigma}$$

2. לפי נתונים שלנו,

$$\ddot{z} \doteq \sigma^2 Z(\sigma) - \sigma z(0) - \dot{z}(0) = \sigma^2 Z - \sigma$$

$$\dot{z} \doteq \sigma Z(\sigma) - z(0) = \sigma Z - 1$$

$$\eta(t - 2) \doteq \frac{1}{\sigma} e^{-2\sigma}$$

$$\eta(t - 4) \doteq \frac{1}{\sigma} e^{-4\sigma}$$

3. לכן ההתמרת Laplace של בעית ההתחלה שלנו היא

$$\sigma^2 Z - \sigma + \sigma Z - 1 = \frac{1}{\sigma} e^{-2\sigma} - \frac{1}{\sigma} e^{-4\sigma},$$

$$(\sigma^2 + \sigma)Z = \frac{1}{\sigma} e^{-2\sigma} - \frac{1}{\sigma} e^{-4\sigma} + \sigma + 1.$$

מכאן

$$Z(\sigma) = \frac{e^{-2\sigma}}{(\sigma + 1)\sigma^2} - \frac{e^{-4\sigma}}{(\sigma + 1)\sigma^2} + \frac{1}{\sigma}.$$

נפרק את האגף הימני לשברים פשוטים:

$$\frac{1}{(\sigma + 1)\sigma^2} = \frac{A}{\sigma + 1} + \frac{B\sigma + C}{\sigma^2}.$$

המספרים A, B ו- C מקיימים את התנאים הבאים:

$$A\sigma^2 + (B\sigma + C)(\sigma + 1) = 1$$

$$(A + B)\sigma^2 + (B + C)\sigma + C = 1$$

$$\text{השוויון הזה שקול למערכת בת שלוש משוואות לינקריות:} \quad \left\{ \begin{array}{l} A + B = 0 \\ B + C = 0 \\ C = 1 \end{array} \right. \text{ הפתרון:}$$

$$C = 1, B = -1, A = 1.$$

ז"א ש- $\frac{1}{(\sigma+1)\sigma^2} = \frac{1}{\sigma+1} + \frac{1-\sigma}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma+1} - \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}$ סופית,

$$Z(\sigma) = \frac{e^{-2\sigma}}{\sigma+1} - \frac{e^{-2\sigma}}{\sigma} + \frac{e^{-2\sigma}}{\sigma^2} - \frac{e^{-4\sigma}}{\sigma+1} + \frac{e^{-4\sigma}}{\sigma} - \frac{e^{-4\sigma}}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma}$$

4. כעת אנחנו צריכים לחזור לפונקציות של המשתנה t . בשביל זה נצטרך בהתמרות

Laplace הפוכות הבאות:

$$\frac{e^{a\sigma}}{\sigma} \rightleftharpoons \eta(t+a)$$

$$\frac{e^{a\sigma}}{\sigma^2} \rightleftharpoons (t+a)\eta(t+a)$$

$$\frac{e^{a\sigma}}{\sigma+c} \rightleftharpoons e^{-c(t+a)}\eta(t+a)$$

לכן

$$z(t) = e^{-(t-2)}\eta(t-2) - e^{-(t-4)}\eta(t-4) -$$

$$- \eta(t-2) + \eta(t-4) + (t-2)\eta(t-2) - (t-4)\eta(t-4) + \eta(t) =$$

$$= (e^{-(t-2)} + t-3)\eta(t-2) - (e^{-(t-4)} + t-3)\eta(t-4) + \eta(t).$$